

УДК 621.016 (075.8)

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ТЕРМОДИНАМИКИ СУЖИВАЮЩЕГОСЯ СОПЛА

Кузнецов Е.В.

*ФГОУ ВО «Государственный морской университет имени адмирала Ф.Ф. Ушакова»,
Новороссийск, e-mail: kuzn@rambler.ru*

Предлагается метод расчета процесса истечения идеального газа из суживающегося сопла, который базируется на полученном в статье дифференциальном уравнении термодинамики потока газа, связывающем изменение температуры и давления потока газа. Это устраняет вычислительные проблемы, существующие при решении классических дифференциальных уравнений истечения. Метод учитывает зависимость теплоемкости газа от его температуры, что увеличивает точность расчета по сравнению с классическим методом. Алгоритм решения задач истечения газа из сопла состоит в численном интегрировании упомянутого дифференциального уравнения и вычислении остальных параметров потока газа по соответствующим алгебраическим выражениям. Метод позволяет решать задачи истечения из суживающегося сопла, в том числе определять параметры газа во всех внутренних сечениях сопла, на всех режимах истечения, включая критический. Статья содержит примеры как результатов расчета истечения газа из суживающегося сопла, так и погрешностей классического метода. Полученные графики изменения параметров газа внутри сопла при критическом истечении показывают, что предложенный метод расчета отражает все особенности этого режима истечения.

Ключевые слова: истечение газа, суживающееся сопло, термодинамика потока газа

COMPUTATIONAL ASPECTS OF THERMODYNAMICS OF THE CONTRACTING NOZZLE

Kuznetsov E.V.

Admiral Ushakov State Maritime University, Novorossiysk, e-mail: kuzn@rambler.ru

The calculation method for ideal gas outflow from contracting nozzle is suggested. The method is based on received in article differential equation, which connects changing of the temperature and pressure of gas flow. This eliminates the computational problems that exist for solving classical differential equations of outflow. This method takes in consideration the dependence of the specific gas heat from its temperature, which increases calculation accuracy compared to the classical method. An algorithm for solving tasks of the gas flow from contracting nozzle contains numerical integration of this differential equation and the calculation of the other parameters of the gas flow at appropriate algebraic expressions. The method allows to resolve the tasks of the ideal gas outflow from contracting nozzle in all regimes, including critical. The article contains examples of both the calculation results of the gas flow from contracting nozzle and of the classical method errors. Received graphs of gas parameters within the nozzle at critical outflow show that the proposed method of calculation reflects all the features of this outflow mode.

Keywords: gas outflow, contracting nozzle, gas flow thermodynamics

Базовыми математическими выражениями, описывающими термодинамические процессы истечения газа из суживающегося сопла, служат дифференциальные уравнения адиабатного потока идеального газа [5], [9]. Решение этих уравнений позволяет учитывать влияние на параметры потока газа зависимости теплоемкости газа (и коэффициента Пуассона) от температуры газа и позволяет найти возможно точные значения параметров газа.

Однако прикладные задачи для адиабатного потока газа [8], [9], включая истечение из суживающегося сопла, классически решаются по алгебраическим зависимостям с использованием уравнения адиабаты [5]:

$$pv^k = \text{const}, \quad (1)$$

где p – давление газа, v – удельный объем, k – коэффициент Пуассона.

Решение выполняется в предположении, что коэффициент Пуассона имеет по-

стоянное значение, и поэтому результаты решения имеют погрешность.

Это в значительной степени объясняется тем, что (как будет показано далее) дифференциальные уравнения идеального газа [5], [9] не имеют решения в точке критического режима и, следовательно, дают неприемлемую ошибку вычислений в окрестностях критической точки.

В связи с этим в статье предлагается вычисление параметров потока газа через суживающееся сопло с использованием полученного здесь такого дифференциального уравнения, для которого не существует отмеченной выше проблемы, то есть решение дифференциального уравнения будет существовать на всех режимах течения газа (включая критический) в каждом сечении сопла.

Такое решение задачи позволит:

- вычислять значения параметров газа в любом сечении сопла на всех режимах,
- оценивать погрешность классических методов [5], [8], [9],

– получать результаты с требуемой точностью, если погрешность классических методов окажется велика.

Предлагаемое решение задач течения газа рассчитано на использование вычислительной техники. В связи с этим автором были разработаны необходимые компьютерные программы в среде визуального моделирования Visual Solution (Vissim) [4] и выполнены примеры расчетов.

Задачи для суживающегося сопла решаются с использованием его расчетной схемы, приведенной на рис. 1.

