УДК 511.5

ОБЗОР МОДИФИКАЦИЙ МЕТОДА КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Абакумова С.И.

Институт сервиса, туризма и дизайна (филиал), ФГАОУ ВПО «Северо-Кавказский федеральный университет», Пятигорск, e-mail: svetaabaku@rambler.ru

Разыскание систем основных единиц произвольного алгебраического числового поля есть одна из важных и старых задач. Сами основные единицы используются при вычислении числа классов идеалов и решений многих частных типов и классов диофантовых уравнений. Цель. Сравнить конструкции Золотарева и Успенского, применяемые для разыскания основной единицы чисто кубического поля. Материалы и методы**.** Используются бинарные и тернарные квадратичные формы для разыскания основной единицы чисто кубического поля. Результаты**.** В результате сравнительного анализа выявлены достоинства и недостатки исследуемых конструкций. Найдены основные единицы конкретных чисто кубических полей. Выводы**.** Анализ метода квадратичных форм, представленный вариантами его модификаций, позволяет применять удобные конструкции для нахождения основных единиц конкретных чисто кубических полей.

Ключевые слова: основная единица, квадратичные формы, кубические поля

METHOD MODIFICATIONS' REVIEW OF THE SQUARE-LAW FORMS

Abakumova S.I.

Institute of Service, Tourism and Design (branch) North Caucasian Federal University, Pyatigorsk, e-mail: svetaabaku@rambler.ru

Introduction: Searching the systems of the basic units of the free algebraic numeric field is one of the most important and oldest problem. The basic units themselves are used at calculation of the classes ideal's number and decisions of many quotient types and classes diophantine equations. Purpose. To compare the constructions of Zolotarev and Uspenskiy applicable for searching the fundamental unit purely cubic field. Materials and methods. Binary and ternary square-law forms as well as bases of cubic fields are used for searching the basic unit purely cubic field. Results. The advantages and disadvantages of investigating constructions are identified as a result of benchmark analysis. It is found the basic units for concrete purely cubic fields with the help of these constructions. Conclusions. The analysis of the method of the square-law forms presented by variants of its modification allows to use the suitable constructions for finding the basic units of concrete purely cubic fields.

Keywords: basic unit, square-law forms, cubic fields

Впервые Эрмит ввел положительные формы вида

$$\left(x + y\varphi + z\psi\right)^2 + \left(x + y\varphi' + z\psi'\right)^2 + \frac{1}{\Delta}z^2, \quad (1)$$

где x, y, z – тройки возможных целых рациональных чисел; φ и ψ – кубические иррациональности; Δ – переменный параметр. Изменяя последовательно значения параметра Δ, можно получать системы (x, y, z), которые определяют минимумы квадратичных форм. Так как такая конструкция приводит к анализу выражений (форм), имеющих квадраты компонент элементов кубических полей, то естественно назвать ее методом квадратичных форм (МКФ).

Алгоритм (принцип) Эрмита представляет собой одну из разновидностей МКФ как совокупность действий, позволяющих находить последовательные минимумы квадратичных форм с переменным параметром.

Е.И. Золотарев использовал алгоритм Эрмита для разыскания основной единицы чисто кубического поля. Его идея основана на изучении последовательных минимумов некоторых положительных тернарных квадратичных форм с непрерывным параметром и последующем сведении этой задачи к аналогичной проблеме применительно к бинарным формам.

Предварительно Е.И. Золотарев [4] рассматривает задачу разыскания представлений последовательных минимумов для бинарной квадратичной формы

$$\left(y - ax\right)^2 + \frac{x^2}{\Delta}, \quad (2)$$

которая содержит непрерывный параметр Δ, являющийся инвариантом формы и принимающий различные значения от 1 до ∞. Эти представления (x', y') для Δ, $\Delta' \le \Delta \le \Delta''$, (x'', y'') для Δ, $\Delta'' \le \Delta \le \Delta'''$ связаны соотношениями:

1) x, y – возрастают;

2) $x'y'' - x''y' = \pm 1$; $x''y''' - x'''y'' = \pm 1$;

