УДК 517.977.58

О ЧИСЛЕННОМ АЛГОРИТМЕ МЕТОДА ВАРИАЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ УПРАВЛЕНИЙ

Григорьев И.В., Михайлова Т.А., Мустафина С.А.

Стерлитамакский филиал ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет», Стерлитамак, e-mail: grigoryevigor@mail.ru

В статье на основе метода вариаций в пространстве управлений разработан алгоритм и реализована программа для определения оптимального управления в задачах со свободным правым концом. Для иллюстрации метода приводятся результаты численного решения задачи на трех примерах с ограничениями на управление и фазовые переменные. Достоинством данного алгоритма является отсутствие требования к выбору начального приближения параметра управления и фазовых переменных. Алгоритм имеет хорошую сходимость и может быть использован для решения большого класса прикладных задач в различных отраслях народного хозяйства. С помощью разработанного алгоритма определены оптимальные траектории и численные значения параметра управления для тестовых задач. Проведен сравнительный анализ результатов численного решения приведенных примеров при различных значениях начального приближения управления и точности вычислений.

Ключевые слова: метод вариаций, оптимальное управление, фазовые переменные

ABOUT NUMERICAL ALGORITHM METHOD OF VARIATION IN THE CONTROL AREA

Grigorev I.V., Mikhaylova T.A., Mustafina S.A.

Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, e-mail: grigoryevigor@mail.ru

In the article based on the method of variations in the space of controls the algorithm is developed and program was implemented to determine the optimal control problems with free right end. As an illustration method, presents the results of numerical solution of the three examples with constraints on the control and phase variables. The advantage of this algorithm is the lack of requirements for the selection of the initial approximation control parameter and phase variables. The algorithm has good convergence and can be used to solve a large class of applications in various branches of the economy. By using the developed algorithm determined the optimum trajectory and the numerical values of the control parameter for the test problems. A comparative analysis of the results of the numerical solution of the examples for different values of initial approximation control and precision.

Keywords: method of variations, optimal control, phase variables

В настоящее время математическое моделирование многих динамических процессов, которые происходят на практике (экономика, промышленное производство, движение самолетов, экология, химия, биология и т.д.), является основным инструментом для получения знаний об их поведении при различных способах воздействия. Одна из главных целей моделирования – найти такое управляющее воздействие, при котором в некотором смысле достигается «максимальный эффект». Например, минимальные затраты ресурсов (денег, времени) на производство единицы продукции или передачи управляемого объекта из начального состояния в заданное конечное состояние.

Наиболее удобные и популярные средства описания динамических процессов – дифференциальные уравнения. Возникающие проблемы, как правило, хорошо известны в теории оптимального управления. Тем не менее подавляющее большинство из них не имеют простого (аналитического) решения и требуют разработки численных методов.

Данная работа посвящена актуальной проблеме – разработке эффективных алгоритмов численного решения задач оптимального управления.

Постановка задачи. Пусть управляемый процесс представлен системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\left(x_1,...x_n, u_1,..., u_r, t\right), \qquad (1)$$

где x_i – фазовые переменные, а u_j – переменные управления, $u_j \in U$.

При $t = 0$ заданы все начальные значения фазовых переменных x_i:

$$x_i(0) = x_{i0}, \quad i = 1, ..., n.. \qquad (2)$$

На управление и фазовые переменные наложены ограничения типа

$$\eta(u_1, ..., u_r) \le 0{,}4; \quad \theta(x_1, ..., x_n) \le 0. \qquad (3)$$

Критерий оптимизации пусть задан в терминальном виде

$$I(x_1(T), ..., x_p(T)) \to \min, p \le n. \qquad (4)$$

Требуется найти такое управление $u(t)$, удовлетворяющее условиям (3), чтобы величина $I(x_1(T), ..., x_p(T))$ приняла минимальное значение.

