УДК 536.2: 532.546

КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В ТОНКОМ ПРОНИЦАЕМОМ АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ В НУЛЕВОМ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Филиппов А.И., Зеленова М.А.

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, e-mail: marina_ag@inbox.ru

На примере задачи о температурном поле в тонком слое с источником рассмотрено квазистационарное приближение задачи о распространении тепла в однородном анизотропном пласте, состоящем из тонкого теплопроводящего слоя, окруженного анизотропной средой. При постановке задачи принята трансляционная симметрия в фиксированном горизонтальном направлении. На границах раздела сред заданы равенства температур и тепловых потоков. На основе модификации «в среднем точного» асимптотического метода найдены аналитические формулы для нулевого асимптотического приближения температурных полей в нефтегазовых пластах, возникающих при тепловом воздействии. Показано, что температура тонкого слоя в нулевом приближении не зависит от вертикальной координаты и описывает асимптотически осредненные по толщине слоя значения температуры.

Ключевые слова: температурное поле, нефтеносный пласт, асимптотический метод

QUASISTATIONARY TEMPERATURE FIELD IN A THIN PERMEABLE ANISOTROPIC LAYER IS IN THE ZERO APPROXIMATION

Filippov A.I., Zelenova M.A.

Sterlitamak branch of Bashkir State University, Sterlitamak, e-mail: marina_ag@inbox.ru

For example, the problem of the temperature field in a thin layer to the source is considered steady-state approximation for the propagation of heat in a homogeneous anisotropic formation, consisting of a thin layer of thermally conductive, surrounded by an anisotropic medium. When setting objectives adopted by the translational symmetry in a fixed horizontal direction. At the interface is given by the temperature and heat flux. On the basis of the modification «in the exact middle» of the asymptotic method Analytical formulas for the asymptotic approximation of the zero temperature fields in the oil and gas reservoirs, arising from exposure to heat. It is shown that the temperature of the thin layer order approximation is independent of the vertical coordinates and describes asymptotically averaged over the thickness of the layer temperature.

Keywords: temperature field, oil reservoir, asymptotic method

Изучение природы температурных процессов в нефтяном пласте и построение аналитических зависимостей между доступными для прямых измерений величинами позволяет определить расчетными способами важнейшие физические параметры залежи и определить оптимальные режимы теплового воздействия. Аналитические решения задач обладают особой ценностью [8, 9], поскольку позволяют исследовать взаимосвязь полей и определяющих физических параметров в максимально широком диапазоне их изменения. Получение простых аналитических зависимостей представляет ценность как для инженерных расчетов [4], так и для качественной проверки (тестирования) более сложных моделей, особенно основанных на использовании конечно-разностных методов.

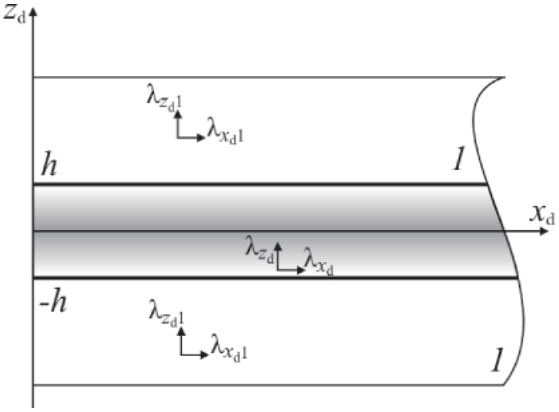
Применение квазистационарных моделей позволяет существенно расширить круг задач, обладающих аналитическими решениями, и поэтому они широко используется в теплофизике [16, 7], гидродинамике [3, 6], электродинамике [1] и других разделах науки.

В данной статье для исследования квазистационарного температурного поля в тонком слое, окруженном анизотропной средой, использован развитый авторами асимптотический метод решения задач сопряжения [10, 11].

Рассмотрим распределение температурного поля в пласте (θ, θ_1 – температурное поле флюида и окружающей среды соответственно), представленном тремя областями с плоскими границами раздела $z_d = \pm h$. Центральный слой с теплопроводностью $\left(\lambda_{x_d}, \lambda_{z_d}\right)$ толщиной $2h$ является хорошо проницаемым и в горизонтальном и в вертикальном направлениях. Полагаем, что окружающие породы являются сильно анизотропными, и в них преобладает вертикальная теплопроводность $\left(\lambda_{z_d 1}\right)$ в сравнении с горизонтальной $\left(\lambda_{x_d 1}\right)$ настолько, что можно пренебречь членами со второй производной по горизонтальным координатам в уравнениях для окружающей среды [17, 12]. Предположим также, что свойства покрыва-

ющих и подстилающих пород идентичны. На границе $x_d = 0$ находится источник тепла с заданной температурой $\theta_{01} - \Gamma z_d$, где θ_{01} – естественная невозмущенная температура Земли на границе $z_d = 0$, Γ – геотермический градиент флюида.

