УДК 692.47

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ МЕРИДИАНА КРУГОВОГО ТЕНТОВОГО ШАТРА

Кудрявцева В.И., Удлер Е.М.

ГОУ ВПО «Казанский государственный архитектурно-строительный университет», Казань, e-mail: udler41@mail.ru

Статья посвящена исследованию в области расчета и проектирования одного из видов тентовых сооружений, изготавливаемых из пленочно-тканевых материалов. Рассматривается форма подвешенной в центре гибкой оболочки, геометрия поверхности которой образуется провисанием под собственным весом и равномерным натяжением на круглом опорном контуре. Приводится расчетная схема и дифференциальные уравнения равновесия оболочки при одноосном напряженном состоянии. В связи со сложностью получения точного решения уравнений сделано допущение о равномерном распределении сил тяжести оболочки по описанной конической поверхности. Приведены расчеты влияния принятого допущения на кривизну образующей. Получено решение, показывающее, что образующая представляет собой кубическую параболу. Конкретная форма параболы определяется учитывающим как физические характеристики оболочки, вес и натяжение, так и геометрические, высоту подвеса и диаметр опорного контура.

Ключевые слова: тентовые шатровые сооружения, мягкие оболочки, плоское напряженное состояние, статическая форма поверхности

DERIVATION OF THE EQUATION OF A CIRCULAR TENT'S MERIDIAN

Kudryavtseva V.I., Udler E.M.

Kazan State University of architecture and building, Kazan, e-mail: udler41@mail.ru

The article describes the research, which aim is determining the equation of the curve that describes in rotation around vertical axis the surface similar to the shape of soft shell suspended in the center and under the action of its own weight force and tension along the lower contour of the circular support. The shell material is taken totally flexible and non-extensible. Make assumptions about the distribution of the linear force of gravity on the surface of the shell, typical for conical surfaces. Compiled by differential equations of equilibrium of a small section of shell cut along the meridians and parallels. At the result of solving equations received analytical expression describing the shape of the meridian forming the shell. This expression is a parabola the shape of which essentially depends on the parameter ,wich consider the size of the height and diameter of the marquee as well as the correlation of forces of weight and tension of membrane. The paper provides a function to calculate this parameter. The authors carried out the design verification showing a slight effect on the shape of the meridian, the assumption of linear distribution of gravity force of the shell.

Keywords: tent structures, soft shell, plane stress, static form of surface shape

Тентовые сооружения получили широкое распространение в практике строительства. Одним из давно известных видов таких сооружений являются круговые шатры кочевых народов, схемы которых приведены на рис. 1.

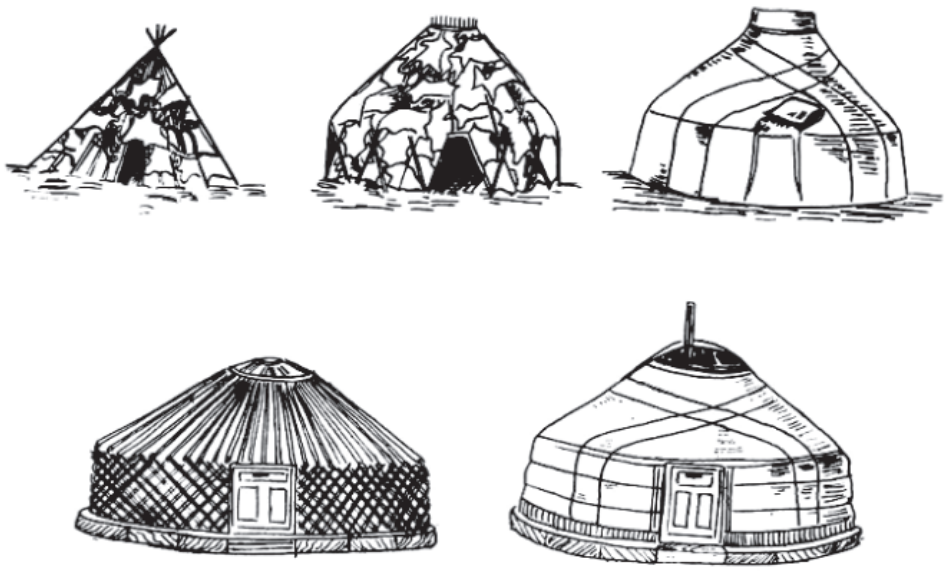

Рис. 1. Юрты и шатры кочевых народов

Рис. 2. Шатровое покрытие сооружения в Казани диаметром 50 м

Существенная особенность рассматриваемых в данной работе современных шатров заключается в отсутствии каркаса боковых поверхностей и использовании схемы с центральной подвеской оболочки и закреплением её на круглом опорном контуре, как показано на рис. 2.

