

УДК 550.832.6

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В СКВАЖИНЕ В АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

¹Михайлов П.Н., ²Михайлов А.П., ¹Кульсарина Н.А.

¹Стерлитамакский филиал ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет»,
Стерлитамак, e-mail: mihaylovpn@mail.ru, knel@rambler.ru;

²Московский физико-технический институт (государственный университет),
Долгопрудный, e-mail: a.p.mikhaylov@gmail.com

Работа посвящена исследованию температурных полей в действующих добывающих скважинах, математическая постановка для которых приводит к необходимости решения задач сопряжения для уравнений конвективной теплопроводности с источниками. Построить точное решение таких задач удается лишь в достаточно простых случаях. В работе на основе модифицированного асимптотического метода решение сводится к цепочке краевых задач для коэффициентов асимптотического разложения, которые в пространстве Лапласа – Карсона сводятся к последовательности обыкновенных дифференциальных уравнений. В отличие от предыдущих работ авторов, где оригиналы были построены лишь для малых и больших времен, здесь построение оригинала осуществлено численно, что позволило существенно уточнить описание температурного поля в скважине.

Ключевые слова: температурное поле, скважинная теплофизика, асимптотические методы, преобразование Лапласа – Карсона, численное обращение

TEMPERATURE FIELD IN THE WELL IN ASYMPTOTIC APPROACH

¹Mikhaylov P.N., ²Mikhaylov A.P., ¹Kulsarina N.A.

¹FSBEI HPE «Bashkir state university», Sterlitamak, e-mail: mihaylovpn@mail.ru, knel@rambler.ru;

²Moscow Institute of Physics and Technology (state university), Dolgoprudny,
e-mail: a.p.mikhaylov@gmail.com

The work is devoted to the study of temperature fields in existing producing wells, the mathematical formulation which leads to the necessity of solving the pair of equations of convective heat conduction with sources. To construct the exact solutions to such problems is possible only in rather simple cases. In this paper based on modified asymptotic method, the solution is reduced to the chain of boundary-value problems for the coefficients of the asymptotic expansion, which in the space of Laplace-Carson reduced to a sequence of ordinary differential equations. Unlike previous works of the authors, where the originals were built only for small and large times, in this work the construction of the originals is carried out numerically, which will significantly clarify the description of the temperature field in the borehole.

Keywords: temperature field, borehole thermal physics, asymptotic methods, Laplace-Carson's transformation, numerical treatment

Исследование температурных полей при течении жидкости и газа по трубам является актуальной задачей для транспорта теплоносителей по трубопроводам и продуктопроводам и имеет большое значение для прогноза температуры в стволах нефтяных скважин. С одной стороны, расчеты температурных полей в скважинах необходимы для определения возможности отложения парафина на стенках скважины; с другой стороны, это задача термокаротажа, которая широко используется на практике для исследования скважин и пластов, поэтому изучение температурных полей в скважине давно интересует исследователей. Нестационарные температурные поля в стволах скважины и окружающей среде оказывают взаимное влияние друг на друга. Естественным граничным условием, определяющими это взаимодействие, является равенство температуры и тепловых потоков

на стенке труб. Задачу в такой постановке называют сопряженной [7]. Э.Б. Чекалюк предложил интегральный метод для учета теплообмена потока с окружающими породами, где тепловой поток задавался в виде свертки. В рамках этого же подхода выполнены исследования А.Н. Саламатина [2]. К обсуждаемой проблеме обращались и другие исследователи [3, 10], рассматривающие задачу только для средней температуры в скважине. Между тем использование термических исследований в практике разработки нефтегазовых месторождений привело к необходимости расчета радиальных зависимостей температуры. Попытка построения теории таких тепловых процессов в скважине на основе асимптотических методов [9] предпринята в [6], где удалось построить решение задачи о температурном поле в скважине в пространстве Лапласа – Карсона, оригинал которых построен

только для малых и больших времен. В данной работе для инверсии преобразований использован численный метод [8], который позволяет строить оригинал для любого времени.