На рисунке представлена геометрия задачи в прямоугольной системе координат, ось z_d которой перпендикулярна к границам раздела сред. Задача обладает трансляционной симметрией в горизонтальном направлении (по оси y_d). Средний слой считается тонким, и в его пределах установление температуры происходит за короткий промежуток времени, вследствие чего частной производной по времени по сравнению со вторыми производными по пространственным переменным можно пренебречь $\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$. Однако время входит в полученное таким образом стационарное уравнение в виде параметра (квазистационарное приближение).



Геометрия задачи

Запишем постановку задачи в размерном виде [2]

$$c_1\rho_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} - \lambda_{z_d 1} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z_d^{\,2}} = 0, \quad |z_d| > h, \ t > 0; \quad (1)$$

$$\lambda_{x_d} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_d^{\,2}} + \lambda_{z_d} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_d^{\,2}} = 0, |z_d| < h, \ |x_d| > 0; \quad (2)$$

$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial z_d}\right|_{z_d = 0} = -\Gamma; \quad (3)$$

$$\theta_1\big|_{t=0} = \theta_0 - \Gamma h - \Gamma_1 (z_d - h);$$

$$\theta\big|_{x_d = 0} = \theta_{01} - \Gamma z_d; \quad (4)$$

$$\theta_1\big|_{z_d = h} = \theta\big|_{z_d = h}; \ \lambda_{z_d 1} \left.\frac{\partial \theta_1}{\partial z_d}\right|_{z_d = h} = \lambda_{z_d} \left.\frac{\partial T}{\partial z_d}\right|_{z_d = h}. \quad (5)$$

С использованием соотношений

$$\mathrm{Fo} = t a_{z1}/h^2; \ \ z = z_d/h; \ \ x = x_d/h;$$

$$\gamma = \lambda_{z_d}/\lambda_{x_d}; \ \ \Lambda = \lambda_{z_d 1}/\lambda_{z_d}; \ \ T_0 = \frac{\theta_{01} - \theta_0}{\theta_{11}};$$

$$T_1 = \frac{\theta_1 - \theta_0 + \Gamma h + \Gamma_1 (z_d - h)}{\theta_{11}};$$

$$T = \frac{\theta - \theta_0 + \Gamma z_d}{\theta_{11}} \quad (6)$$

задача (1)–(5) приведена к безразмерному виду. В дальнейшем для простоты положим все коэффициенты в уравнениях равными единице ($\gamma = 1$, $\Lambda = 1$). Для использования асимптотических методов в задаче добавлен параметр асимптотического разложения путем умножения на $1/\varepsilon$ первой и второй производных по z как в уравнениях, так и в граничных условиях.

Математическая постановка параметризованной температурной задачи в таких предположениях имеет вид

$$\frac{\partial T_1}{\partial \mathrm{Fo}} - \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = 0, \ \ |z| > 1, \ \mathrm{Fo} > 0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \ \ |z| < 1; \ \ |x| > 0; \quad (8)$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0} = 0; \quad (9)$$

$$T_1\big|_{\mathrm{Fo}=0} = 0; \ \ T\big|_{x=0} = T_0; \quad (10)$$

$$T_1\big|_{z=1} = T\big|_{z=1}; \ \ \left.\frac{\partial T_1}{\partial z}\right|_{z=1} = \frac{1}{\varepsilon} \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=1}. \quad (11)$$

Предполагается, что решение является регулярным на бесконечности, т.е. при устремлении пространственных координат в бесконечность искомое решение, а при необходимости и его производная, обращается в нуль. Отметим, что решение исходной задачи может быть получено из решения параметризованной задачи при $\varepsilon = 1$.