Стабильность формы таких шатров обеспечивается приданием отрицательной гауссовой кривизны их поверхности под действием сил собственного веса оболочки, усилий предварительного растяжения при монтаже путем радиального натяжении по круглому опорному контуру.

Цель исследования. Для проектирования и расчета шатров необходимо знание зависимости формы поверхности от веса оболочки, натяжения тента и размеров сооружения. Однако в литературе этих сведений авторы не нашли. В связи с этим определение формы кривой, вращение которой вокруг центральной вертикальной оси образует оболочку в виде поверхности вращения, и выявление влияния на форму перечисленных выше факторов является главной целью данной работы.

Тентовые сооружения, как правило, изготавливаются из гибких рулонных пленочно-тканевых материалов. Эти материалы не способны сопротивляться изгибу и сжатию и могут воспринимать только растягивающие усилия. Поэтому сооружения из них должны иметь форму поверхности отрицательной гауссовой кривизны. Это позволяет мягким оболочкам сохранять стабильное положение под действием знакопеременных внешних нагрузок. Методы исследования поведения мягких оболочек под нагрузкой весьма обширны и классифицируются по принципам силового формообразования: пневматические, гидравлические, механические [2–5]. В описанных в данной работе исследованиях использован аналитический метод анализа механического равновесия шатровой оболочки.

Для проведения анализа была составлена расчетная схема, учитывающая геометрию оболочки, условия закрепления и схему нагрузок, но не учитывающая, на первом этапе, растяжимость материала. Она представлена на рис. 3.

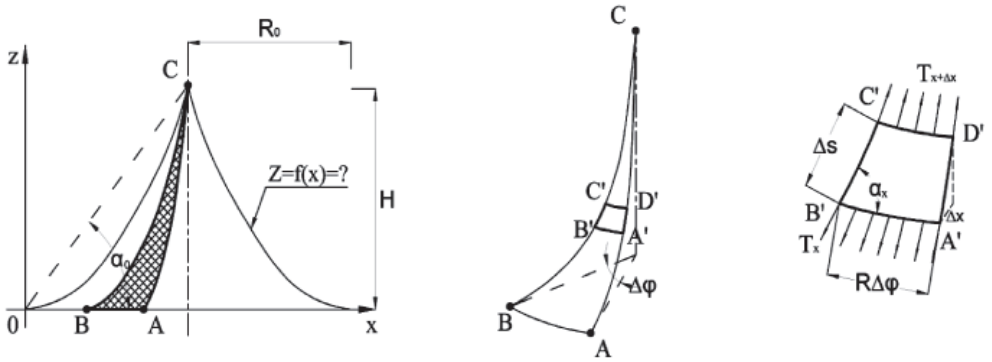

Рис. 3. Расчетная схема оболочки:
слева – привязка к системе координат и геометрические параметры;
справа – схема усилий и параметры малого элемента оболочки

Приняты следующие обозначения на схеме:

R_o – радиус опорного контура шатра;

H^o – высота шатра;

T_x, $T_{x+\Delta x}$ – внутренние погонные радиальные усилия растяжения в элементе;

α_x, α_o – углы, с осью X касательной к меридиану и хорды соответственно;

$\Delta\varphi$ – малый центральный угол сектора вырезанного элемента;

ds – размер элемента по меридиану.

Для решения основной задачи – определения уравнения образующей кривой поверхности оболочки шатра – были составлены уравнения равновесия малого элемента, ограниченного смежными меридианами и параллелями, как показано на рис. 2.

$$-T_x \cdot (R-x)\cdot \Delta\varphi \cdot \cos(a_x) + \\ + T_{x+\Delta x}\cdot (R-x-\Delta x)\cdot \Delta\varphi \cdot \cos(a_{x-\Delta x}) = 0; \quad (1)$$

$$-T_x (R-x)\cdot \Delta\varphi \cdot \sin(a_x) + \\ + T_{x+\Delta x}(R-x-\Delta x)\cdot \Delta\varphi \cdot \sin(a_{x+\Delta x}) - \\ - q\cdot (R-x)\cdot \Delta\varphi \cdot ds = 0. \quad (2)$$

Первое уравнение представляет собой сумму проекций сил на горизонтальную плоскость.

Второе – сумма проекций сил на вертикальную ось.