Алгоритм метода вариации

Для численного решения данной задачи был составлен алгоритм метода вариации в пространстве управлений:

1. Определить первоначальное приближение управления U_0 (может быть произвольным).
2. Разбить интервал $[t_0, t_k]$ на n частей, образующих равномерную систему узлов.
3. Выбрать начальный узел t_0, с которым будет происходить вариация управлений.
4. Произвести вариацию в т. t_0 в двух направлениях $U(t_0) \pm \delta U$.
5. Решить систему $\frac{dx}{dt} = f(x, u, t)$ с начальными условиями $x(t_0) = x_0$.
6. Зная значения фазовых координат, вычислить значение критерия I для управления, полученного на шаге 4.
7. Перейти к t_1 и повторить процедуру, начиная с шага 4 для всех оставшихся точек t_i.
8. Определить наименьшее значение критерия, вычисленных во всех точках t_i, и определить новое приближение U_1, соответствующее наименьшему значению критерия.
9. С приближением U_1 продолжить процедуру с шага 3 до тех пор, пока не найдется ни одной вариации, при которой значение критерия улучшаться не будет.
10. С целью уточнения приближения процесс можно продолжить, поделив вариацию δU пополам.

Тестирование алгоритма

На основе созданного алгоритма реализована программа на языке Object Pascal в среде Delphi. Рассмотрим работу полученного алгоритма на тестовых примерах, при этом для вычисления погрешностей будем использовать евклидову норму вида

$$\varepsilon_{x_1} = \sqrt{\sum_i \left(x_{1i} - x_1^*(t_i)\right)^2};$$

$$\varepsilon_{x_2} = \sqrt{\sum_i \left(x_{2i} - x_2^*(t_i)\right)^2};$$

$$\varepsilon_u = \sqrt{\sum_i \left(u_i - u^*(t_i)\right)^2}.$$

Пример 1

Допустим, что некоторый процесс описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u(t); \end{cases} \tag{5}$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = 0; \quad x_2(0) = 0 \tag{6}$$

и следующими ограничениями на переменную времени:

$$0 \le t \le 2\pi \tag{7}$$

и на управление:

$$|u| \le 1. \tag{8}$$

Критерий оптимизации имеет вид

$$I(x_1, x_2) = x_2(2\pi) \to \min. \tag{9}$$

Требуется найти оптимальное программное управление $u^*(\cdot)$ и соответствующую ему траекторию $x^*(\cdot)$, которые удовлетворяют уравнениям (5)–(6), ограничениям (7)–(8) и условию (9).

Аналитическое решение данной задачи представлено в [2]. На рис. 1, 2 изображено численное решение данной задачи при начальном приближении $u_0 = 0{,}3$.