Решение представляется функцией температуры T каждой из областей в виде асимптотической формулы по параметру ε [15, 18]

$$T = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \ldots + \varepsilon^n T^{(n)} + \Theta^{(n)};$$

$$T_1 = T_1^{(0)} + \varepsilon T_1^{(1)} + \ldots + \varepsilon^n T_1^{(n)} + \Theta_1^{(n)}. \quad (12)$$

Подставив выражения (12) в (7)–(11) и сгруппировав слагаемые по степеням параметра разложения ε, получим

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial \mathrm{Fo}} - \frac{\partial^2 T_1^{(0)}}{\partial z^2} + \varepsilon \left(\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \mathrm{Fo}} - \frac{\partial^2 T_1^{(1)}}{\partial z^2} \right) + \ldots = 0,$$

$$\mathrm{Fo}>0,\quad |z|>1; \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial z^2}+\varepsilon\left(\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial z^2}\right)+ \tag{14}$$

$$+\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial z^2}\right)+\ldots=0,\quad |x|>0,\ |z|<1;$$

$$\left.\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z}\right|_{z=0}+\varepsilon\left(\left.\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z}\right|_{z=0}\right)+\ldots=0; \tag{15}$$

$$\left.T_1^{(0)}\right|_{\mathrm{Fo}=0}+\varepsilon\left(\left.T_1^{(1)}\right|_{\mathrm{Fo}=0}\right)+\ldots=0;$$

$$\left.T^{(0)}\right|_{x=0}+\varepsilon\left(\left.T^{(1)}\right|_{x=0}\right)+\ldots=T_0; \tag{16}$$

$$\left.T^{(0)}\right|_{z=1}+\varepsilon\left(\left.T^{(1)}\right|_{z=1}\right)+\ldots=\left.T_1^{(0)}\right|_{z=1}+\varepsilon\left(\left.T_1^{(1)}\right|_{z=1}\right)+\ldots;$$

$$\left.\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z}\right|_{z=1}+\ldots=\varepsilon\left(\left.\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z}\right|_{z=1}-\left.\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z}\right|_{z=1}\right)+\ldots \tag{17}$$

Уравнение (14) содержит соседние коэффициенты разложения, т.е. является «зацепленным». «Расцепление» уравнения (14) осуществлено с использованием разработанной ранее процедуры [13, 14, 19]. Устремив ε к нулю в уравнении (14), получим $\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial z^2}=0$. Результат интегрирования, с учетом граничных условий (17), позволяет установить, что в нулевом приближении температура является функцией только от x и параметра Fo $T^{(0)}=T^{(0)}(x, \mathrm{Fo})$. Следовательно, в нулевом приближении температура одинакова в каждой точке любого сечения, параллельного оси z.

Поскольку $\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial z^2}=0$, то, поделив (14) на ε и устремив его к нулю, получим

$$\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial z^2}=0. \tag{18}$$

Так как $T^{(0)}(x, \mathrm{Fo})$ не зависит от переменной z, вспомогательная функция $E(x, \mathrm{Fo})$, составленная из слагаемых уравнения (18), содержащих $T^{(0)}$, также не зависит от z. Тогда (18) можно представить как

$$\frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial z^2}=E(x,\mathrm{Fo})=-\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial x^2}. \tag{19}$$

Проинтегрировав (19) по переменной z, найдем выражение для первой производной от первого коэффициента $T^{(1)}$:

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z}=z\,E(x,\mathrm{Fo})+F(x,\mathrm{Fo}).$$

Из граничных условий (17) и (15) при сомножителе ε в первой степени имеем соответственно

$$\left.\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z}\right|_{z=1}=E(x,\mathrm{Fo})+F(x,\mathrm{Fo})=\left.\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z}\right|_{z=1};$$

$$\left.\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z}\right|_{z=0}=F(x,\mathrm{Fo})=0. \tag{20}$$

Из (20) и (19) найдем уравнение для определения нулевого приближения температурного поля в слое

$$\left.\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial x^2}+\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z}\right|_{z=1}=0,\quad |z|<1. \tag{21}$$

Окончательная постановка задачи в нулевом приближении включает также уравнение в окружающей породе

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial \mathrm{Fo}}-\frac{\partial^2 T_1^{(0)}}{\partial z^2}=0,\ \mathrm{Fo}>0,\quad |z|>1, \tag{22}$$

а также соответствующие граничные и начальные условия

$$\left.T_1^{(0)}\right|_{\mathrm{Fo}=0}=0;\quad \left.T^{(0)}\right|_{x=0}=T_0; \tag{23}$$

$$T^{(0)}=\left.T_1^{(0)}\right|_{z=1}. \tag{24}$$

Выражения (21)–(24) представляют краевую задачу для нулевого коэффициента разложения $T^{(0)}$ или нулевого приближения.