Из уравнения (1) следует, что при одноосном напряженном состоянии проекция продольной силы натяжения оболочки на горизонтальную плоскость должна иметь постоянную величину:

$$T_x \cdot (R-x)\cdot \cos(a_x) = \text{const}. \quad (3)$$

Так как на контуре справедливы условия $z_{x=0} = 0$ и $\cos(a_{x=0}) = 1$, то обозначив погонное усилии натяжения оболочки на контуре N_o, получаем соотношение, связывающее текущее меридианное усилие с усилием на опоре :

$$T_x = \frac{N_O \cdot R}{(R-x)\cdot \cos(a_x)}. \quad (4)$$

Рассмотрим условие равновесия проекций усилий на вертикальную ось Z, то есть уравнение (2)

Здесь приняты следующие обозначения:

$q = \rho g \delta$ – вес единицы площади оболочки

$(R - x)\cdot\Delta\varphi$ – приближенный размер сегмента по параллели

$ds = \dfrac{dx}{\cos(\alpha_x)} = k\cdot dx$ – длина сегмента по меридиану

Учитывая, что $\dfrac{1}{\cos(\alpha_x)} = \sqrt{1+\text{tg}^2(\alpha_x)}$, уравнение (2) принимает вид (5)

$$d(N_0 R\cdot \text{tg}(a_x)) = q\cdot \sqrt{1+\text{tg}^2(\alpha_x)}\cdot (R-x)dx. \quad (5)$$

Перейдем к дифференциалам, заменим $\text{tg}(a_x) = z'$ и введем обозначение (6)

$$a = \frac{(N_o R)}{q}. \quad (6)$$

Получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$z'' = \frac{\sqrt{1+z'^2}}{a}(R-x)dx. \quad (7)$$

Подстановками $v = z'$ и $v' = z''$ приводим его к виду

$$v' = \frac{1}{a}\sqrt{1+v^2}\cdot (R-x)dx.$$

После интегрирования получим

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{1}{a}\int (R-x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(v+\sqrt{1+v^2}\right) = \frac{x}{2a}(2R-x) + C_1.$$

При $x = 0$ тангенс угла равен нулю, и константа равна нулю, тогда получаем (8а)

$$v+\sqrt{1+v^2} = \exp\left(\frac{x(2R-x)}{2a}\right). \quad (8а)$$

Умножаем обе его части на выражение $v-\sqrt{1+v^2}$

$$\left(v-\sqrt{1+v^2}\right)\cdot\left(v+\sqrt{1+v^2}\right) = \\ = \left(v-\sqrt{1-v^2}\right)\cdot \exp\left(\frac{x(2R-x)}{2a}\right).$$

Откуда следует (8б)

$$v-\sqrt{1+v^2} = -\exp\left(-\frac{x(2R-x)}{2a}\right). \quad (8б)$$

Складываем (8а) и (8б):

$$2v = \exp\left(\frac{x(2R-x)}{2a}\right) - \exp\left(-\frac{x(2R-x)}{2a}\right).$$

Учитывая, что $v = z'$, получаем зависимость (9)

$$z' = \text{sh}\left(\frac{x(2R-x)}{2a}\right). \quad (9)$$

Это точное выражение для тангенса угла наклона касательной к образующей.

Дальнейшее интегрирование приводит к неразрешимому неопределенному интегралу, поэтому предлагается ввести упрощение.

Заменим, при учете веса оболочки, тангенс угла наклона касательной, тангенсом угла образующей описанного конуса

$\mathrm{tg}(\alpha_x) = H/R$, тогда величина $\dfrac{1}{\cos(\alpha_x)}$ при учете веса оболочки представляет собой постоянный коэффициент $k = \sqrt{1 + H^2 / R^2}$.

Это приводит к уравнению $z'' = \dfrac{k}{a}(R - x)\,dx$, после интегрирования которого, с учетом условий на контуре $z'_{x=0} = 0$ получаем уравнение (10)

$$z' = \sqrt{1 + \frac{H^2}{R^2}} \cdot \frac{x(2r - x)}{2a}. \qquad (10)$$

.После второго интегрирования с учетом условий на контуре $z_{x=0} = 0$ приходим к искомой функции (11), описывающей форму меридиана оболочки:

$$z = \frac{p \cdot x^2}{6}(3R - x). \qquad (11)$$

Здесь p – расчетный параметр

$$p = \frac{k}{a} = \frac{q \cdot \sqrt{1 + H^2/R^2}}{N_o R}.$$

Приняв $z_{(x=R)} = H$, можно вычислить минимальное натяжение формообразования шатра

$$N_o = \frac{qR}{2H}\sqrt{R^2 + H^2}. \qquad (12)$$

На рис. 4 приведен пример вычисленной по формуле (10) кривой меридиана шатровой оболочки и график распределения усилий растяжения в ней АО высоте.