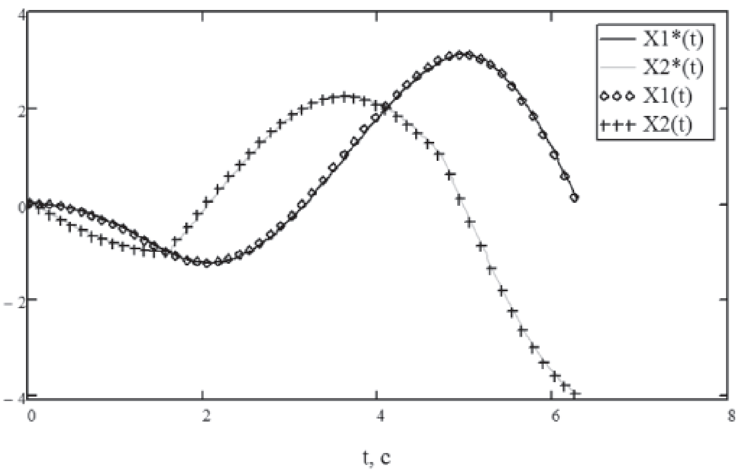

Рис. 1. Графики оптимальных траекторий для примера 1

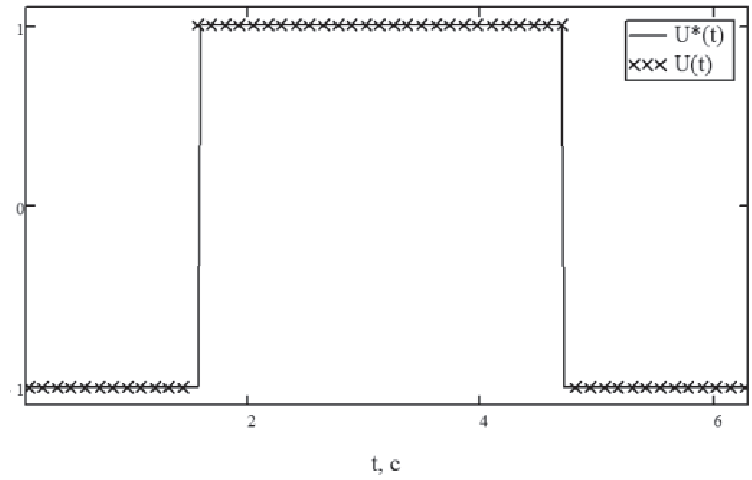

Рис. 2. График оптимального управления для примера 1

Таблица 1

Сравнительный анализ результатов решения задачи 1

№ п/п	u_0	Точность	Затраченное время, с	ε_u	ε_{x_1}	ε_{x_2}	$I_{\min}$
1	0	0,1	2,06	3,06	1,11	1,21	–3,74
2	0	0,01	2,85	2,99	0,14	0,15	–3,97
3	0	0,001	4,12	2,987	0,018	0,019	–3,9949
4	–0,6	0,001	3,94	2,854	0,019	0,016	–3,9958
5	–0,9	0,0001	12,06	2,0024	0,1086	0,1089	–3,9994
6	0,1	0,00001	23,35	2,0023	0,1093	0,1088	–3,9997

Сравнивая полученные численные и аналитические значения, вычислим погрешности для управления и траекторий. В табл. 1 представлен сравнительный анализ результатов численного решения задачи (5)–(9) при различных значениях начального приближения управления и точности вычислений.

Пример 2

Пусть управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t); \end{cases} \tag{10}$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = -1; \quad x_2(0) = 0 \tag{11}$$

и следующими ограничениями на переменную времени:

$$0 \le t \le 2{,}5 \tag{12}$$

и на управление, фазовые переменные:

$$|u| \le 1, \quad x_2 \le 0{,}5. \tag{13}$$

Критерий оптимизации имеет вид

$$I(x_1, x_2) = x_1^2(2{,}5) + x_2^2(2{,}5) \to \min. \tag{14}$$

Требуется найти оптимальное программное управление $u^*(\cdot)$ и соответствующую ему траекторию $x^*(\cdot)$, которые удовлетворяют уравнениям (10)–(11), ограничениям (12)–(13) и условию (14).

Аналитическое решение данной задачи представлено в [3]. На рис. 3, 4 изображено численное решение данной задачи, при начальном приближении $u_0 = 0{,}1$.

Сравнивая полученные численные и аналитические значения, вычислим погрешности для управления и траекторий. В табл. 2 представлен сравнительный анализ результатов численного решения задачи (10)–(14) при различных значениях начального приближения управления, точности вычислений.

Пример 3

Пусть управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u^2(t) - 0{,}5 \cdot u(t); \end{cases} \tag{15}$$

с начальными условиями:

$$x_1(0) = 0; \quad x_2(0) = 0 \tag{16}$$

и следующими ограничениями на переменную времени:

$$0 \le t \le 1 \tag{17}$$

и на управление:

$$0 \le u \le 1 \tag{18}$$

Критерий оптимизации имеет вид

$$I(x_1, x_2) = x_1(1) \to \max. \tag{19}$$

Требуется найти оптимальное программное управление $u^*(\cdot)$ и соответствующую ему траекторию $x^*(\cdot)$, которые удовлетворяют уравнениям (15)–(16), ограничениям (17)–(18) и условию (19).

Аналитическое решение данной задачи представлено в [3].

На рис. 5 изображено численное решение данной задачи при начальном приближении $u_0 = 0{,}6$. При этом расчетное значение параметра управления на интервале $0 \le t \le 1$ принимает постоянное значение, равное 1.

