

УДК 628.822

## АНАЛИЗ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ В ПОДШИПНИКЕ СКОЛЬЖЕНИЯ

<sup>1</sup>Иванов В.А., <sup>1,2</sup>Еркаев Н.В.

<sup>1</sup>Сибирский федеральный университет, Красноярск;

<sup>2</sup>Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, e-mail: Vintextrim@yandex.ru

В статье рассмотрен новый подход к вычислению самосогласованного распределения давления и деформации поверхности для цилиндрического подшипника скольжения. Предлагаемый метод основан на численном решении двухмерного уравнения Рейнольдса для смазочного слоя, вычислении деформации поверхности с помощью трехмерного пакета ANSYS с использованием разложения Фурье для вычисления матрицы податливости. Дано сравнение функций податливости для двухмерного и трехмерного случаев. Найдена простая аналитическая аппроксимация для матрицы податливости, которая может применяться для расчета тяжело нагруженных подшипников скольжения. Найденная матрица податливости используется в итеративной процедуре для расчета самосогласованного распределения давления и прогиба поверхности в зоне контакта. Показана высокая эффективность итерационной процедуры, позволяющей получить стационарное распределение давления в смазочном слое, согласованное с деформацией упругой поверхности. Представлены результаты расчета конкретного подшипника скольжения.

**Ключевые слова:** подшипник скольжения, упруго-гидродинамический контакт, матрица податливости

## ANALYSIS OF ELASTIC DEFORMATION IN SLIDING BEARINGS

<sup>1</sup>Ivanov V.A., <sup>1,2</sup>Erkaev N.V.

<sup>1</sup>Siberian Federal University, Krasnoyarsk;

<sup>2</sup>Institute of Computational Modelling SB RAS, Krasnoyarsk, e-mail: Vintextrim@yandex.ru

This article deals with a new approach for calculation of self-consistent pressure distribution and surface deflection for a lubricated journal bearing. This approach is based on the numerical solution of the 2-D Reynolds' equation for the lubrication layer, numerical calculation of the surface deformations by the 3-D ANSYS package and Fourier series expansion for the compliance matrix. A simple analytical approximation is found for the obtained compliance matrix, which can be used for heavy loaded journal bearings. The compliance matrix is implemented into the iterative procedure for calculation of self-consistent pressure distribution and surface deflection in the contact zone. The iterations are shown to be very effective to obtain a stationary distribution of pressure in the lubrication layer, which is consistent with the surface deflections. Results of calculations are presented for the particular journal bearing in cases of different loadings.

**Keywords:** journal bearing, elastic hydrodynamics, compliance matrix

Гидродинамическая теория смазки широко применяется для расчета и конструирования подшипников скольжения с жидкой смазкой, которые являются важными конструктивными элементами разнообразных механизмов и машин. Существует большое количество публикаций, посвященных этой теме, например [5, 3, 8]. Роль упругих деформаций становится очень важной для тяжело нагруженных цилиндрических подшипников скольжения. Поэтому возникла необходимость учета упругих деформаций рабочих поверхностей в гидродинамической теории смазки. Это привело к развитию так называемой упруго-гидродинамической теории, в которой согласованно рассматривались течение смазочного слоя и деформация поверхности контакта, вызванная повышенным давлением в смазочном слое [4]. В этой теории важное место отводится проблеме определения связи между распределением давления в слое и деформацией поверхности.

Основными элементами конструкции гидродинамического подшипника скольже-

ния являются цилиндрический вал, смазочный слой, вкладыш и корпус. Обычно вкладыш подшипника изготавливается из более податливого материала по сравнению с корпусом, который имеет высокую твердость и мало деформируется. По этой причине деформациями корпуса часто пренебрегают и учитывают только деформации вкладыша [1]. При таком упрощенном подходе деформации тонкого вкладыша, ограниченные жестким корпусом, определяются малым параметром – отношением толщины вкладыша к радиусу кривизны. Как показано в монографии [1], в первом приближении по этому малому параметру деформации вкладыша пропорциональны локальному значению давления. Коэффициент пропорциональности называют податливостью вкладыша. Данное приближение связано с известной гипотезой Винклера. В общем случае необходимо учитывать не только деформации вкладыша, но также и деформации корпуса, имеющего конечную жесткость. В таком случае расчеты поверхностных деформаций должны выполняться

самосогласованно с вычислениями распределения давления вдоль всего смазочного слоя. Для этой цели необходимо определить общую функциональную связь между поверхностными деформациями и распределением давления в слое смазки, принимая во внимание различие свойств материала вкладыша и корпуса подшипника. Главной целью данной работы является разработка метода установления обобщенного функционального уравнения и применение его для получения решения упруго-гидродинамической контактной задачи.

