

УДК 519.852

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

¹Кравчук С.П., ²Кравчук И.С., ¹Татарников О.В., ¹Швед Е.В.

¹ФГБОУ ВПО «Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова»,
Москва, e-mail: kafedra_vm@mail.ru;

²ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет путей сообщения», Москва

Предложенный ранее авторами метод последовательного исключения переменных в системе линейных неравенств, ставящих задачу линейного программирования, позволяет также находить точное аналитическое решение задач с переменными коэффициентами, зависящими от параметра. Однако при изменчивых знаках коэффициентов задачи требуется кропотливое рассмотрение отдельных промежутков параметра, где коэффициенты сохраняют свой знак. Для случая слабого относительного изменения всех коэффициентов в данной работе предлагается эффективный приближенный способ нахождения аналитического решения задачи линейного программирования с переменными коэффициентами. Суть его составляет широко используемый в прикладной математике метод возмущений, или метод малого параметра, позволяющий строить простую итерационную схему. При этом точность решения порядка 1 % достигается за несколько итераций. Рассмотренная методика легко обобщается и на многопараметрические задачи.

Ключевые слова: неравенства, линейное программирование, симплекс-метод, метод Жордана – Гаусса, целевая функция, экстремум, матрица, метод возмущений

PERTURBATION METHOD FOR SOLVING OF LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS WITH A PARAMETER

¹Kravchuk S.P., ²Kravchuk I.S., ¹Tatarnikov O.V., ¹Shved E.V.

¹Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, e-mail: kafedra_vm@mail.ru;

²Moscow State University of Railway Transport, Moscow

The method earlier proposed by authors of successive elimination of variables in the system of linear inequalities that correspond to the problem of linear programming allows one to find the exact analytical solution of problems with variable coefficients depending on the parameter also. However, in case of alternate signs of the variables thorough examination of each parameter interval where the coefficients retain their sign is required. An effective method for finding an approximate analytical solution of linear programming problem with variable coefficients in the case of weak relative change of the coefficients is proposed in this paper. It is based on widely used in applied mathematics perturbation method, in other words the method of a small parameter, allowing building a simple iteration scheme. The accuracy of solution of about 1 % is reached in a few iterations. The presented procedure can be easily generalized to a multi-parameter problem.

Keywords: inequality, linear programming, simplex method, Jordan-Gauss method, objective function, extremum, matrix, perturbation method

В работе [1] показано, как на основе метода последовательного исключения переменных в системе линейных неравенств [2, 3] можно находить точное аналитическое решение задачи линейного программирования, коэффициенты которой зависят от параметра. Однако даже в случае однопараметрической задачи с двумя переменными [1] решение может оказаться громоздким. В практических же задачах линейного программирования коэффициенты обычно незначительно изменяются относительно своих средних значений, как, например, стоимость товара в зависимости от курса валют или инфляции. В подобных случаях, когда относительные изменения коэффициентов порядка 10 % и меньше, удобно использовать широко применяемый в различных исследованиях асимптотический метод возмущений [4, 5]. Суть его сводится к поиску разложения искомых функций в функ-

циональные ряды, быстрота сходимости которых зависит от «параметра малости» – относительного изменения функций, влияющих на задачу.

Итерационная схема решения

Рассмотрим в общем случае задачу на минимум, преобразованную к системе линейных неравенств [3]:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n c_i x_i + c_0 \leq Z, \\ \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ x_j \geq 0, \quad j \in J, \\ Z_{\min} - ? \quad x_i(Z_{\min}) - ? \end{cases} \quad (1)$$

В задаче на максимум в первом неравенстве (1) следует поменять знак « $\leq$ » на « $\geq$ » [3].