Физическая постановка задачи

Предполагается, что окружающая среда является однородной и анизотропной, температура отдаленных участков пород изменяется по линейному закону с глубиной, рассматривается область глубин, куда не проникают сезонные колебания температуры на поверхности земли. Задача о температурном поле в трубе имеет осевую симметрию, поэтому выбрана цилиндрическая система координат. Из условия симметрии следует, что производная по радиальной координате на оси z_d цилиндрической системы координат, направленной вверх, в центре скважины обращается в ноль. На рисунке представлена геометрия задачи о температурном поле жидкости, текущей в трубе радиуса r_0 .

Цилиндрическая система координат ориентирована таким образом, что ось z_d направлена по оси трубы. Труба окружена анизотропным массивом с теплопроводностями λ_{r1} и λ_{z1} в соответствии с направлениями осей. Поле скоростей жидкости в трубе имеет только одну отличную от нуля составляющую – в направлении оси z_d $\vec{v} = (0, 0, v)$. Жидкость вследствие своего движения также приобретает фиктивные анизотропные свойства, связанные с воздействием турбулентности (λ_r и λ_z – соответствующие осям теплопроводности жидкости).

Математическая постановка задачи

Система безразмерных уравнений в предположении осевой симметрии вклю-

чает уравнение теплопроводности в окружающем скважину массиве:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, t > 0, z > 0, \quad (1)$$

уравнение конвективной теплопроводности флюида (в общем случае – многофазного) с источниками в скважине:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \text{Pev} \left(\frac{\partial T}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) - Q(z, t) = 0, \quad r < 1, t > 0, z > 0. \quad (2)$$

На границе скважины и окружающего массива задаются условия равенства температур

$$T|_{r=1} = T_1|_{r=1} \quad (3)$$

и тепловых потоков

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} = \Lambda \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=1}. \quad (4)$$

Начальные условия соответствуют естественной, невозмущенной

$$T|_{t=0} = T_1|_{t=0} = 0, \quad (5)$$

которая совпадает с температурой в удаленных от стенки скважины точках окружающего массива

$$T_1|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (6)$$

В точке $z = 0$ температура изменяется по заданному закону

$$T|_{z=0} = T_0(t). \quad (7)$$

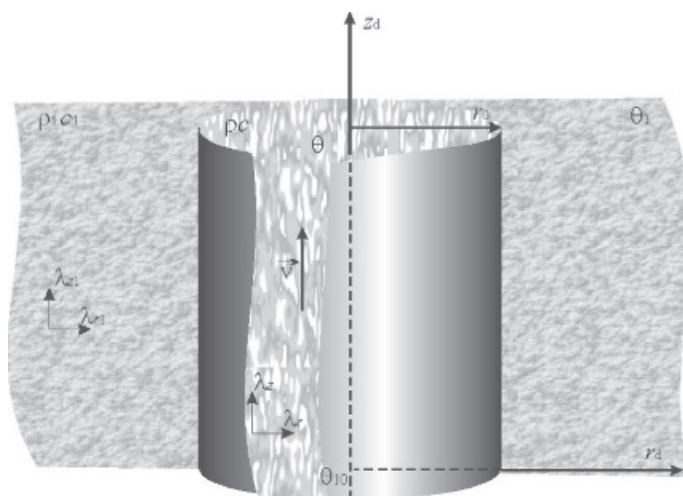


Рис. 1. Геометрия задачи

В уравнении (2) $Pe = \nu r_0 / a_{1r}$ – конвективный параметр,

$$Q(z, t) = r_0 q_0 / (c\rho\Gamma a_{1r}),$$

$$r = r_d / r_0; \quad z = z_d / D; \quad t = \tau a_{1r} / r_0^2;$$

$$T_1 = (\theta_1 - \theta_{01} + \Gamma z_d) / \theta_0; \quad \theta_0 = \Gamma D;$$

$$\chi = c_1 \rho_1 / c\rho; \quad \nu = r_0 / D;$$

$$T = (\theta - \theta_{01} + \Gamma z_d) / \theta_0;$$

$$\Lambda = \lambda_{1r} / \lambda_r; \quad H = \eta \rho \chi / g \Gamma.$$

В такой постановке построить точное решение задачи достаточно трудно. Для получения приближенных решений использован асимптотический метод [5, 6, 9].