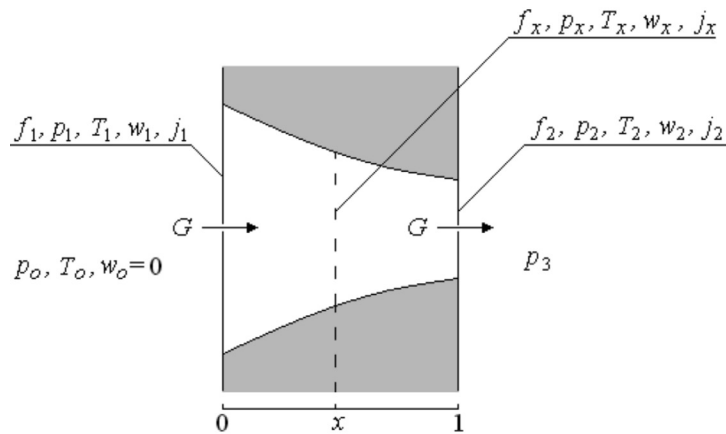


Рис. 1. Расчетная схема суживающегося сопла

Обозначения величин на рис. 1 имеют следующий смысл: p – абсолютное давление газа, T – абсолютная температура газа, w – скорость газа, j – плотность потока газа, f – площадь проходного сечения сопла.

Индексы на схеме соответствуют значениям величин:

0 – в бесконечном объеме перед соплом, где скорость газа $w_0=0$; 1 – во входном сечении сопла; 2 – в выходном сечении сопла, 3 – в бесконечном объеме за соплом; x – в произвольном сечении, находящемся на относительном расстоянии x от входного сечения.

В качестве базовых уравнений потока идеального газа по каналу (включая суживающееся сопло) можно принять систему дифференциальных уравнений термодинамического закона обращения внешних воздействий [2], которые можно привести к виду:

$$(M_x^2 - 1) \frac{dw_x}{w_x} = \frac{df_x}{f_x}, \quad (2)$$

$$-\frac{M_x^2 - 1}{I_x^2} \frac{1}{k_x} \frac{dp_x}{p_x} = \frac{df_x}{f_x}, \quad (3)$$

$$-\frac{M_x^2 - 1}{M_x^2} \frac{1}{k_x - 1} \frac{dT_x}{T_x} = \frac{df_x}{f_x}, \quad (4)$$

где M_x – число Маха, k_x – коэффициент Пуассона, причем значения M_x и k_x зависят от переменной температуры газа внутри сопла.

В уравнениях (2) – (4) площадь проходного сечения сопла f_x считается независимой переменной, а величины w_x , p_x и T_x – искомыми величинами.

Поскольку данные дифференциальные уравнения не имеют аналитического решения,

для их решения следует применить какой-либо метод их численного интегрирования.

Предварительно уравнения должны быть приведены к форме Коши, то есть записаны в явном виде относительно искомых величин [1], [3], например, уравнение (3):

$$\frac{dp_x}{p_x} = -\frac{M_x^2}{M_x^2 - 1} k \frac{df_x}{f_x}. \quad (5)$$

При расширении газа в суживающемся сопле до критического состояния число Маха M_x стремится к 1, и, следовательно, знаменатель правой части уравнения (5) по абсолютной величине будет уменьшаться и стремиться к 0, то есть $(M_x^2 - 1) \rightarrow 0$, и правая часть уравнения (13) будет неограниченно увеличиваться.

Таким образом, в точке критического режима и ее окрестности значения параметров потока газа не могут быть вычислены непосредственным решением системы уравнений (2) – (4) [3].

Для преодоления данного препятствия из уравнений (3) и (4) получим следующее уравнение, связывающее изменение температуры и давления газа в сопле:

$$dT_x = \frac{k_x - 1}{k_x} \frac{T_x}{p_x} dp_x. \quad (6)$$

Разделив уравнение (6) на дифференциал времени dt , получим

$$\frac{dT_x}{dt} = \frac{k_x - 1}{k_x} \frac{T_x}{p_x} \frac{dp_x}{dt}. \quad (7)$$

Будем рассматривать давление газа как независимую переменную, изменяющуюся во времени, например, по линейному закону:

$$p_x(t) = p_o - V_p t, \quad (8)$$

где V_p – постоянная скорость изменения давления во времени.

Это делается только в целях получения удобного алгоритма решения задачи в среде Vissim, и найденные значения параметров потока газа будут связаны зависимостями, имеющими место для обычной стационарной модели потока идеального газа [2], [5].