Обозначим через c_i^0, a_{ik}^0, b_i^0 средние значения всех коэффициентов:

$$c_i^0 = c_i; \quad a_{ik}^0 = a_{ik}; \quad b_i^0 = b_i,$$

где, например, для непрерывных коэффициентов, зависящих от параметра $t \in [0; 1]$,

$$c_i = \int_0^1 c_i(t) dt. \quad (2)$$

Пусть c_i^1, a_{ik}^1, b_i^1 означают отклонения этих коэффициентов от их средних значений:

$$c_i^1 = c_i - c_i^0; \quad a_{ik}^1 = a_{ik} - a_{ik}^0; \quad b_i^1 = b_i - b_i^0.$$

Тогда средние значения отклонений равны нулю:

$$c_i^1 = a_{ik}^1 = b_i^1 = 0. \quad (3)$$

Далее предполагается, что все относительные отклонения, например, $|c_i^1|/|c_i^0|$, достаточно малы (менее 10%).

Будем искать Z и x_i для системы (1) в виде рядов, состоящих из поправок соответствующего порядка:

$$Z = Z^0 + Z^1 + Z^2 + \dots; \quad x_i = x_i^0 + x_i^1 + x_i^2 + \dots \quad (4)$$

Здесь x_i^0 и Z^0 – решения (1), когда все коэффициенты равны своим средним значениям:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n c_{ii}^0 x_i^0 \leq Z^0 - c_0^0, \\ \sum_{k=1}^n a_{ik}^0 x_k^0 \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ x_j^0 \geq 0, \quad j \in J, \\ Z_{\min}^0 - ? \quad x_i^0(Z_{\min}^0) - ? \end{cases} \quad (5)$$

Для нахождения поправок первого порядка x_i^1 и Z^1 подставляем в (1):

$$c_i = c_i^0 + c_i^1; \quad a_{ik} = a_{ik}^0 + a_{ik}^1; \quad b_i = b_i^0 + b_i^1;$$

$$x_i = x_i^0 + x_i^1; \quad Z = Z^0 + Z^1;$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (c_i^0 + c_i^1)(x_i^0 + x_i^1) + c_0^0 + c_0^1 \leq Z^0 + Z^1, \\ \sum_{k=1}^n (a_{ik}^0 + a_{ik}^1)(x_k^0 + x_k^1) \leq b_i^0 + b_i^1, \\ x_j^0 + x_j^1 \geq 0. \end{cases}$$

После раскрытия скобок получим

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n c_i^0 x_i^0 + \sum_{i=1}^n c_i^0 x_i^1 + \sum_{i=1}^n c_i^1 x_i^0 + \sum_{i=1}^n c_i^1 x_i^1 + c_0^0 + c_0^1 \leq Z^0 + Z^1, \\ \sum_{k=1}^n a_{ik}^0 x_k^0 + \sum_{k=1}^n a_{ik}^0 x_k^1 + \sum_{k=1}^n a_{ik}^1 x_k^0 + \sum_{k=1}^n a_{ik}^1 x_k^1 \leq b_i^0 + b_i^1, \\ x_j^0 + x_j^1 \geq 0. \end{cases}$$

Относительные изменения первых поправок порядка относительного изменения коэффициентов. Зачёркнутые же слагаемые имеют второй порядок малости и поэтому должны быть отброшены [4]. Обозначим

$$x_i^{(1)} = x_i^0 + x_i^1;$$

$$Z^{(1)} = Z^0 + Z^1$$

– решение в первом приближении теории возмущений. Тогда последняя система неравенств переписывается в виде

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n c_i^0 x_i^{(1)} \leq Z^{(1)} - c_0 - \sum_{i=1}^n c_i^1 x_i^0, \\ \sum_{k=1}^n a_{ik}^0 x_k^{(1)} \leq b_i - \sum_{k=1}^n a_{ik}^1 x_k^0, \\ x_j^{(1)} \geq 0, \quad Z_{\min}^{(1)} - ? \quad x_i^{(1)}(Z_{\min}^{(1)}) - ? \end{cases} \quad (6)$$

У систем (5) и (6) одинаковые и постоянные коэффициенты при неизвестных. Отличаются только свободные члены. Поэтому обе системы решаются одинаково просто методом исключения [2, 3].