В задаче (1)–(7) формальной заменой Λ на $\varepsilon \cdot \Lambda$ введен произвольный параметр ε асимптотического разложения. Решение задачи ищется в виде ряда

$$T_j = T_j^{(0)} + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i T_j^{(i)}, \quad (8)$$

где j – пробел или 1 – номер области; i – порядковый номер приближения.

Подставив (8) в задачу (1)–(7), выделяются задачи для коэффициентов ряда. Показано, что нулевое приближение позволяет получить новые способы расчета средней по сечению температуры.

Решение уравнения для нулевого коэффициента в пространстве Лапласа – Карсона имеет вид

$$T^{(0)u} = T_0^u(p) e^{-\alpha z} + \int_0^z \frac{Pe\nu(1-H) + Q^u(z, p)}{Pe\nu} e^{-\alpha(z-\xi)} d\xi, \quad r < 1, z > 0, \quad (9)$$

где

$$\alpha = \frac{p}{Pe\nu} + \frac{2\chi}{Pe\nu} k \sqrt{p}; \quad k = k(p) = \frac{K_1(\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})}.$$

Задача для первых коэффициентов асимптотического ряда представится следующим образом:

$$\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, t > 0, z > 0; \quad (10)$$

$$\frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \right) = \frac{\partial T^{(1)}}{\partial t} + Pe\nu \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z}, \quad r < 1, t > 0, z > 0; \quad (11)$$

$$T^{(1)}|_{r=1} = T_1^{(1)}|_{r=1}; \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \right|_{r=1} = \Lambda \left. \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=1}; \quad (13)$$

$$T^{(1)}|_{t=0} = T_1^{(1)}|_{t=0} = 0; \quad (14)$$

$$T_1^{(1)}|_{r \rightarrow \infty} = 0; \quad (15)$$

$$T^{(1)}|_{z=0} = 0. \quad (16)$$

Во-первых, в уравнениях коэффициенты асимптотического ряда взаимосвязаны, поэтому нужна специальная процедура их разделения; во-вторых, задача с указанными начальными и граничными условиями имеет лишь тривиальное решение, что приводит к необходимости замены граничных условий. Указанные процедуры подробно описаны в [10].

Искомое решение для первого коэффициента асимптотического решения примет вид

$$T^{(0)u} = -\frac{\Lambda r^2}{2} \sqrt{pk} T^{(0)u} + \frac{\Lambda}{4} \sqrt{pk} T_0^u(p) e^{-\alpha z} + \frac{\Lambda}{Pe\nu} \int_0^z e^{-\alpha(z-\xi)} \left[\frac{\chi pk^2}{2} T^{(0)u} - \frac{1-H + \sqrt{pk} Q^u(\xi, p)}{4} \right] d\xi, \quad T_1^{(0)u} = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} T^{(0)u}|_{r=1}. \quad (17)$$

Из приведенных решений видно, что нулевое приближение определяет средние значения температуры в скважине, а радиальные зависимости описываются первым приближением.

Как известно, оригиналы функций строятся либо непосредственным интегрированием в комплексной плоскости, либо с помощью различных специальных справочников, например, таких как [1]. Существует достаточно много классов задач, в которых применение метода интегральных преобразований ограничено возможностью построения функции по ее изображению. Рассматриваемая задача является именно такой. Это привело к ограничению исследований и рассмотрению лишь крайних случаев для «больших» ($t \rightarrow \infty$) и «малых» ($t \rightarrow 0$) времен [6, 4] и породило новую проблему: в каком диапазоне времени можно пользоваться решением, полученным для малых, в каком – для больших времен? Многие исследователи связывают решение указанных выше проблем с численными методами.