3) $\varphi' = \left(y' - ax'\right)^2 + \dfrac{x'^2}{\Delta'}$;

$$f' = \left(y' - ax'\right)^2 + \frac{x'^2}{\Delta''};$$

4) $\varphi' > \varphi'' > \varphi''' > \ldots$

1) $\varphi' \le \sqrt{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\Delta}}$; $\quad f' = \varphi'' \le \sqrt{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\Delta}}$;

$$f'' = \varphi''' \le \sqrt{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\Delta}};\ldots$$

2) первый минимум: $\Delta = 1$, $x' = 0$, $y' = 1$; второй минимум: $x'' = 1$, $y'' = m_0$,

где $$|m_0 - a| < \frac{1}{2},$$

для третьего минимума

$$\begin{cases} x''' = x' + m_1 x'', \\ y''' = y' + m_1 y'', \end{cases}$$

здесь m_1 таково, что $|y''' - ax'''| < y'' - ax''$ и т.д.

Далее Золотарев переходит к тернарной квадратичной форме

$$f = \left(y - ax\right)^2 + (z - bx)^2 + \frac{x^2}{\Delta}, \qquad (3)$$

и представления минимумов определяются тройками

(x', y', z') для Δ, $\Delta' \le \Delta \le \Delta''$;

(x'', y'', z'') для Δ, $\Delta'' \le \Delta \le \Delta'''$.

Анализ уравнений (2) и (3) позволяет Золотареву перейти к решению главной задачи – разысканию основной единицы чистого кубического поля $K\left(\sqrt[3]{m}\right)$.

Пусть $x + y\sqrt[3]{m} + z\sqrt[3]{m^2}$ – единица $K\left(\sqrt[3]{m}\right)$, тогда

$$\left(x + y\sqrt[3]{m} + z\sqrt[3]{m^2}\right)\cdot\left(x + \rho y\sqrt[3]{m} + \rho^2 z\sqrt[3]{m^2}\right)\times$$
$$\times\left(x + \rho^2 y\sqrt[3]{m} + \rho z\sqrt[3]{m^2}\right) = 1 \qquad (4),$$

где $\rho^3 = 1$.

Полагаем $\varphi = x + y\sqrt[3]{m} + z\sqrt[3]{m^2}$, а произведение двух последних скобок дает союзную форму $F(x, y, z)$, причем

$$2\psi = F\left(x, y, z\right) = x^2 - myz +$$
$$+ (mz^2 - xy)\sqrt[3]{m} + \left(y^2 - xz\right)\sqrt[3]{m^2}.$$

В соответствии с этим составим квадратичную форму

$$f = 2\psi + \frac{\varphi^2}{\Delta} \qquad (5)$$

с инвариантом $\frac{27m^2}{\Delta}$.

Как известно, при любом Δ найдется тройка (x, y, z) такая, что $f \le 3\sqrt[3]{\frac{2m^2}{\Delta}}$, откуда $\varphi\psi < \sqrt{2}\cdot m$.

Увеличиваем Δ и для каждого Δ найдем тройки (x', y', z') и (x'', y'', z''), дающие $\min f$, получим

$$\varphi' = x' + y'\sqrt[3]{m} + z'\sqrt[3]{m^2};$$
$$\varphi'' = x' + y''\sqrt[3]{m} + z''\sqrt[3]{m^2}$$

и соответственно $2\varphi'$ и $2\varphi''$.

Все произведения $\varphi\psi$ – целые числа, и в их ряду $\varphi'\psi'$, $\varphi''\psi''$… существует хоть одно число $T < \sqrt{\frac{27}{2}}\cdot m$, повторяющееся бесконечное число раз. Тем самым определятся две системы (α, β, γ) и $(\alpha', \beta', \gamma')$ такие, что

$$\begin{cases} F\left(\alpha, \beta, \gamma\right) = T, \\ F\left(\alpha', \beta', \gamma'\right) = T; \end{cases}$$

$$\alpha \equiv \alpha';\ \beta \equiv \beta';\ \gamma \equiv \gamma' \pmod T.$$

Далее полагаем

$$\alpha'^2 - m\beta'\gamma' = A'; \quad m'\gamma^2 - \alpha'\beta' = B';$$

$$\beta'^2 - \alpha'\gamma' = C',$$

$$\alpha^2 - m\beta\gamma = A; \quad m\gamma^2 - \alpha\beta = B; \quad \beta^2 - \alpha\gamma = C.$$