Для нахождения решения во втором приближении

$$x_i^{(2)} = x_i^{(1)} + x_i^2;$$

$$Z^{(2)} = Z^{(1)} + Z^2$$

подставляем эти суммы вместо x_i и Z в (1). После отбрасывания слагаемых третьего порядка малости получим

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n c_i^0 x_i^{(2)} \leq Z^{(2)} - c_0 - \sum_{i=1}^n c_i^1 x_i^{(1)}, \\ \sum_{k=1}^n a_{ik}^0 x_k^{(2)} \leq b_i - \sum_{k=1}^n a_{ik}^1 x_k^{(1)}, \\ x_j^{(2)} \geq 0, \quad Z_{\min}^{(2)} - ? \quad x_i^{(2)}(Z_{\min}^{(2)}) - ? \end{cases} \quad (7)$$

Результаты (6), (7) нетрудно обобщить на любой порядок приближения $p = 1, 2, \dots$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n c_i^0 x_i^{(p)} \leq Z^{(p)} - c_0 - \sum_{i=1}^n c_i^1 x_i^{(p-1)}, & p \in N, \\ \sum_{k=1}^n a_{ik}^0 x_k^{(p)} \leq b_i - \sum_{k=1}^n a_{ik}^1 x_k^{(p-1)}, & i = \overline{1, m}, \\ x_j^{(p)} \geq 0, & j \in J, \quad Z_{\min}^{(p)} - ? \quad x_i^{(p)} (Z_{\min}^{(p)}) - ? \end{cases} \quad (8)$$

Следует только иметь в виду, что при достаточно больших p асимптотические ряды начинают расходиться [5]. Критерием возможности увеличения p может, например, служить среднее отклонение $Z_{\min}^{(p)}$ от $Z_{\min}^{(p-1)}$.

$$\Delta_p = |Z_{\min}^{(p)} - Z_{\min}^{(p-1)}| = |Z_{\min}^p|. \quad (9)$$

Если Δ_p начинает увеличиваться, итерационный процесс следует закончить. Тогда максимальная достигнутая точность оценивается относительной погрешностью

$$\delta_p = \frac{\Delta_p}{|Z_{\min}^p|} \quad (10)$$

для последнего p .

В векторной форме система (8) кратко выглядит так:

$$\begin{cases} C^0 X^{(p)} \leq Z^{(p)} - c_0 - C^1 X^{(p-1)}, \\ A^0 X^{(p)} \leq B - A^1 X^{(p-1)}, \\ X_J^{(p)} \geq \Theta, \quad Z_{\min}^{(p)} - ? \quad X^{(p)} (Z_{\min}^{(p)}) - ? \end{cases}$$

Средние значения $x_i^{(p)}$ и $Z_{\min}^{(p)}$ можно также найти путём усреднения системы (8) с учётом (2) и (3):

$$\begin{cases} c_1 = 1 + 0,2(t - 0,5), & c_2 = 3 + 0,6(t - 0,5), & c_0 = 0, \\ b_1 = 4 + 0,8(t - 0,5), & b_2 = -2 - 0,4(t - 0,5), \\ a_{11} = 1 + 0,2(t - 0,5), & a_{12} = 1 - 0,2(t - 0,5), \\ a_{21} = -2 + 0,4(t - 0,5), & a_{22} = -1 - 0,2(t - 0,5), & t \in [0; 1] \end{cases} \quad (11)$$

Решение таково:

$$Z_{\min}(t) = \frac{(0,2t + 0,9)^2}{1,1 - 0,2t}; \quad x_1(t) = \frac{0,2t + 0,9}{1,1 - 0,2t}; \quad x_2 = 0. \quad (12)$$

Усредняя (11) по формуле (2), находим

$$c_1^0 = 1; \quad c_2^0 = 3; \quad b_1^0 = 4; \quad b_2^0 = -24; \quad a_{11}^0 = 1; \quad a_{12}^0 = 1; \quad a_{21}^0 = -2; \quad a_{22}^0 = -1. \quad (13)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n c_i^0 x_i^{(p)} \leq Z^{(p)} - c_0^0 - \sum_{i=1}^n c_i^1 (x_i^{(p-1)} - x_i^0), \\ \sum_{k=1}^n a_{ik}^0 x_k^{(p)} \leq b_i^0 - \sum_{k=1}^n a_{ik}^1 (x_k^{(p-1)} - x_k^0), \\ x_j^{(p)} \geq 0, \quad Z_{\min}^{(p)} - ? \quad x_i^{(p)} - ? \end{cases}$$