Продифференцировав функцию (8), получим

$$\frac{dp_x}{dt} = -V_p,$$

и тогда уравнение (7) становится дифференциальным уравнением, в котором все величины являются функциями времени:

$$\frac{dT_x}{dt} = -\frac{k_x - 1}{k_x} \frac{T_x}{p_x} V_p. \quad (9)$$

Интегрируя уравнение (9), можно определить значение температуры газа, соответствующее давлению газа и всем остальным параметрам потока газа.

Параметры газа в объеме перед соплом (p_o, T_o), становятся начальными условиями для уравнения (9) при $t = 0$.

При интегрировании уравнения (9) необходимо брать с предыдущего шага интегрирования значения p_x и T_x , начиная с начальных условий, а также вычислять коэффициент Пуассона, соответствующий температуре T_x , по формуле [5]

$$k_x(T_x) = \frac{c_{px}(T_x)}{c_{px}(T_x) - R},$$

где c_{px} – истинная массовая изобарная теплоемкость газа при температуре T_x , R – газовая постоянная.

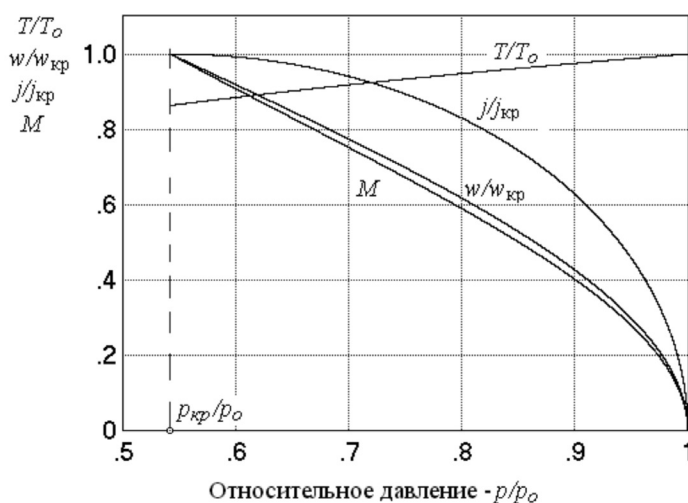
Для определения теплоемкости зависимость энтальпии газа от температуры $h = h(T)$ была задана в табличной форме, например [6]. Промежуточные значения энтальпии могут вычисляться любым интерполяционным методом [3]. В данной работе достаточная точность расчетов была достигнута простой линейной интерполяцией.

Истинная изобарная теплоемкость газа при температуре T_x может вычисляться с достаточной точностью численным дифференцированием как

$$c_{px} = h(T_x + 0,5) - h(T_x - 0,5).$$

Остальные термодинамические параметры газа вычисляются по следующим соответствующим выражениям [5]:

- скорость – $w_x = \sqrt{2(h(T_o) - h(T_x))}$,
- удельный объем – $v_x = RT_x/p_x$,
- плотность потока – $J_x = w_x/v_x$,
- скорость звука – $w_{ax} = \sqrt{k_x RT_x}$
- число Маха – $M_x = w_x/w_{ax}$.



Воздух: $p_o=10$ бар, $T_o=1500$ К, $w_{кр}=700,1$ м/с, $J_{кр}=1021,5$ (кг/с)/м².

Рис. 2. Зависимость термодинамических параметров потока газа от давления газа

Таким образом, данный алгоритм позволяет по известному давлению газа найти его температуру и все остальные термодинамические параметры с учетом зависимости теплоемкости газа и коэффициента Пуассона от температуры на всех режимах истечения газа через суживающееся сопло, включая критический, для которого не существует решения классических дифференциальных уравнений (2) – (4).

Решение задачи для суживающегося сопла заключается в непрерывном интегрировании уравнения (9) и вычислении остальных параметров при уменьшении давления газа от начального значения p_o .

Графики зависимости термодинамических параметров потока газа от давления газа показаны на рис. 2. По графикам можно сделать вывод, что предложенный метод расчета позволяет отразить все особенности изменения параметров потока газа через суживающееся сопло [5].

Выбор условия окончания процесса вычислений позволяет решить задачи для суживающегося сопла, приведенные в табл. 1.

Примеры расчета параметров критического истечения воздуха по приведенному выше алгоритму на основе решения дифференциального уравнения (9) приведены в табл. 2 (столбцы ДУ).

Для сравнения методов расчета суживающегося сопла, предлагаемого здесь и классического, были выполнены примеры расчета критического истечения газа по классическим выражениям [5]:

– критическое давление в выходном сечении сопла

$$p_{2кр} = p_o \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad (10)$$

– критический расход газа через сопло

$$G_{кр} = f_2 \sqrt{2 \frac{k}{k-1} \frac{p_o}{v_o} \left[\left(\frac{p_3}{p_o} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_3}{p_o} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}. \quad (11)$$

Результаты расчета параметров критического истечения воздуха с использованием выражений (10) и (11) приведены в табл. 2 (столбцы КУ).