Пусть теперь

$$\begin{cases} A' + m\left(C' + B'\right) = \lambda, \\ B' + m\left(A' + C'\right) = \mu, \\ C' + B' + A' = \nu, \end{cases}$$

а подстановка $\lambda = uT$, $\mu = \upsilon T$, $\nu = wT$ приводит к уравнению

$$\left(u + \upsilon\sqrt[3]{m} + w\sqrt[3]{m^2}\right)\cdot\left\{u^2 - m\vartheta w + \left(mw^2 - u\vartheta^2\right)\sqrt[3]{m} + (\vartheta^2 - uw)\sqrt[3]{m^2}\right\} = 1.$$

Если $\alpha + \beta\sqrt[3]{m} + \gamma\sqrt[3]{m^2}$ – основная единица $K\left(\sqrt[3]{m}\right)$, то компоненты α_n, β_n, λ_n остальных всех единиц, как известно, выразятся по формулам

$$\alpha_n = \frac{1}{3}\left\{\left(+\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{m^2}\right)^n + \left(+\rho\sqrt[3]{m} + \rho^2\sqrt[3]{m^2}\right)^n + \left(+\rho^2\sqrt[3]{m} + \rho\sqrt[3]{m^2}\right)^n\right\};$$

$$\beta_n\sqrt[3]{m} = \frac{1}{3}\left\{\left(+\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{m^2}\right)^n + \rho\left(+\rho\sqrt[3]{m} + \rho^2\sqrt[3]{m^2}\right)^n + \rho^2\left(+\rho^2\sqrt[3]{m} + \rho\sqrt[3]{m^2}\right)^n\right\};$$

$$\gamma_n\sqrt[3]{m^2} = \frac{1}{3}\left\{\left(+\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{m^2}\right)^n + \rho^2\left(+\rho\sqrt[3]{m} + \rho^2\sqrt[3]{m^2}\right)^n + \rho\left(+\rho^2\sqrt[3]{m} + \rho\sqrt[3]{m^2}\right)^n\right\}.$$

Компоненты основной единицы составят тройку, находящуюся в ряду minima квадратичной формы (5) для различных значений параметра Δ. Действительно, если (x, y, z) – основная единица, то $x = \alpha^2 - m\beta\gamma$; $y = m\gamma^2 - \alpha\beta$; $z = \beta^2 - \alpha\gamma$ и (x, y, z) дает min формы $2\psi + \frac{2\varepsilon\varphi^2}{\left(\varepsilon^{-1}\right)^2}$, $\varepsilon > 1$.

В этих условиях ψ обращается в ε, φ – в ε^{-1}.

Последовательность min правой части (5) приведет к условиям

$$\varphi_0 = 1;\quad \psi_0 = 1;\quad \varphi_1 > \varphi_0;\quad \psi_1 < \psi_0;\quad \varphi_2 > \varphi_1;$$

$$\psi_2 < \psi_1 \ \text{ и } \varphi_{м+1}\cdot\varphi_м < \sqrt{\frac{27}{2}\cdot m}.$$

Введем периодически повторяющиеся величины

$$L_м = \varphi_м\cdot\psi_{м+1};\quad K_м = \varphi_{м+1}\cdot\psi_м;\quad H_м = \varphi_м\cdot\psi_м.$$

Имеет место очевидное соотношение

$$L_м\cdot K_м = H_м + H_{м+1},$$

и для компонент справедливы оценки

$$\begin{cases} \max(|P_\mu|, |P_\mu|) < \sqrt{\frac{27}{2}}\cdot m, \\ \max\left(|q_\mu|, |Q_\mu|\right) < \sqrt{\frac{27}{2}}\cdot\sqrt[3]{m^2}, \\ \max\left(|r_\mu|, |R_\mu|\right) < \sqrt{\frac{27}{2}}\cdot\sqrt[3]{m}. \end{cases}$$

Из уравнения

$$2\psi_м + \frac{\psi^2\cdot m}{\Delta_м} = 2\psi_{м+1} + \frac{\varphi_м^2 + 1}{\Delta_м}$$

определяем

$$\Delta_м = \frac{1}{2}\cdot\frac{\varphi_м}{\psi_м}\cdot\frac{K_м^2 - H_м^2}{H_м - \alpha_м}, \qquad (6)$$