### Постановка задачи

Для описания предлагаемого подхода рассмотрим цилиндрический подшипник скольжения, в котором смазочный слой разделяет стальной вал и бронзовый вкладыш, граничащий со стальным корпусом, как показано на рис. 1. Здесь  $\omega$  – угловая скорость вращения вала,  $\varphi$  – азимутальный угол, отсчитываемый в направлении часовой стрелки от точки максимального зазора,  $\eta$  и  $R_0$  – эксцентриситет и радиус цилиндрического вала,  $R_1$  – внутренний радиус вкладыша,  $R_2$  и  $R_3$  – внутренний и внешний радиусы цилиндрического корпуса,  $L$  – длина подшипника. В расчетах используем нулевые граничные условия для деформаций на заданной внешней границе корпуса подшипника. Между валом и вкладышем располагается тонкий слой жидкой смазки, называемый смазочным слоем. Также ставим нулевые граничные условия для давления на торцах подшипника.

Распределение давления в смазочном слое определяется из решения известного уравнения Рейнольдса [3]:

$$\frac{1}{R_0^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{1}{R_0} \frac{\partial hu}{\partial \varphi}; \quad (1)$$

$$h = R_1 - R_0 + \eta \cos(\varphi) + \delta(P);$$

$$P > 0; \frac{\partial hu}{\partial x} = 0; P \leq 0. \quad (2)$$

Здесь  $h$  – толщина смазочного слоя;  $\mu$  – коэффициент вязкости;  $u$  – средняя скорость поверхностей вала и вкладыша;  $y$  – координата вдоль оси цилиндрического подшипника;  $\varphi$  – азимутальный угол;  $\delta$  – радиальный прогиб поверхности вкладыша, зависящий от давления в смазочном слое. Метод численного решения уравнения (1) описан в работе [2].

### Результаты вычислений

Для иллюстрации метода введем конкретные параметры подшипника скольжения:  $R_1 = 0,03$  м,  $R_2 = 0,035$  м,  $R_3 = 0,1$  м,  $d = 0,00013$  м,  $E_1 = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па,  $E_2 = 1,08 \cdot 10^{11}$  Па,  $m_1 = 0,3$ ,  $m_2 = 0,34$ ,  $\mu = 0,024$  Па/с,  $\omega = 314,16$  с<sup>-1</sup>, где  $E_1$  и  $E_2$  – модули упругости стального корпуса и бронзового вкладыша;  $m_1$  и  $m_2$  – коэффициенты Пуассона для материалов корпуса и вкладыша соответственно. Длина и диаметр подшипника предполагаются равными друг другу.

Зависимость упругих деформаций от распределения давления может быть записана в следующей интегральной форме:

$$\delta(\varphi) = \int_0^{2\pi} P(\varphi') K(\varphi - \varphi') d\varphi', \quad (3)$$

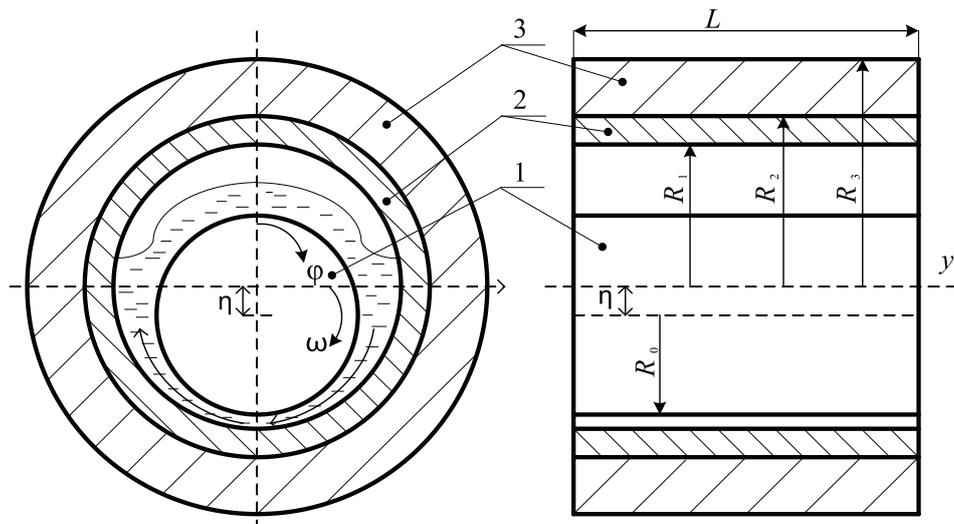


Рис. 1. Геометрическая схема подшипника скольжения:  
1 – вал, 2 – бронзовый вкладыш, 3 – корпус