Численное обращение обратного преобразования Лапласа и Лапласа – Карсона изучается довольно давно. В [8] определена точность численного обращения некоторых функций с помощью различных алгоритмов и показано, что метод с использованием гауссовских квадратур может инвертировать лапласовские преобразования функций с неоднородностями и особенностями, и результаты имеют более высокую точность, чем в случае применения других методов. Поэтому в работе для численной инверсии преобразования Лапласа – Карсона (9), (17) использован метод, основанный на гауссовских квадратурах.

Результаты расчетов

На рис. 2, 3 представлены графики зависимости температуры в скважине от времени, по формулам, полученным из (9) для малых и больших времен, а также при численной инверсии в нулевом приближении для случая постоянных градиентов (рис. 2) и первом приближении для основной задачи термокаротажа (рис. 3).

Расчеты проведены при следующих значениях параметров: глубина скважины $D = 2000$ м; радиус скважины $r_0 = 0,1$ м; естественный градиент температуры Земли $\Gamma = 0,02$ К/м; удельные теплоемкости, плотности, коэффициенты теплопроводности окружающих скважину пород и нефти соответственно:

$$c_1 = 950 \text{ Дж}/(\text{К}\cdot\text{кг}), c = 2000 \text{ Дж}/(\text{К}\cdot\text{кг});$$

$$\rho_1 = 2000 \text{ кг}/\text{м}^3; \rho = 800 \text{ кг}/\text{м}^3;$$

$$\lambda_{1,r} = 0,67 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К}); \lambda = 0,15 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К});$$

$$z = 0,1; r = 0,1.$$

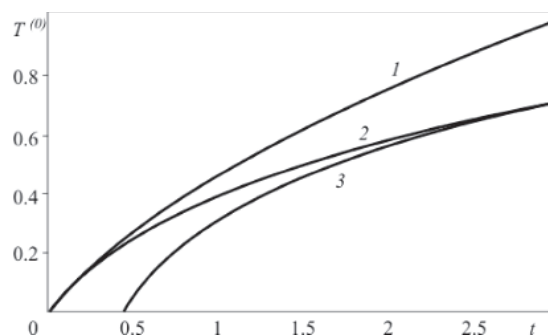


Рис. 2. Зависимость температуры в скважине от времени в нулевом приближении в случае постоянных вертикальных градиентов внутри скважины:
1 – построена по формуле, полученной для малых времен;
2 – используя численное обращение;
3 – для больших времен

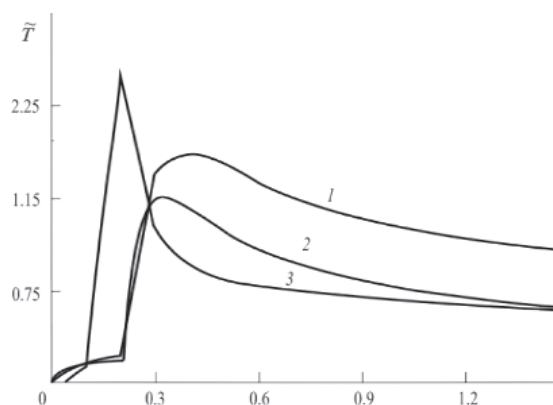


Рис. 3. Зависимость относительной температуры от времени:
1 – по аналитической формуле, после численного обращения;
2 – для малых времен;
3 – для больших времен

Сравнение графиков позволяет заключить, что малым временам соответствует $0 < t < 0,2$, а большим $t > 2$ (t – безразмерное время, $t = 1$ соответствует 24,35 мин); в отличие от предыдущих работ, результаты численного обращения позволяют определить значение температуры в любой момент времени. Заметим также, что при $0,2 < t < 2$ применение в расчетах формул для малых или больших времен приводит к ошибкам и относительная погрешность составляет 25%.

С применением численного обращения преобразований Лапласа – Карсона построены зависимости температуры от расстояния до оси скважины, как в скважине, так и окружающем массиве (рис. 4). Перепад температуры между центром и стенкой скважины составляет около 15%, что может служить основой технологии радиального каротажа скважины.

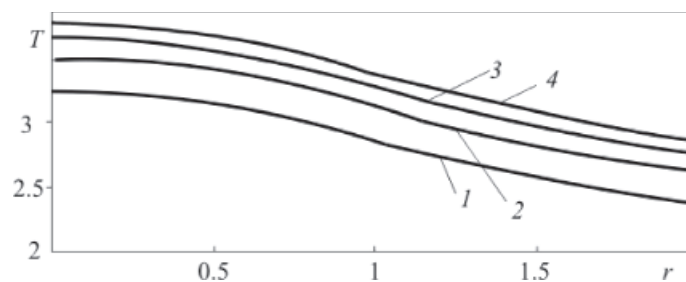


Рис. 4. Радиальные профили первого приближения температуры для нефти при различных временах:
1 при $t = 1$, 2 – $t = 2$, 3 – $t = 3$, 4 – $t = 4$

Список обозначений

Латинские:

a_{1r} – коэффициент температуропроводности окружающей среды в радиальном направлении, $\text{м}^2/\text{с}$;

c, c_1 – удельная теплоемкость флюида и окружающей среды соответственно, $\text{Дж}/(\text{К}\cdot\text{кг})$;

D – глубина скважины, м ;

g – ускорение свободного падения, $\text{м}/\text{с}^2$;

H – толщина пласта, м ;

k – отношение функций Бесселя $K_1(\rho)$ и $K_0(\rho)$;

ρ – параметр преобразования Лапласа – Карсона;

Re – аналог параметра Пекле;

q – плотность источников тепла, $\text{Вт}/\text{м}^3$;

r_d, r – соответственно размерная и безразмерная радиальная координата цилиндрической системы координат, м ;

r_0 – внутренний радиус трубы, м ;

t – безразмерное время, с ;

T, T_1 – безразмерное температурное поле флюида и окружающей среды соответственно;

T_0 – безразмерный температурный сигнал пласта;

\tilde{T} – безразмерный радиальный профиль температуры внутри скважины;

v_0 – средняя по сечению трубы скорость, $\text{м}/\text{с}$;

z_d, z_0 – соответственно размерная и безразмерная вертикальная координата цилиндрической системы координат, м .

Греческие:

Γ – геотермический градиент Земли, $\text{К}/\text{м}$;

ε – параметр асимптотического разложения;

η – адиабатический коэффициент, $\text{К}/\text{Па}$;

θ, θ_1 – температурное поле флюида и окружающей среды соответственно, К ;

θ_0 – температурный сигнал пласта, К ;

θ_{01} – естественная невозмущенная температура Земли в точке $z_d = 0$, К ;

$\tilde{\theta}$ – радиальный профиль температуры внутри скважины, К ;

λ, λ_1 – коэффициент теплопроводности флюида и окружающей среды соответственно, $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$;

λ_r, λ_z – коэффициент теплопроводности флюида в радиальном и вертикальном направлении соответственно, $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$;

$\lambda_{1r}, \lambda_{1z}$ – коэффициент теплопроводности окружающей среды в радиальном и вертикальном направлении соответственно, $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$;

Λ – отношение теплопроводностей в радиальном направлении окружающей среды и флюида;

ν – отношение радиуса трубы к глубине скважины;

ξ – переменная интегрирования;

ρ, ρ_1 – плотность флюида и окружающей среды соответственно, $\text{кг}/\text{м}^3$;

τ – размерное время, с ;

χ – отношение объемных теплоемкостей окружающей среды и флюида.

Список литературы

1. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: ВИНТИ, 1966. – 524 с.
2. Пудовкин М.А., Саламатин А.Н., Чугунов В.А. Температурные процессы в действующей скважине. – Казань: КГУ, 1977. – 166 с.
3. Филиппов А.И. К теории теплообмена потока жидкости в скважине при компрессорном испытании освоения и опробования // Изв. вузов. Сер. Нефть и газ. – 1986. – № 12. – С. 60–68.

4. Филиппов А.И., Михайлов П.Н. Асимптотические методы в скважинной теплофизике. – Уфа: Гилем, Башкирская энциклопедия, 2013. – 384 с.

5. Филиппов А.И., Михайлов П.Н., Ахметова О.В. Основная задача термокаротажа // Теплофизика высоких температур. – 2006. – Т. 44, № 5. – С. 747–755.

6. Филиппов А.И., Михайлов П.Н., Ахметова О.В. Температурное поле в действующей скважине // Сибирск. журн. индустриальной математики. – 2004. – Т. VII, № 1(17). – С. 135–143.

7. Чекалюк Э.Б. Термодинамика нефтяного пласта. в М.: Недра, 1965. – 167 с.

8. Den Iseger P. Numerical transform inversion using Gaussian quadrature // Probability in the Engineering and Informational Sciences. – 2006. – № 20. – P. 1–44.

9. Mikhaylov P.N., Filippov A.I., Mikhaylov A.P. Filtration of Radioactive Solutions in Jointly Layers // Mass Transfer – Advances in Sustainable Energy and Environment Oriented Numerical Modeling / Edited Hironori Nakajima. – Croatia: In Tech, 2013. – P. 219–263.

10. Murhy H.D. Enhanced Interpretation of Temperature Surveys Taken During Injection or Production // J. Petrol. Technol. – 1982. – V ol. 34, № 6. – P. 1314–1319.

References

1. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. Integralnye preobrazovaniya i operacionnoe ischislenie. M.: VINITI, 1966. 524 p.

2. Pudovkin M.A., Salamatin A.N., Chugunov V.A. Temperaturnye processy v deystvujushhej skvazhine. Kazan: KGU, 1977. 166 p.

3. Filippov A.I. K teorii teploobmena potoka zhidkosti v skvazhine pri kompressornom ispytanii osvoeniya i oprobovanija // Izv. vuzov. Ser. Neft i gaz. 1986. no. 12. pp. 60–68.

4. Filippov A.I., Mihajlov P.N. Asimptoticheskie metody v skvazhinnoj teplofizike. Ufa: Gilem, Bashkirskaja jenciklopedija, 2013. 384 p.

5. Filippov A.I., Mihajlov P.N., Ahmetova O.V. Osnovnaja zadacha termokarotazha // Teplofizika vysokih temperatur. 2006. T. 44, no. 5. pp. 747–755.

6. Filippov A.I., Mihajlov P.N., Ahmetova O.V. Temperaturnoe pole v deystvujushhej skvazhine // Sibirsk. zhurn. industrialnoj matematiki. 2004. T. VII, no. 1(17). pp. 135–143.

7. Chekaljuk Je.B. Termodinamika neftjanogo plasta. v M.: Nedra, 1965. 167 p.

8. Den Iseger P. Numerical transform inversion using Gaussian quadrature // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 2006. no. 20. pp. 1–44.

9. Mikhaylov P.N., Filippov A.I., Mikhaylov A.P. Filtration of Radioactive Solutions in Jointly Layers // Mass Transfer Advances in Sustainable Energy and Environment Oriented Numerical Modeling / Edited Hironori Nakajima. Croatia: In Tech, 2013. pp. 219–263.

10. Murhy H.D. Enhanced Interpretation of Temperature Surveys Taken During Injection or Production // J. Petrol. Technol. 1982. V ol. 34, no. 6. pp. 1314–1319.

Рецензенты:

Шулаев Н.С., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой информатики, математики и физики, филиал, ФГБОУ ВПО УГНТУ, г. Стерлитамак;

Гималтдинов И.К., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой прикладной информатики и программирования, Стерлитамакский филиал ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет», г. Стерлитамак.