и для всех комбинаций $(K_м, L_м)$ выбирают ту, для которой (6) минимально. Тогда если мы дойдем до $H_s = 1$, то $K_s > 1$, $L_s < 1$ и $\frac{K_s^2 - 1}{1 - L_s}$ даст минимум, далее получаем: $H_{s+1} = H_1$; $H_{s+2} = H_2$, …

Из этих рассуждений очевидно, что требование нахождения всех последовательных минимумов по принципу Эрмита влечет громоздкие и долгие расчеты. В настоящее время подобные и более сложные расчеты не представляют больших сложностей, так как они реализуются с использованием специальных компьютерных технологий.

Приведем пример нахождения основной единицы вручную.

Пример.

$$m = 11,\ \sqrt[3]{11} = 2{,}22398\ldots\ \sqrt[3]{11^2} = 4{,}94609\ldots$$

$$\underline{x}_0 = 1;\ y_0 = 0;\ z_0 = 0;\ \varphi_0 = 1;\ \psi_0 = 1.$$

Это даст

$$z_0 = 1;\ x_0 = 0;\ y_0 = 0;\ M_0 = 0;\ N_0 = -1;\ P_0 = 0,$$

$$\beta = 1;\ \ \alpha = 0;\ \ \gamma = 0;\ \ \beta_1 = 0;\ \ \gamma_1 = 1;\ \ \alpha_1 = 1.$$

Далее $x_0' = 0$; $y_0' = -1$; $z_0' = 2$.

Полагая

$$x_0' = y_0\gamma' - z_0\beta';\quad y_0' = z_0\alpha' - x_0\gamma';$$

$$z_0' = x_0\beta' - \alpha' y_0,$$

находим:

$$\alpha' = \alpha_1 + 2\alpha = 0;\ \beta' = \beta_1 + 2\beta = 2;$$

$$\gamma' = \gamma_1 + 2\gamma = 1.$$

Отсюда

$$x_1 = \alpha' + m_1\alpha = m_1;\quad y_1 = \beta' + m_1\beta = 2;$$

$$z_1 = \gamma' + m_1\gamma = 1,$$

т.е. $m_1 = 4$ или 5.

При $m_1 = 4$

$$\varphi_1 = 4 + 2\sqrt[3]{11} + \sqrt[3]{11^2};\quad \psi_1 = 3\left(\sqrt[3]{11} - 2\right).$$

Если же $m_1 = 5$, то

$$\varphi_1 = 5 + 2\sqrt[3]{11} + \sqrt[3]{11^2};\quad \psi_1 = 3 + \sqrt[3]{11} - \sqrt[3]{11^2}.$$

Но корень уравнения $f_1 = f_0$ для указанных значений m_1 будет меньше во 2 случае, и, таким образом, $x_1 = 5$; $y_1 = 2$; $z_1 = 1$.

Унимодулярные преобразования формы F_0 и союзной формы F по формулам

$$\left.\begin{aligned} x &= 5u + v, \\ y &= 2u + w, \\ z &= u \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \left\{\begin{aligned} x &= v, \\ y &= w, \\ z &= u - 5v - 2w \end{aligned}\right.$$

приведут к форме

$$\begin{pmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \end{pmatrix}$$

и союзной ей

$$\begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{A}' & \overline{A}'' \\ \overline{B} & \overline{B}' & \overline{B}'' \end{pmatrix},$$

где $A = A'$; $B'' = 0{,}719$; $B' \approx -2{,}11$; $\overline{A}'' = 0{,}24$; $\overline{A}' = 0{,}24$; $\overline{B} = 0{,}20$; $\overline{B}' = 0{,}19$.

Итак, тройка $(x, y, z) = (5; 2; 1)$ определяет минимум, смежный с f_0.

Продолжаем вычисления. Имеем $x_1 = 0$; $y_1 = 1$; $z_1 = -2$, откуда $M_1 = -1$; $N_1 = 0$; $P_1 = 5$.