Для решения задачи воспользуемся интегральным преобразованием Лапласа – Карсона по переменной Fo:

$$f(p)=p\int_0^\infty \exp(-p\mathrm{Fo})f(\mathrm{Fo})d\mathrm{Fo}.$$

Математическая постановка искомой задачи в нулевом приближении (21)–(24) в пространстве изображений Лапласа – Карсона по переменной Fo запишется как

$$pT_1^{(0)u}-\frac{\partial^2 T_1^{(0)u}}{\partial z^2}=0,\quad |z|>1; \tag{25}$$

$$\left.\frac{\partial^2 T^{(0)u}}{\partial x^2}+\frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial z}\right|_{z=1}=0,\quad |x|>0,\quad |z|<1; \tag{26}$$

$$T^{(0)u}=\left.T_1^{(0)u}\right|_{z=1};\quad \left.T^{(0)u}\right|_{x=0}=T_0. \tag{27}$$

Из уравнения (25) с учетом граничного условия (27) и ограниченности на бесконечности получим выражения для $T_1^{(0)u}$ и его производной при $z=1$

$$T_1^{(0)u}=T^{(0)u}\exp\left(-\sqrt{p}\,(z-1)\right);$$

$$\left.\frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial z}\right|_{z=1}=-\sqrt{p}\,T^{(0)u}. \tag{28}$$

С учетом (28) из уравнения (26) получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения $T^{(0)\mu}$

$$\frac{\partial^2 T^{(0)\mu}}{\partial x^2} - \sqrt{p}T^{(0)\mu} = 0, \qquad (29)$$

откуда, используя условие ограниченности на бесконечности и условие (27), окончательно имеем следующие выражения для решения задачи в пространстве изображений Лапласа – Карсона:

$$T^{(0)\mu} = T_0 \exp\left(-\sqrt[4]{p}x\right);$$

$$T_1^{(0)\mu} = T_0 \exp\left(-\sqrt[4]{p}x - \sqrt{p}\left(z-1\right)\right). \qquad (30)$$

Применяя обратное преобразование Лапласа – Карсона, с использованием соотношений [5]

$$\exp\left(-\alpha\sqrt{p}\right) \to \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right);$$

$$f\left(\sqrt{p}\right) \to \frac{1}{\sqrt{\pi \mathrm{Fo}}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^2}{4\mathrm{Fo}}\right)\varphi(\tau)d\tau;$$

$$\exp\left(-ap\right)\exp\left(-\alpha\sqrt{p}\right) \to$$

$$\to \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\mathrm{Fo}-a}}\right)\Phi\left(\mathrm{Fo}-a\right) \qquad (31)$$

получим следующие выражения для точного решения задачи в нулевом приближении:

$$T^{(0)} = \frac{T_0}{\sqrt{\pi \mathrm{Fo}}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^2}{4\mathrm{Fo}}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right)d\tau;$$

$$T_1^{(0)} = \frac{T_0}{\sqrt{\pi \mathrm{Fo}}}\int_{z-1}^\infty \exp\left(-\frac{\tau^2}{4\mathrm{Fo}}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau\ -z+1}}\right)d\tau. \qquad (32)$$

В справедливости полученных выражений нетрудно убедиться прямой подстановкой выражений в указанную задачу. Как видно из (32), температура в слое не зависит от вертикальной координаты z и описывает асимптотически осредненные по толщине пласта значения температуры. Найденные выражения (32) определяют пространственно-временные зависимости асимптотически средней температуры пласта в квазистационарном приближении с учетом пространственной анизотропии и нестационарного теплообмена между слоями и могут быть широко использованы для практических расчетов.

Список литературы

1. Айдакина Н.А., Гущин М.Е., Зудин И.Ю., Коробков С., Костров А.В., Стриковский А.В. Квазистационарное магнитное поле, возбуждаемое в плазме радиоимпульсом свистового диа пазона частот // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2011. – Т. 93. – № 9. С. 555–560.

2. Ахметова О.В., Кабиров И.Ф., Филиппов А.И. Задача о квазистационарном температурном поле в анизотропном слое с источниками при наличии конвекции // Научно-технический вестник Поволжья. – 2011. – № 5. – С. 9–21.

3. Гордеев Ю.Н., Бабаева Д.О., Сандаков Е.Б. Точное квазистационарное решение задачи о гидравлическом разрыве проницаемого пласта // Прикладная механика и техническая физика. – 2013. – Т. 54. – № 6(322). – С. 87–94.