В частности, при $p = 1$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n c_i^0 x_i^{(1)} \leq Z^{(1)} - c_0^0; \\ \sum_{k=1}^n a_{ik}^0 x_k^{(1)} \leq b_i^0; \\ x_j^{(1)} \geq 0, \quad Z_{\min}^{(1)} - ? \quad x_i^{(1)} - ? \end{cases}$$

Эта система в точности совпадает с (5). Поэтому

$$\begin{aligned} Z_{\min}^{(1)} &= Z_{\min}^0; \\ x_i^{(1)} &= x_i^0 (Z_{\min}^0), \end{aligned}$$

т.е. средние значения первого приближения совпадают с нулевым приближением.

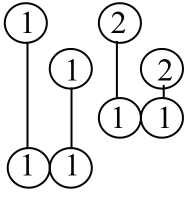
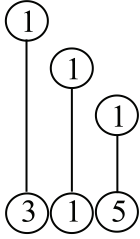
При рассмотрении задачи на максимум Z следует во всех вышеприведённых неравенствах, содержащих Z , поменять знак неравенства с « $\leq$ » на « $\geq$ ».

Пример

В работе [1] было найдено точное решение задачи:

$$\begin{cases} c_1 x_1 + c_2 x_2 \leq Z, \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \\ Z_{\min} - ? \quad x_1 - ? \quad x_2 - ? \end{cases}$$

с коэффициентами:

$x_1^{(1)}$	$x_2^{(1)}$		
∇		$Z^{(1)} - 0,2\tau$	
1	3	$4 + 0,6\tau$	
1	1	$-2 - 0,8\tau$	
-2	-1	0	
-1	0	0	
0	-1		
∇		$Z^{(1)} - 0,2\tau$	
3		$4 + 0,6\tau$	
1		$2Z^{(1)} - 2 - 1,2\tau$	
5		$6 + 0,4\tau$	
1		0	
-1			
		$Z^{(1)} - 0,2\tau \Rightarrow Z^{(1)} \geq 0,2\tau$ $4 + 0,6\tau$ $2Z^{(1)} - 2 - 1,2\tau \Rightarrow Z^{(1)} \geq 1 + 0,6\tau$	$\Rightarrow$
$\Rightarrow Z^{(1)} \geq 1 + 0,6\tau, \Rightarrow x_2^{(1)} = 0, \Rightarrow x_1^{(1)} = 1 + 0,4\tau$			

Решение в нулевом приближении [1]:

$$Z_{\min}^0 = 1; \quad x_1^0 = 1; \quad x_2^0 = 0. \quad (14)$$

Найдём решение в первом приближении. Для этого подставим в (6) значения (11), (13) и (14). Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} + 3x_2^{(1)} \leq Z^{(1)} - 0,2\tau, \\ x_1^{(1)} + x_2^{(1)} \leq 4 + 0,6\tau, \\ -2x_1^{(1)} - x_2^{(1)} \leq -2 - 0,8\tau, \\ -x_1^{(1)} \leq 0, \\ -x_2^{(1)} \leq 0. \end{cases}$$

где обозначено $\tau = t - 0,5$, $\tau \in [-0,5; 0,5]$.