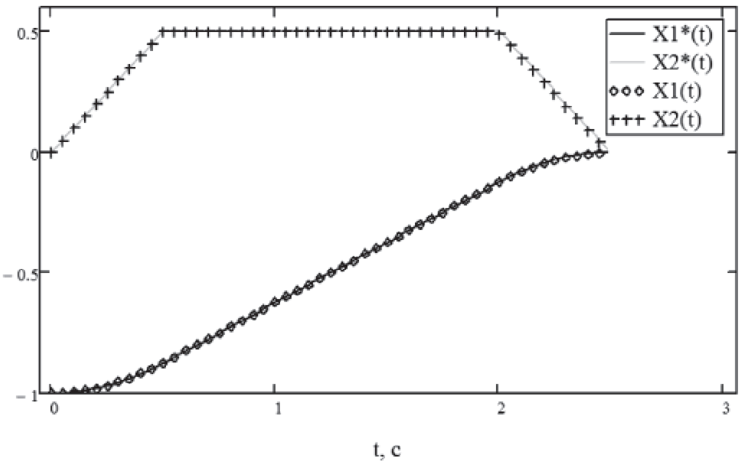

Рис. 3. Графики оптимальных траекторий для примера 2

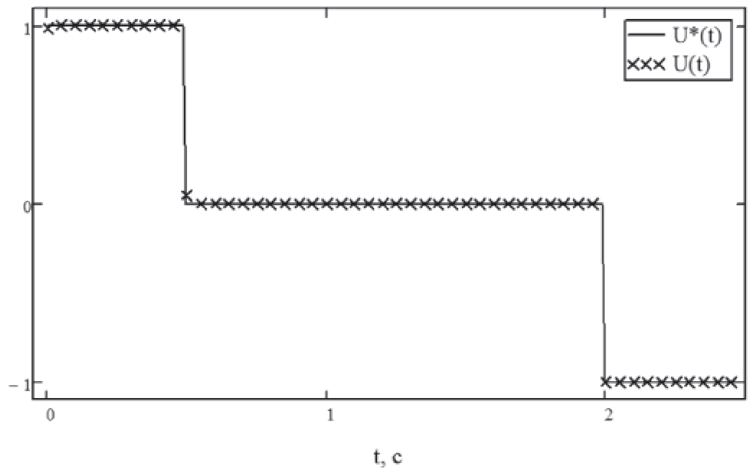

Рис. 4. График оптимального управления для примера 2

Таблица 2

Сравнительный анализ результатов решения задачи 2

№ п/п	u_0	Точность	Затраченное время, с	ε_u	ε_{x_1}	ε_{x_2}	$I_{\min}$
1	0	0,1	1,12	5,46	2,97	2,58	0,15
2	0	0,01	3,41	1,79	0,09	0,102	0,0001
3	0	0,001	3,95	1,807	0,088	0,102	0,0001
4	–0,6	0,001	4,34	1,695	0,096	0,102	0,0001
5	–0,9	0,0001	7,98	1,5092	0,0885	0,1026	0,0001
6	0,1	0,00001	13,48	1,50543	0,08875	0,10224	0,00014