Дальнейшее вычисление минимумов даёт

$$x_2 = 20;\ y_2 = 9;\ z_2 = 4;\ M_2 = 0;\ N_2 = 4;\ P_2 = -9;$$

$$x_2' = M_2 + m_2 x_2 = m_2;$$

$$y_2' = N_2 + m_2 y_2 = 4;$$

$$z_2' = P_2 + m_2 z_2 = -9 - 5m_2.$$

Легко находим: $m_2 = -2$ и компоненты $x_2' = -2$; $y_2' = 4$; $z_2' = 1$ определяют искомую основную единицу $\varepsilon = 1 + 4\sqrt[3]{11} - 2\sqrt[3]{11^2}$ чисто кубического поля $K\left(\sqrt[3]{11}\right)$.

Оставляя основную идею сведения, разработанную Золотаревым, Успенский [5] модифицировал всю конструкцию, распространив ее на кубические поля отрицательного дискриминанта. Такое видоизменение позволило упростить практические расчеты.

Суть его в следующем. Предварительно в кубическом поле $D_\lambda < 0$ показывается, что всегда можно выбрать нормальный базис вида $\{1, \alpha, \beta\}$, где α, β – целое рациональное число, причем на базисном элементе α достигается минимум некоторого выражения, а именно: выполняется неравенство

$$\left(\alpha' - \alpha''\right)^2 + 2\left(\alpha - \alpha'\right)\left(\alpha - \alpha''\right) \geq 3\left(-D_\lambda \cdot g^2\right)^{\frac{1}{3}};$$

$$\alpha = \ell + f\alpha + g\beta.$$

Составим аналогично (5) положительно определенные формы

$$f\left(x, y, z\right) = 2\Phi + \frac{\Phi^2}{\Delta};\quad \Phi = x + y\alpha + z\beta;$$

$$\Phi = \Phi' \cdot \Phi'',$$

где Δ – непрерывный положительный параметр, и союзную форму

$$F = -\left(\alpha'' - \alpha'\right)^2 w^2 + 2\left(\alpha - \alpha'\right) \cdot \left(\alpha - \alpha''\right) \cdot \frac{\Omega}{\Delta};$$

$$\Omega = w'w'';$$

$$\left(\alpha'' - \alpha'\right) \cdot w = z\left(\alpha'' - \alpha'\right) +$$

$$+ y\left(\beta'' - \beta'\right) + x \cdot \left(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'\right)$$

дискриминанта $\left(\dfrac{D_\lambda}{\Delta}\right)^2$.

В основе последующего вывода лежит утверждение: для всякого конкретного значения Δ существуют две триады (x, y, z) и (X, Y, Z), не содержащие общих множителей, и такие, что

1) $X \cdot x + Y \cdot y + Z \cdot z = 0$;

2) выполняются неравенства

$$f\left(x, y, z\right) < \frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{\left|D_\lambda\right|}{\Delta}};$$

$$F\left(X, Y, Z\right) < \frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{\left|D_\lambda\right|^2}{\Delta}}.$$

Очевидно, если Δ будет расти, то одна из триад должна быть заменена другой по специальным формулам. Это произойдет либо относительно первой триады (x, y, z) при $f\left(x, y, z\right) = \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{\dfrac{\left|D_\lambda\right|}{\Delta}}$, либо применительно ко 2-й триаде (X, Y, Z) при условии

$$F\left(X, Y, Z\right) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{D_\lambda}{\Delta}\right)^2}.$$

Указанное будет иметь место при

1) $\Delta_0 = F\left(\dfrac{\Phi_0}{\operatorname{Norm}\Phi_0}\right)^3$;

$$\Phi_0 = x_0 + y_0\alpha + z_0\beta;\quad \Gamma = \frac{8}{27} \cdot \left|D_\lambda\right| \cdot \left(\frac{K}{\tau_1}\right)^3;$$

$$K = \frac{1}{4} \cdot \operatorname{Norm}\Phi_0 \cdot \left(\frac{\left|D_\lambda\right|}{27}\right)^{\frac{-1}{2}},$$

где τ_1 – наименьший положительный корень уравнения

$$\tau^3 - \tau + K = 0; \tag{7}$$

2) $\Delta_1 = \Gamma'' w_0^{-3} = \Gamma' \cdot \left(\dfrac{\Omega_0}{\operatorname{Norm} w_0}\right)^3$;

$$\Gamma' = \frac{8}{\sqrt{27}} \cdot \left|D_\lambda\right| \cdot \left|\alpha'' - \alpha'\right|^{-3} \cdot \tau_2^{\ 3},$$

где τ_2 – наибольший положительный корень уравнения (7).