где  $\delta$  и  $P$  – прогиб поверхности и давление, зависящие от азимутального угла. Функцию  $K(\varphi - \varphi')$ , являющуюся ядром линейного функционала, будем называть функцией податливости. Эта функция не зависит от конкретного распределения давления, но зависит от геометрических характеристик подшипника скольжения. Она может быть найдена на основе численных результатов, описанных в [2]. Для этой цели применяем разложение Фурье:

$$K(\varphi) = \sum_{k=0}^n [M_k \cos(k\varphi) + N_k \sin(k\varphi)]. \quad (4)$$

Умножая уравнение (4) на гармонические функции и интегрируя по углу в интервале от 0 до  $2\pi$ , получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов Фурье  $M_k$  и  $N_k$  [2]. Используя известное распределение давления в смазочном слое и деформации поверхности, рассчитанные пакетом ANSYS, находим коэффициенты Фурье:

$$\begin{aligned} M_k &= \frac{g_k}{\pi} \frac{X_k C_k + Y_k D_k}{X_k^2 + Y_k^2}; \\ N_k &= \frac{g_k}{\pi} \frac{Y_k C_k - X_k D_k}{X_k^2 + Y_k^2}; \\ M_0 &= \frac{D_0}{2\pi Y_0}; \quad k = 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} X_k &= \int_0^{2\pi} P(\varphi') \sin(k\varphi') \cdot d\varphi'; \\ Y_k &= \int_0^{2\pi} P(\varphi') \cos(k\varphi') \cdot d\varphi'; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_k &= \int_0^{2\pi} \delta(\varphi') \sin(k\varphi') \cdot d\varphi'; \\ D_k &= \int_0^{2\pi} \delta(\varphi') \cos(k\varphi') \cdot d\varphi'. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь давление и прогиб поверхности являются функциями угла, которые определяются методом сплайновой интерполяции дискретных узловых значений  $P_i$  and  $\delta_i$ .

В этой формуле точность результата зависит от выбора верхнего предела суммирования  $n$ . В частности, значение  $n = 10$  вполне достаточно для хорошей точности аппроксимации. В связи с применением формулы (4) следует обратить внимание на заметное влияние мелкомасштабных шумовых погрешностей, присутствующих в численных данных, полученных в результате расчетов. Для удаления связанных с таким шумом эффектов можно воспользоваться одним из способов регуляризации [6, 7]. Для подавления паразитных осцилляций вводим множители вида  $g_k = 1 / (1 + \epsilon k^4)$  для Фурье коэффициентов. Здесь  $\epsilon$  является малым параметром, который существенно влияет на затухание шумовых осцилляций.

На рис. 2 сплошной линией показана функция (4), соответствующая значению  $\epsilon = 0,0001$ . На том же рисунке штриховой линией показана аналитическая аппроксимация, заданная простой формулой вида

$$K_{an}(\varphi) = 1,2K_0 \left[ \frac{1}{1 + a\varphi^\alpha} \right]^\beta, \quad (7)$$

где  $a = 5$ ;  $\alpha = 1,7$ ;  $\beta = 1,4$ ;

$$K_0 = \left[ \frac{(R_2 - R_1)(1 + m_1)(1 - 2m_1)}{E_1(1 - m_1)} + \frac{(R_3 - R_2)(1 + m_2)(1 - 2m_2)}{E_2(1 - m_2)} \right]. \quad (8)$$

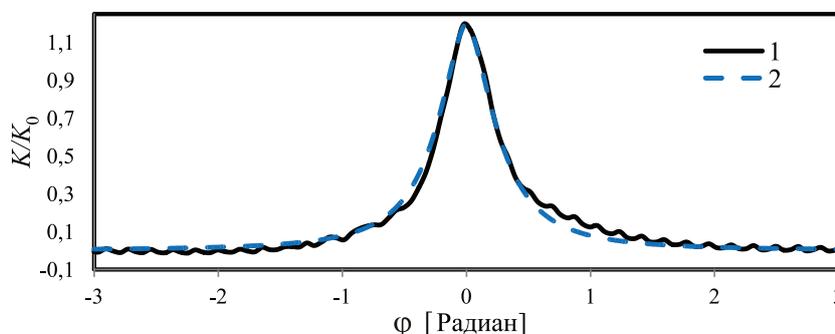


Рис. 2. Функция податливости, полученная из численного решения (кривая 1), в сравнении с аналитической аппроксимацией (кривая 2), заданной формулой (7)

Полученные функции (4) и (7) определяют матрицу податливости для любого распределения давления вдоль смазочного слоя для заданных геометрических параметров подшипника скольжения.