Сравнение результатов расчета показывает: – погрешность классического метода (столбец КУ) зависит от начальных параметров газа;

– в примерах погрешность определения мощности потока для истечения воздуха составила:

7,4% при $p_o = 10$ бар и $T_o = 1750$ К; 0,4% при $p_o = 10$ бар и $T_o = 500$ К.

Таблица 1

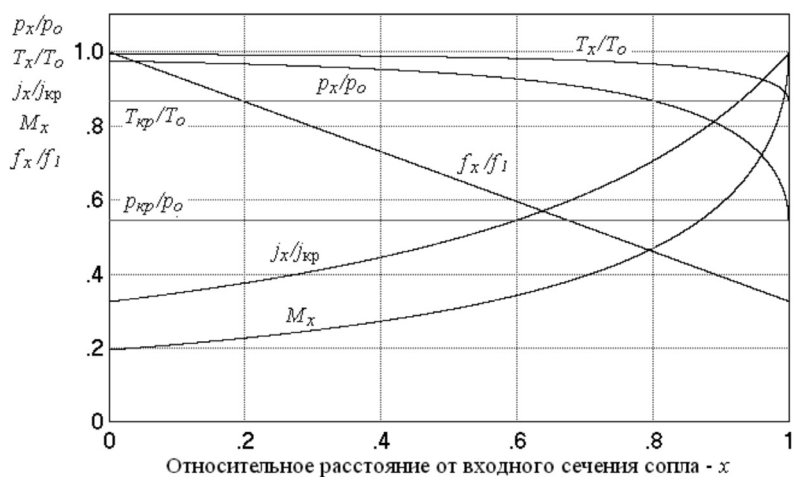
Задачи расчета термодинамических параметров газа в выходном сечении сопла

№ задачи	Наименование задачи	Условие остановки процесса вычислений
1	Критическое истечение	$M_x \geq 1$
Расчет параметров при одном заданном:		
2	Задано давление p_2 ($p_2 \geq p_{2кр}$)	$P_x \leq p_2$
3	Задана температура T_2 ($T_2 \geq T_{2кр}$)	$T_x \leq T_2$
4	Задана скорость w_2 ($w_2 \leq w_a$)	$w_x \geq w_2$
5	Задана интенсивность потока j_2 ($j_2 \leq j_{2кр}$)	$j_x \geq j_2$

Таблица 2

Результаты примеров расчета параметров критического истечения воздуха.
Методы расчета: ДУ – дифференциальные уравнения, КУ – классические уравнения

Параметры воздуха перед соплом	$p_o = 10$ бар $T_o = 1500$ К		$p_o = 10$ бар $T_o = 500$ К	
	ДУ	КУ	ДУ	КУ
$p_{2кр}$, бар	5,4442	5,2828	5,2904	5,2828
$T_{2кр}$, К	1516,8	1458,3	418,13	416,67
$w_{2кр}$, м/с	754,39	772,56	409,09	410,06
$j_{2кр}$, (кг/с)/м ²	943,44	966,18	1803,5	1807,6
f_{2^*} , м ² (задано)	0,016	0,016	0,016	0,016
$G_{кр}$, кг/с	15,095	15,459	28,856	28,921
$P_{кр} = G_{кр} w_{2кр}^2/2$, кВт	42,953	46,133	24,146	24,315



Воздух: $p_0=10$ бар, $T_0=1750$ К, $w_{kp}=754.4$ м/с, $j_{kp}=943.4$ (кг/с)/м², $f_1=0.049$ м².

Рис. 3. Пример изменения параметров критического потока газа через суживающееся сопло при линейной зависимости площади сечения сопла от пространственной координаты

На основе расчета термодинамических параметров потока можно решить две задачи при заданном давлении газа за соплом p_3 ($p_3 \geq p_{2kp}$):

- определить расход газа через сопло $G = f_2 j_2$, если известна площадь выходного сечения сопла f_2 ,

- определить площадь выходного сечения сопла $f_2 = G / j_2$, если известен расход газа через сопло ($G \leq G_{kp}$).

После определения расхода газа G и площади выходного сечения f_2 можно вычислить по этому же алгоритму изменение параметров газа внутри сопла вдоль пространственной координаты x .