Начальному значению Δ соответствуют триады

$$\begin{Bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ X_0 & Y_0 & Z_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Пусть Δ растет. Определив Δ_0 и Δ_1, сравним их между собой.

Если $\Delta_0 < \Delta_1$, то триада (x_0, y_0, z_0) заменяется новой триадой. При $\Delta_0 > \Delta_1$ аналогичное преобразование выполняется для 2-й триады. Тем самым определяется бесконечная цепочка пар триад

$$\begin{Bmatrix} x_0,\ y_0,\ z_0 \\ X_0, Y_0, Z_0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} x_1,\ y_1, z_1 \\ X_1, Y_1, Z_1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} x_2,\ y_2,\ z_2 \\ X_2, Y_2, Z_3 \end{Bmatrix}, \ldots$$

и две серии соответствующих значений Φ и w:

$$\Phi_0 = 1, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots, w_0 = 1, w_1, w_2, w_3, \ldots$$

Пусть $\varepsilon > 1$ – прямая основная единица, ε^{-1} – обратная ей единица. Продолжив цепочку триад достаточно далеко, можно получить искомую единицу, а ею будет первая единица в одной из этих последовательностей.

Пример. Чисто кубическое поле $K\left(\sqrt[3]{19}\right)$ [2] имеет целый базис

$$1; \sqrt[3]{19}; \frac{1}{3}\left(1+\sqrt[3]{19}+\sqrt[3]{19^2}\right).$$

В качестве нормального базиса берем элементы

$$\alpha = -1+\sqrt[3]{19};$$

$$\beta = \frac{1}{3}\left(1+\sqrt[3]{19}+\sqrt[3]{19^2}\right).$$

Для него имеем

$$f = -3;\ g = 3;\ k = 2;\ \ell = -1;$$

$$\alpha \approx 1{,}668;\ \beta = 3{,}596$$

и

$$\alpha^2 = -3-3\alpha+3\beta;$$

$$\beta^2 = 6+2\alpha+\beta;\quad \alpha\beta = 6;\quad \alpha'\alpha'' = 3\beta;$$

$$\beta'\beta'' = 2\alpha;\quad \alpha'+\alpha'' = -3-\alpha;\quad \beta'+\beta'' = 1-\beta$$

$$\alpha'\beta''+\alpha''\beta' = -9-\alpha+3\beta.$$

Начинаем расчеты с $\Phi_0 = 1$, $w_0 = 1$.

Тогда $k = 0{,}04$; $\Gamma = \Delta = 318{,}4$ и $k = 0{,}12$; $\Gamma_1 = \Delta_1 = 13{,}74$.

<u>1 шаг</u>. Пусть $M = -1$, $\alpha = 0$, $N = 1$ откуда

$$h = w = \lambda+\mu\left(1-\frac{\alpha}{3}\right);$$

$$2H = \left(2; 3+\frac{\alpha}{3}; 4+\frac{2}{3}\alpha+\frac{2}{3}\beta\right);$$

$$100v = \left(115, 70, 75\right)\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\left(115-45, 50\right),$$

где $X = \lambda x_0+\mu_1$; $\varphi = \lambda y_0+\mu M$; $z = \lambda z_0+\mu N$;

$$\mathrm{Norm}\left(w_0\right)\cdot\lambda+\beta M = \mathrm{Norm}\left(w_0\right)\cdot h;$$

$$\Gamma_1 = 8\sqrt{\frac{|D_\lambda|}{27}\cdot\frac{1}{g}\cdot\tau_2^{\,3}}.$$

$$V = h^2+\frac{2H}{\Gamma_1};$$

$$H = \mathrm{Norm}(w_0)\cdot h'h''L.$$

В нашем случае

$$\lambda = 1;\quad \mu = -1;\quad w_1 = \frac{\alpha}{3};\quad \mathrm{Norm}\, w_1 = \frac{2}{3}.$$

Пусть теперь $k = 0{,}08$. Далее находим: $\Gamma_1 = 14{,}83$ и $\Delta_1 = 84{,}35$.

Переходим ко второму шагу.