### Трехмерные расчеты ANSYS

Далее анализируем различие между матрицами податливости для различных поперечных сечений подшипника скольжения. Используя конечно-разностную схему, описанную в работе [2], вычисляем гидродинамическое давление в смазочном слое для подшипника скольжения конечной длины. На рис. 3 показаны профили давления, соответствующие различным поперечным сечениям ( $y = \text{const}$ ) подшипника. Для определения деформаций, связанных с распределением давления, применяем трехмерный пакет ANSYS. Используя результаты вычислений ANSYS, находим

деформации поверхности вкладыша в каждом поперечном сечении и сравниваем трехмерное решение ANSYS в центральном поперечном сечении с двумерным решением. Оба решения представлены на рис. 4. Анализ показывает, что деформация поверхности подшипника в двухмерной расчетной модели ANSYS заметно больше, чем в трехмерной модели. Различие составляет 28%. Далее сравниваем поведение функций податливости для различных поперечных сечений. Для получения этих функций применяем описанное выше разложение Фурье для различных поперечных сечений подшипника. Расчеты показывают, что функции податливости располагаются довольно близко друг к другу для всех сечений (кроме самых крайних). Поэтому практически можно использовать матрицу податливости, рассчитанную только для центрального сечения.

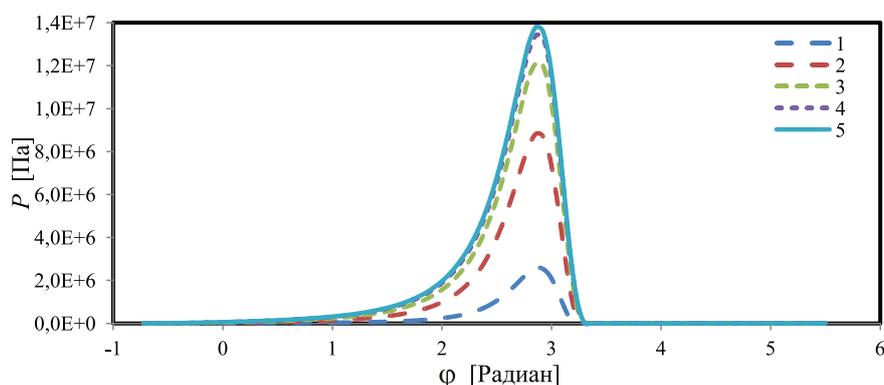


Рис. 3. Азимутальные распределения давления, соответствующие различным поперечным сечениям подшипника скольжения. Кривая 1 – для сечения, близкого к краю подшипника:  $y = 0,02666$  м. Кривые 2, 3, 4, и 5 соответствуют поперечным сечениям  $y = 0,01999$  м,  $y = 0,01333$  м,  $y = 0,00666$  м и  $y = 0$  соответственно

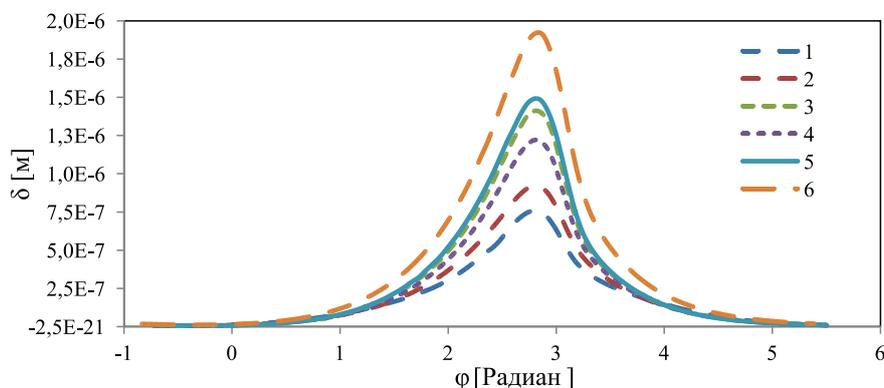


Рис. 4. Деформации поверхности подшипника для различных поперечных сечений (трехмерная модель), а также для двухмерной модели. Кривые 1, 2, 3, 4 и 5 соответствуют прогибу поверхности, полученному по трехмерной модели ANSYS для сечений  $y = 0,03$  м,  $y = 0,02333$  м,  $y = 0,01666$  м,  $y = 0,00999$  м и  $y = 0,00333$  м соответственно; кривая 6 соответствует двухмерной модели ANSYS