Решаем её табличным способом [1]:

Таким образом,

$$Z_{\min}^{(1)} = 1 + 0,6(t - 0,5);$$

$$x_1^{(1)} = 1 + 0,4(t - 0,5); \quad x_2^{(1)} = 0. \quad (15)$$

Подставляя затем (11), (13), (15) в (7), находим решение во втором приближении:

$$Z_{\min}^{(2)} = 1 + 0,6(t - 0,5) + 0,16(t - 0,5)^2;$$

$$x_1^{(2)} = 1 + 0,4(t - 0,5) + 0,08(t - 0,5)^2;$$

$$x_2^{(2)} = 0. \quad (16)$$

Сравним значения $Z_{\min}$, рассчитанные по (12), (15), (16):

$$Z_{\min}^{(0)} = 0,736; \quad Z_{\min}^{(1)}(0) = 0,700;$$

$$Z_{\min}^{(2)}(0) = 0,740; \quad Z_{\min}^{(1)}(1) = 1,344;$$

$$Z_{\min}^{(1)}(1) = 1,300; \quad Z_{\min}^{(2)}(1) = 1,340.$$

Их средние значения находим, усредняя (12), (15), (16) по формуле (2):

$$Z_{\min} = 20 \ln \frac{11}{9} - 3,0 = 1,0134;$$

$$Z_{\min}^{(1)} = Z_{\min}^0 = 1,0; \quad Z_{\min}^{(2)} = 1,0133.$$

Оценим погрешности приближений (9), (10):

$$\Delta_1 = \left| Z_{\min}^{(1)} - Z_{\min}^0 \right| = \int_0^1 0,6|t - 0,5| dt = 0,15;$$

$$\delta_1 = \frac{\Delta_1}{Z_{\min}^{(1)}} = 15 \%;$$

$$\Delta_2 = \left| Z_{\min}^{(2)} - Z_{\min}^{(1)} \right| = \int_0^1 0,16(t - 0,5)^2 dt = 0,013;$$

$$\delta_2 = \frac{\Delta_2}{Z_{\min}^{(2)}} = 1,3 \%.$$

Отсюда видно, что если коэффициенты (11) при $t \in [0;1]$ изменяются в пределах $\pm 10\%$ по отношению к их средним значениям (13), то относительная погрешность конечного результата в первом приближении имеет тот же порядок малости. Во втором же приближении относительная погрешность результата порядка квадрата погрешности первого приближения, т.е. существенно меньше. Это согласуется с многочисленными другими задачами [4, 5].

Список литературы

1. Кравчук С.П., Кравчук И.С., Татарников О.В., Швед Е.В. Метод неравенств в задаче линейного программирования с параметром. – М.: Фундаментальные исследования, 2014. – № 9, часть 12.
2. Кравчук С.П., Кравчук И.С., Швед Е.В. Экстремумы в системе линейных неравенств с двумя переменными. – СПб.: Современные аспекты экономики, 2010. – № 6 (154).
3. Кравчук С.П., Кравчук И.С., Татарников О.В., Швед Е.В. Метод неравенств в задачах линейного программирования. – М.: Фундаментальные исследования, 2014. – № 3, часть 1.
4. Найфе А.Х. Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984.

5. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. – М.: Мир, 1986.

References

1. Kravchuk S.P., Kravchuk I.S., Tatarnikov O.V., Shved E.V. Metod neravenstv v zadache linejnogo programirovaniya s parametrom. M.: Fundamentalnye issledovaniya, 2014. no. 9, chast 12.
2. Kravchuk S.P., Kravchuk I.S., Shved E.V. Jekstremumy v sisteme linejnyh neravenstv s dvumja peremennymi. SPb.: Sovremennye aspekty jekonomiki, 2010. no. 6 (154).
3. Kravchuk S.P., Kravchuk I.S., Tatarnikov O.V., Shved E.V. Metod neravenstv v zadachah linejnogo programmirovaniya. M.: Fundamentalnye issledovaniya, 2014. no. 3, chast 1.
4. Najfe A.H. Vvedenie v metody vozmushhenij. M.: Mir, 1984.
5. Olver F. Vvedenie v asimptoticheskie metody i specialnye funkicii. M.: Mir, 1986.

Рецензенты:

Петров Л.Ф., д.т.н., профессор кафедры «Математические методы в экономике», ФГБОУ ВПО «РЭУ имени Г.В. Плеханова», г. Москва;

Титов В.А., д.э.н., профессор кафедры информационных технологий, ФГБОУ ВПО «РЭУ имени Г.В. Плеханова», г. Москва.