Для этого должно быть известно (или задано) изменение площади проходного сечения сопла по пространственной координате, то есть зависимость $f_x = \varphi(x)$. При этом должно выполняться условие $f_x = \varphi(1) = f_2$. Предварительно следует найти обратную функцию $x = \varphi^{-1}(f_x)$ для определения значения координаты x .

Данный расчет выполняется с дополнением алгоритма формулами

$$f_x = G/j_x \text{ и } x = \varphi^{-1}(f_x).$$

При этом будут автоматически определены параметры газа (p_1, T_1, w_1) во входном сечении сопла при $x = 0$ и $f_x = \varphi(0) = f_1$.

Рассмотренный алгоритм представляет собой решение обратной задачи для газового потока, когда сначала при заданном давлении p_x определяются параметры газа (T_x, w_x и др.), а затем – значения площади сечения f_x и координаты x , при которых параметры газа имеют рассчитанные значения.

При выводе результатов расчетов на график целесообразно в качестве абсциссы принять x , как это показано на рис. 3.

Выводы

Предложенный метод расчета процесса истечения газа из суживающегося сопла на основе дифференциального уравнения, связывающего изменение давления и температуры газа:

- позволяет решать задачи истечения идеального газа из суживающегося сопла, в том числе определять параметры газа во всех внутренних сечениях сопла, на всех режимах истечения, включая критический;

- учитывает зависимость теплоемкости газа от его температуры, что может заметно увеличить точность результатов расчета по сравнению с классическим методом;

- использует один и тот же алгоритм для расчета:

- изменения параметров потока внутри сопла,
- показателей процесса истечения на всех режимах, включая критический,
- конструктивных характеристик сопла.

Список литературы

1. Бойченко Л.П., Выборова Н.М. Численные методы и их компьютерная реализация. – Ухта, УГТУ, 2012. – 90 с.
2. Вулис Л.А. Термодинамика газовых потоков. – М.: Госэнергоиздат, 1950. – 304 с.
3. Гутер Р.С., Овчинский Б.В. Элементы численного анализа и обработки результатов опыта. – М.: Наука, 1970. – 432 с.
4. Дьяконов В.П. VisSim+MathCad+MATLAB. Визуальное математическое моделирование. – М.: СОЛОН-Пресс, 2004. – 384 с.

5. Кириллин В.А., Сычев В.В., Шейндлин А.Е. Техническая термодинамика. – М.: Наука, 1979. – 512 с.
6. Ривкин С.Л. Термодинамические свойства газов: Справочник: – 4-е издание. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 288 с.
7. Balmer R.T. Moderd, Engineering Thermodynamics. Oxford, UK, Elsevier, 2011. – 827 p.
8. Borgnakke C., Sonntag R.E. Fundamentals of Thermodynamics, eight edition. Hoboken, USA, Wileys & Sons, 2013. – P. 916.
9. Rajput R.K. Engineering Thermodynamics, third edition. Boston, USA, Laxmi Publications, 2007. – 966 p.
4. Djakonov V.P. VisSim+MathCad+MATLAB. Vizualnoe matematicheskoe modeli-rovanie. M.: SOLON-Press, 2004. 384 p.
5. Kirillin V.A., Sychev V.V., Shejndlin A.E. Tehnicheskaja termodinamika. M.: Nauka, 1979. 512 p.
6. Rivkin S.L. Termodinamicheskie svojstva gazov: Spravochnik: 4-e izdanie. M.: Jenergoatomizdat, 1987. 288 p.
7. Balmer R.T. Moderd, Engineering Thermodynamics. Oxford, UK, Elsevier, 2011. 827 p.
8. Borgnakke C., Sonntag R.E. Fundamentals of Thermodynamics, eight edition. Hoboken, USA, Wileys & Sons, 2013. pp. 916.
9. Rajput R.K. Engineering Thermodynamics, third edition. Boston, USA, Laxmi Publications, 2007. 966 p.

References

1. Bojchenko L.P., Vyborova N.M. Chislennye metody i ih kompjuternaja realizacija. Uhta, UGTU, 2012. 90 p.
2. Vulis L.A. Termodinamika gazovyh potokov. M.: Gosjenergoizdat, 1950. 304 p.
3. Guter R.S., Ovchinskij B.V. Jelementy chislenogo analiza i obrabotki rezul'tatov opyta. M.: Nauka, 1970. 432 p.

Рецензенты:

Николаев Н.И., д.т.н., профессор, Государственный морской университет имени адмирала Ф.Ф. Ушакова, г. Новороссийск;
Самойленко А.Ю., д.т.н., профессор, Государственный морской университет имени адмирала Ф.Ф. Ушакова, г. Новороссийск.