### Заключение

Предложен эффективный подход, позволяющий вычислить матрицу податливости на основе предварительного расчета давления в смазочном слое и использования программного пакета ANSYS для определения прогиба поверхности. Даже в случаях длинных подшипников скольжения для вычисления поверхностных деформаций следует предпочесть более реалистичную трехмерную модель пакета ANSYS по сравнению с двухмерной моделью. Сравнение показывает, что двухмерная модель дает существенно завышенные значения прогиба поверхности. Для определения функции податливости, обеспечивающей связь давления и прогиба, применяется разложение Фурье. Для подавления шумовых осцилляций вводятся коррекции коэффициентов Фурье посредством множителей регуляризации, которые обеспечивают сглаживание искомой функции податливости. Оказалось, что найденные функции податливости, относящиеся к различным поперечным сечениям подшипника, мало отличаются друг от друга. Поэтому для экономии вычислений достаточно определить функцию податливости только для центрального сечения подшипника. Важно отметить, что функция податливости, зависящая от конструктивных параметров подшипника, не зависит от распределения давления вдоль смазочного слоя. Поэтому функция податливости, найденная один раз для конкретного подшипника, может использоваться многократно в итерационной схеме совместно с уравнением Рейнольдса для самосогласованного моделирования различных динамических режимов подшипника скольжения.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-05-00879).*

### Список литературы

1. Галахов М.А., Усов П.П. Дифференциальные и интегральные уравнения математической модели и теории трения. – М.: Наука, 1990. – 280 с.

2. Иванов В.А., Еркаев Н.В. Расчет деформации рабочих поверхностей подшипников скольжения. – М.: Тяжелое машиностроение, 2013. – № 3. – С. 34–38.

3. Hamrock B.J. Fundamentals of fluid film lubrication. – McGraw-Hill Inc. 1994.

4. Lugt P.M., Morales-Espejel G.E. A Review of elasto-hydrodynamic lubrication Tteory. Tribology Transactions 2011; 54; 470-496; DOI:10.1080/10402004.2010.551804.

5. Szeri A.Z., Fluid film lubrication (2-nd ed.). Cambridge University Press); 2011.

6. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. Solution of ill-posed problems. Washington: Winston & Sons. 1977.

7. Tikhonov A.N., Goncharsky A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. Numerical methods for the solution of ill-posed problems. – Kluwer Academic Publishers, 1995.

8. Williams, J.A. Engineering tribology. – New York: Oxford University Press Inc.: 242; 1994.

### References

1. Galakhov M.A., Usov P.P. *Differencialnye i integralnye uravneniya matematicheskoy modeli i teorii treniya* [Differential and integral equations of the mathematical theory of friction] Moscow. Nauka. 1990. 280 p.

2. Ivanov V.A., Erkaev N. V. *Raschet deformacii rabochix poverxnostej podshipnikov skolzheniya* [Calculation of the deformation of working surfaces slide bearings]. Moscow. Tyazheloe mashinostroenie. 2013. no. 3. pp. 34–38.

3. Hamrock, B. J. Fundamentals of Fluid Film Lubrication. McGraw-Hill Inc. 1994.

4. Lugt P.M., and Morales-Espejel G.E. A Review of Elasto-Hydrodynamic Lubrication Theory. Tribology Transactions 2011; 54; 470-496; DOI:10.1080/10402004.2010.551804.

5. Szeri A.Z., Fluid Film Lubrication (2-nd ed.). Cambridge University Press); 2011.

6. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. Solution of Ill-posed Problems. Washington: Winston & Sons. 1977.

7. Tikhonov A.N., Goncharsky A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems. Kluwer Academic Publishers. 1995.

8. Williams, J.A. Engineering Tribology. New York: Oxford University Press Inc.: 242; 1994.

### Рецензенты:

Адрианов А.Л., д.ф.-м.н., профессор кафедры «Летательные аппараты», Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск;

Меновщиков В.А., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой «Технология машиностроения», Красноярский государственный аграрный университет, г. Красноярск.