Чтобы оценить ошибку, вносимую линейным распределением нагрузки от собственного веса оболочки, сравним значения кривизны меридиана, вычисленные по известной, например из [1], формуле кривизны плоской кривой (13). Точные значения вычислялись с учетом тангенса угла по формуле (9), а приближенные по формуле (10). Результаты вычислений сведены в таблицу и проиллюстрированы графиками на рис. 5.

$$k_k = \frac{z''}{\left[1 + (z')^2\right]^{3/2}}. \qquad (13)$$

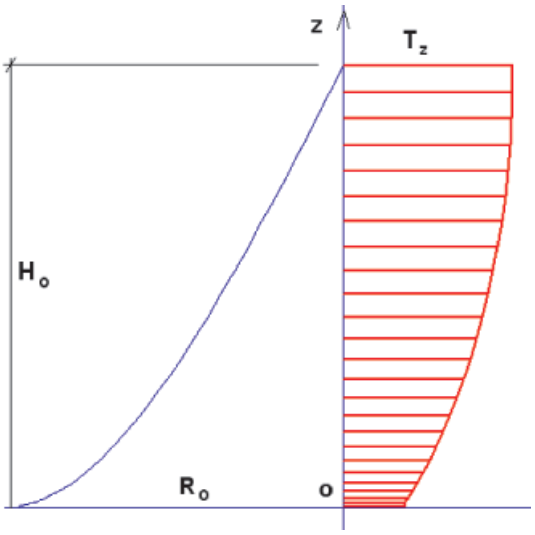

Рис. 4. Пример формы меридиана и график распределения усилий в нем по высоте

Таблица сравнения точных и приближенных значений кривизны меридиана (образующей шатра)

Относительные координаты $(R - x)/R$	Точные значения кривизны, вычисленные по формуле (9)	Приближенные значения кривизны, вычисленные по формуле (10)
1	1	1
0,9	0,723989	0,688679
0,8	0,389534	0,380662
0,7	0,188106	0,218011
0,6	0,090316	0,133881
0,5	0,044899	0,086486
0,4	0,023289	0,057162
0,3	0,012417	0,037319
0,2	0,006477	0,022641
0,1	0,002794	0,010717
0	0	0

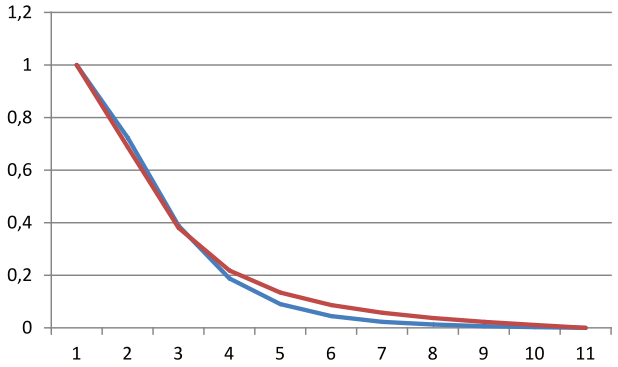

Рис. 5. Сравнение кривизны образующей, вычисленной по формулам точного (9) и приближенного (10) значений угла наклона касательной

Выводы

Таким образом, меридиан оболочки шатра имеет вид параболы, описываемой уравнением (11). Форма параболы регулируется параметром, зависящим от высоты и диаметра шатра, веса квадратного метра оболочки и погонного усилия натяжения оболочки на контуре. Минимальное необходимое усилие натяжения для придания естественной формы оболочке естественной формы без провисов и складок определяется выражением (13).

Список литературы

1. Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии. – М: Физматгиз, 1958. – 244 с.

2. Отто Ф., Шлейер Ф.К. Тентовые и вантовые строительные конструкции. – М.: Стройиздат, 1970. – 177 с.

3. Пневматические строительные конструкции; под ред. В.В. Ермолова. – М.: Стройиздат, 1983.

4. Удлер Е.М. Совершенствование методики расчета мягких резервуаров с жидкостью // Известия КГАСУ. – 2011. – № 2 (16). – С. 110.

5. Удлер Е.М. Численный метод расчета мягкой оболочки, заполненной жидкостью и газом // Известия КГАСУ. – 2012. – № 2(20). – С. 99.

References

1. Norden A.P. Kratkij kurs differencialnoj geometrii. M: Fizmatgiz, 1958. 244 p.

2. Otto F., Shlejer F.K. Tentovye i vantovye stroitelnye konstrukcii. M.: Strojizdat, 1970. 177 p.

3. Pnevmaticheskie stroitelnye konstrukcii; pod red. V.V. Ermolova. M.: Strojizdat, 1983.

4. Udler E.M. Sovershenstvovanie metodiki rascheta mjagkih rezervuarov s zhidkost'ju // Izvestija KGASU. 2011. no. 2 (16). pp. 110.

5. Udler E.M. Chislennyj metod rascheta mjagkoj obolochki, zapolnennoj zhidkost'ju i gazom // Izvestija KGASU. 2012. no. 2(20). pp. 99.

Рецензенты:

Куприянов В.Н., д.т.н., профессор, Казанский государственный архитектурно-строительный университет», г. Казань;

Каюмов Р.А., д.ф.-м.н., профессор, Казанский государственный архитектурно-строительный университет», г. Казань.