<u>2 шаг</u>. $N = 1$, $L = 0$, $M = 0$ и $W = \frac{1}{3}\lambda\alpha+\mu$;

$$h = \alpha+\frac{1}{2}\beta\mu;$$

$$2H = \left(\frac{4}{3}, \frac{1-\beta}{3}, \frac{2\alpha}{3}\right);$$

$$W = \frac{1}{3}\lambda\alpha+\mu;$$

$$h = \alpha+\frac{1}{2}\beta\mu;$$

$$2H = \left(\frac{4}{3}, \frac{1-\beta}{3}, \frac{2\alpha}{3}\right);$$

$$100V = \left(109, 174, 331\right)\cdot\begin{pmatrix}12 & -\\ 01 & \end{pmatrix}\cdot\left(109, -44, 71\right).$$

Отсюда $\lambda = 2$; $\mu = -1$ и $w_2 = -1+\frac{2}{3}\alpha$, Norm $w_2 = 1$; $k = 0{,}12$; $\Gamma_1 = 13{,}74$; $\Delta_1 = 970{,}5$.

<u>3 шаг</u>. Из условия $\Phi = \lambda - (\alpha+2\beta)\cdot\mu$ имеем $\lambda = 5$; $\mu = -1$; $\Phi_1 = 5+\alpha+2\beta$; Norm $\Phi_1 = 1$.

Таким образом, найдена алгебраическая единица, и так как она не является степенью другой единицы, то она должна быть основной единицей.

Итак,

$$\varepsilon = \frac{1}{3}\left(14+5\sqrt[3]{19}+\sqrt[3]{19^2}\right) = 5+\alpha+2\beta;$$

$$\varepsilon^{-1} = 2+\alpha-\beta = \frac{1}{3}\left(2+2\sqrt[3]{19}-\sqrt[3]{19^2}\right).$$

Рассуждения, опирающиеся на чисто кубические поля и основную единицу в них, используются в доказательствах неразрешимости уравнения Ферма в кубическом случае [3], а сами основные единицы используются при вычислении числа классов идеалов и решений многих частных типов и классов диофантовых уравнений [1].

Список литературы

1. Абакумова С.И. Исследование некоторых диофантовых уравнений // Вестник Ессентукского института управления, бизнеса и права. – 2014. – № 8. – С. 200–202.

2. Абакумова С.И., Аванесов Э.Т., Гусев В.А. Развитие методов вычисления основных единиц: монография. – Пятигорск: РИА-КМВ, 2008. – 144 с.

3. Абакумова С.И., Гусева А.В. Диофантовы уравнения // Фундаментальные и прикладные исследования в современном мире. – 2014. – Т.1, № 6. – С. 133–137.

4. Золотарев Е.И. Об одном неопределенном уравнении третьей степени: дисс. – СПб., 1869. – 67 с.

5. Uspensky J.V. A method for finding units in cubic orders of negative discriminant // Trans. Amer. Math. Soc. – 1931. – Vol. 33. – P. 1–22.

References

1. Abakumova S.I. Issledovanie nekotoryh diofantovyh uravnenij // Vestnik Essentukskogo instituta upravlenija, biznesa i prava. 2014. no. 8. pp. 200–202.

2. Abakumova S.I., Avanesov Je.T., Gusev V.A. Razvitie metodov vychislenija osnovnyh edinic: monografija. Pjatigorsk: RIA-KMV, 2008. 144 p.

3. Abakumova S.I., Guseva A.V. Diofantovy uravnenija // Fundamentalnye i prikladnye issledovanija v sovremennom mire. 2014. T.1, no. 6. pp. 133–137.

4. Zolotarev E.I. Ob odnom neopredelennom uravnenii tretej stepeni: Diss. SPb. 1869. 67 p.

5. Uspensky J.V. A method for finding units in cubic orders of negative discriminant // Trans. Amer. Math. Soc. 1931. Vol. 33. pp. 1–22.

Рецензенты:

Алтухов В.И., д.ф.-м.н., профессор, ведущий научный сотрудник отдела стратегического и инновационного развития, Институт сервиса, туризма и дизайна (филиал), ФГАОУ ВПО СКФУ, г. Пятигорск;

Казуб В.Т., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой физики и математики, Пятигорский медико-фармацевтический институт, филиал ГБОУ ВПО ВолгГМУ Минздрава РФ, г. Пятигорск.