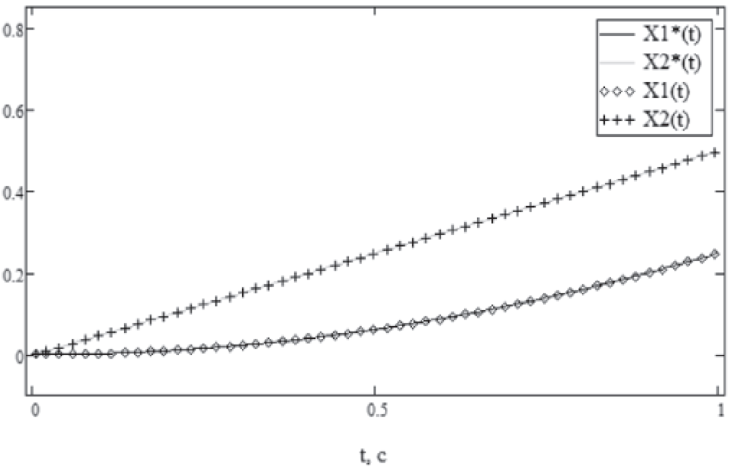

Рис. 5. Графики численного решения примера 3

Таблица 3

Сравнительный анализ результатов решения задачи 3

№ п/п	u_0	Точность	Затраченное время, с	ε_u	ε_{x_1}	ε_{x_2}	I_{min}
1	0,6	0,1	2,32	1,06	1,105	0,285	0,229
2	0,6	0,01	6,43	1,009	0,04	0,108	0,241
3	0,6	0,001	9,45	1	0,001	0,018	0,246
4	0,8	0,001	11,58	1	0,003	0,009	0,247
5	0,8	0,0001	18,23	1	0,0033	0,0091	0,2475
6	0,6	0,00001	23,85	1	0,00002	0,00007	0,24761

Сравнивая полученные численные и аналитические значения, вычислим погрешности для управления и траекторий. В табл. 3 представлен сравнительный анализ результатов численного решения задачи (15)–(19) при различных значениях начального приближения управления, точности вычислений.

Заключение

Выполненный сравнительный анализ приближенного и аналитического решения задач показал удовлетворительное согласование и хорошую работу построенного алгоритма. Достоинством данного алгоритма является отсутствие требования к выбору начального приближения параметра управления и фазовых переменных. Алгоритм имеет хорошую сходимость и может быть использован для решения большого класса прикладных задач в различных отраслях народного хозяйства.

Список литературы

1. Мустафина С.А., Балаев А.В., Смирнов Д.Ю., Спивак С.И. Моделирование каталитического процесса дегидрирования метилбутенов // Системы управления и информационные технологии. – 2006. – Т. 23. – № 1. – С. 10–14.

2. Мустафина С.А., Валиева Ю.А., Давлетшин Р.С., Балаев А.В., Спивак С.И. Оптимальные технологические решения для каталитических процессов и реакторов // Кинетика и катализ. – 2005. – Т. 46. – № 5. – С. 749–756.

3. Островский Г.М., Волин Ю.М. Методы оптимизации сложных химико-технологических схем. – М.: Химия. 1970. – 328 с.

4. Степашина Е.В., Мустафина С.А. Формирование математической модели каталитических процессов с переменным реакционным объемом на основе теоретико-графового подхода // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 3. – С. 31–36.

5. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. – М.: Наука. 1978. – 488 с.

References

1. Mustafina S.A., Balaev A.V., Smirnov D.Ju., Spivak S.I. Modelirovanie kataliticheskogo processa degidrirovanija metilbutenov // Sistemy upravlenija i informacionnye tehnologii. 2006. T. 23. no. 1. pp. 10–14.

2. Mustafina C.A., Valieva Ju.A., Davletshin R.S., Balaev A.V., Spivak S.I. Optimalnye tehnologicheskie reshenija dlja kataliticheskih processov i reaktorov // Kinetika i kataliz. 2005. T. 46. no. 5. pp. 749–756.

3. Ostrovskij G.M., Volin Ju.M. Metody optimizacii slozhnyh himiko-tehnologicheskih shem. M.: Himija. 1970. 328 p.

4. Stepashina E.V., Mustafina S.A. Formirovanie matematicheskoj modeli kataliticheskih processov s peremennym reakcionnym obemom na osnove teoretiko-grafovogo podhoda // Izvestija Tomskogo politehnicheskogo universiteta. 2012. T. 320. no. 3. pp. 31–36.

5. Fedorenko R.P. Priblizhennoe reshenie zadach optimalnogo upravlenija. M.: Nauka. 1978. 488 p.

Рецензенты:

Муравьева Е.А., д.т.н., профессор, филиал ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный нефтяной технический университет», г. Стерлитамак;

Галиев А.Л., д.т.н., профессор, филиал ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет», г. Стерлитамак.