4. Горюнова М.А. Теоретическое исследование температурных полей в стволе действующей скважины: дис. ... канд. физ.-матем. наук. Башкирский гос. университет. – Стерлитамак, 2009.

5. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 466 с.

6. Егоров А.Г., Захарова О.С. Оптимальное квазистационарное движение виброробота в вязкой жидкости // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2012. – № 2. – С. 57–64.

7. Резник А.Н., Юрасова Н.В. Квазистационарное поле теплового излучения и ближнепольная радиотермометрия // Известия Российской академии наук. Серия физическая. – 2003. – Т. 67. – № 12. – С. 1770–1777.

8. Филиппов А.И., Михайлов П.Н., Ахметова О.В., Горюнова М.А. Построение «в среднем точного» асимптотического решения задачи о радиальном распределении температурного поля в скважине // Теплофизика высоких температур. – 2008. – Т. 46. – № 3. – С. 449–456.

9. Филиппов А.И., Михайлов П.Н., Ахметова О.В. Температурное поле в действующей скважине // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2004. – Т. VII. – № 1. – С. 135–144.

10. Филиппов А.И., Михайлов П.Н., Ахметова О.В., Горюнова М.А. Анализ температурного поля цилиндрического потока на основе «в среднем точного» решения // Прикладная механика и техническая физика. – 2010. – Т. 51. – № 3 (301). – С. 84–93.

11. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Родионов А.С., Горюнова М.А. Исследование температурных полей в трубах переменного радиуса // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2010. – Т. 6. – № 10. – С. 171–178.

12. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Кабиров И.Ф. Температурное поле источников тепла при закачке жидкости в анизотропный неоднородный пласт // Прикладная механика и техническая физика. – 2013. – Т. 54. – № 6 (322). – С. 95–111.

13. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Кабиров И.Ф. Задача о температурном поле в анизотропном слое с источниками при наличии конвекции. Инженерно-физический журнал. – 2012. – Т. 85. – № 4. – С. 738–752.

14. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Зеленова М.А., Крупинов А.Г. Исследование температурных полей потока газа в скважине // Инженерно – физический журнал. – 2011. – Т. 85. – № 5. – С. 1052–1064.

15. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Зеленова М.А., Крупинов А.Г Расчеты температурного поля в газовой скважине // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». – Уфа 2011. – № 6. – URL http // www.ogbus.ru / authors / FilippovAI / FilippovAI_1.pdf.

16. Филиппов К.А. Квазистационарное температурное поле в стволе действующей скважины // Инженерно – физический журнал. – 2004. – Т. 77. – № 6. – С. 13–19.

17. Filippov A.I., Akhmetova O.V., Zelenova M.A., Asylbaev M.A. Temperature field in inhomogeneous strongly anisotropic medium with sources // Journal of engineering thermophysics. – 2014. – Vol. 23, № 2. – P. 158–170.

18. Filippov A.I., Achmetova O.V., Zelenova M.A., Krupinov A.G.. Investigation of the temperature fields of a gas flow in a well // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2011. – Vol. 84, № 5. – P. 1132–1147

19. Filippov A.I., Achmetova O.V., Zelenova M.A., Rodionov A.S.. Thermologging problem with a given radial oil-velocity profile in the well shaft // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – January 2013. – Vol. 86, Issue 1. – P. 183–204.

References

1. Ajdakina N.A., Gushhin M.E., Zudin I.Ju., Korobkov S., Kostrov A.V., Strikovskij A.V. *Kvazistacionarnoe magnitnoe pole, vozbuzhdaemoe v plazme radioimpulsom svistovogo dia pazona chastot, Pisma v Zhurnal jeksperimentalnoj i teoreticheskoj fiziki*, 2011. vol. 93, no 9, pp. 555–560.

2. Ahmetova O.V., Kabirov I.F., Filippov A.I. *Zadacha o kvazistacionarnom temperaturnom pole v anizotropnom sloe s istochnikami pri nalichii konvekcii, Nauchno-tehnicheskij vestnik Povolzhja*, 2011. no. 5, pp. 9–21.

3. Gordeev Ju.N., Babaeva D.O., Sandakov E.B. *Tochnoe kvazistacionarnoe reshenie zadachi o gidravli-cheskom razryve pronicaemogo plasta, Prikladnaja mehanika i tehnicheskaja fizika*, 2013. vol. 54. no. 6(322), pp. 87–94.

4. Gorjunova M.A. *Teoreticheskoe issledovanie temperaturnyh polej v stvole dejstvujushhej skvazhi-ny: dissertacija na soiskanie uchenoj stepeni kandidata fiziko-matematicheskih nauk.* Bashkirskij gos. Universitet, Sterlitamak, 2009.

5. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Spravochnik po operacionnomu ischisleniju,* Moscow: Vysshaja shkola, 1965, 466 p.

6. Egorov A.G., Zaharova O.S. *Optimalnoe kvazistacionarnoe dvizhenie vibrorobota v vjazkoj zhidkosti, Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Matematika*, 2012, no. 2, pp. 57–64.

7. Reznik A.N., Jurasova N.V. *Kvazistacionarnoe pole teplovogo izluchenija i blizhnepolnaja radio-termometrija // Izvestija Rossijskoj akademii nauk. Serija fizicheskaja*, 2003. vol. 67, no 12, pp. 1770–1777.

8. Filippov A.I., Mihajlov P.N., Ahmetova O.V., Gorjunova M.A. *Postroenie «v srednem tochnogo» asimptoticheskogo reshenija zadachi o radialnom raspredelenii temperaturnogo polja v skvazhine, Teplo-fizika vysokih temperature*, 2008. vol. 46, no 3, pp. 449–456.

9. Filippov A.I., Mihajlov P.N., Ahmetova O.V. *Temperaturnoe pole v dejstvujushhej skvazhine, Sibirskij zhurnal industrialnoj matematiki,* 2004, vol. VII, no. 1, pp. 135–144.

10. Filippov A.I., Mihajlov P.N., Ahmetova O.V., Gorjunova M.A. Analiz temperaturnogo polja ci-lindricheskogo potoka na osnove «v srednem tochnogo» reshenija, Prikladnaja mehanika i tehnicheskaja fi-zika, 2010. vol. 51, no. 3 (301), pp. 84–93.

11. Filippov A.I., Ahmetova O.V., Rodionov A.S., Gorjunova M.A. *Issledovanie temperaturnyh po-lej v trubah peremennogo radiusa, Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*, 2010, vol. 6, no. 10, pp. 171–178.

12. Filippov A.I., Ahmetova O.V., Kabirov I.F. *Temperaturnoe pole istochnikov tepla pri zakachke zhidkosti v anizotropnyj neodnorodnyj plast, Prikladnaja mehanika i tehnicheskaja fizika*, 2013, vol. 54, no. 6 (322), pp. 95–111.

13. Filippov A.I., Ahmetova O.V., Kabirov I.F. *Zadacha o temperaturnom pole v anizotropnom sloe s istochnikami pri nalichii konvekcii. Inzhenerno-fizicheskij zhurnal*, 2012, vol. 85, no. 4, pp. 738–752.

14. Filippov A.I., Ahmetova O.V., Zelenova M.A., Krupinov A.G. *Issledovanie temperaturnyh polej potoka gaza v skvazhine, Inzhenerno – fizicheskij zhurnal*, 2011, vol. 85, no. 5, pp. 1052–1064.

15. Filippov A.I., Ahmetova O.V., Zelenova M.A., Krupinov A.G *Raschety temperaturnogo polja v ga-zovoj skvazhine, Jelektronnyj nauchnyj zhurnal «Neftegazovoe delo»*, Ufa 2011, no. 6. pp.–.URL http // www.ogbus.ru / authors / FilippovAI / FilippovAI_1.pdf.

16. Filippov K.A. *Kvazistacionarnoe temperaturnoe pole v stvole dejstvujushhej skvazhiny, Inzhenerno – fizicheskij zhurnal*, 2004, vol. 77, no. 6, pp. 13–19.

17. Filippov A.I., Akhmetova O.V., Zelenova M.A., Asylbaev M.A. *Temperature field in inhomogeneous strongly anisotropic medium with sources, Journal of engineering thermophysics,* 2014, vol. 23, no. 2, pp. 158–170.

18. Filippov A.I., Achmetova O.V., Zelenova M.A., Krupinov A.G.. *Investigation of the temperature fields of a gas flow in a well, Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2011, vol. 84, no. 5, pp. 1132–1147.

19. Filippov A.I., Achmetova O.V., Zelenova M.A., Rodionov A.S.. *Thermologging problem with a given ra-dial oil-velocity profile in the well shaft, Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, January 2013, vol. 86, no. 1, pp 183–204.

Рецензенты:

Мустафина С.А., д.ф.-м.н., профессор, декан физико-математического факультета, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак;

Михайлов П.Н., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой алгебры, геометрии и методики обучения математике, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак.