УДК 534.1

О ДИАГНОСТИКЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ИЗ СТРУН ПО КОНЕЧНОМУ НАБОРУ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

[1,2]Ахтямов А.М., [2]Аксенова З.Ф.

[1]ФГБУН «Институт механики Уфимского НЦ РАН им. Р.Р. Мавлютова», Уфа, e-mail: AkhtyamovAM@mail.ru;

[2]ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет», Уфа, e-mail: aksenovazf@yandex.ru

Рассматривается механическая колебательная система в виде графа из трех ребер-струн с одной общей вершиной. Струны графа являются однородными и имеют одинаковую длину. Все три тупиковых вершины графа упруго закреплены и в местах закрепления сосредоточены массы. Вся система колеблется, как батут. Решается задача определения значений коэффициентов жесткости пружинок и сосредоточенных масс по конечному числу собственных частот этой механической системы. Показывается, что 9 собственных частот достаточно для нахождения коэффициентов жесткости пружинок и сосредоточенных масс с точностью до перестановок закреплений на тупиковых концах механической системы местами. Находится метод решения этой обратной задачи, доказывается теорема и приводится соответствующий пример. Полученные результаты могут быть применены как для проектирования, так и для диагностики виброзащитных систем, а также условий заземления электрических сетей.

Ключевые слова: виброзащитные системы, собственные частоты, обратная задача, граф, электрические сети, условия заземления электрических сетей

ON DIAGNOSTICS OF STRINGS MECHANICAL SYSTEM FROM THE FINITE SET OF EIGENVALUES

[1,2]Akhtyamov A.M., [2]Aksenova Z.F.

[1]Institute of Mechanics Ufa Scientific Center Russian Academy of Sciences, Ufa, e-mail: AkhtyamovAM@mail.ru;

[2]Bashkir State University, Ufa, e-mail: aksenovazf@yandex.ru

A mechanical vibrations system is considered. This system is a string graph that has three edges and a common vertex. The strings of graph are homogeneous. Lengths of the edges are the same. All three dead-locked vertexes of the graph are elastically fixed. Masses are concentrated at these vertexes. The system is vibrated like a trampoline. The problem of determination of springs elasticity coefficients and the concentrated masses of this mechanical system from a finite number of natural frequencies is solved. It is shown that Nine natural frequencies is suffice for determining of springs elasticity coefficients and the concentrated masses up to permutations of fixing seats of the mechanical system. The method of solution of this inverse problem is found, a theorem is proved and corresponding example is given. The results can be used both for planning and for diagnostics of vibroprotection systems and grounding conditions of electrical networks.

Keywords: vibration protection systems, natural frequencies, inverse problem, graph, electrical networks, conditions of electrical networks

Целью настоящей статьи является восстановление сосредоточенных масс и коэффициентов жесткости пружин, сосредоточенных на тупиковых вершинах звездного струнного графа, по известному набору собственных частот колебаний этого графа. Дифференциальные операторы на графах часто возникают в естествознании и технике [11]. Прямые спектральные задачи решались в работах [6, 8, 15], так же решались обратные спектральные задачи (см., например, [9, 12, 14]), в том числе на графах [13]. Однако существенным отличием этих работ от данной является то, что коэффициенты дифференциальных уравнений и краевых условий восстанавливаются не по части спектра, а по нескольким спектрам и (или) по некоторым другим спектральным характеристикам. К тому же основной целью этих работ является восстановление коэффициентов в уравнении, а не в краевых условиях. Идентификации краевых условий спектральных задач по собственным значениям в механических и электронных системах посвящена работа [3], однако рассмотренная нами задача там не изучалась. В [5] восстанавливались коэффициенты граничных условий оператора Штурма – Лиувилля по всему спектру (а не по конечному набору собственных частот). Близкая задача рассматривалась в работе [10], но для электрических систем. Это задача идентификации условий заземления через последовательно сосредоточенные самоиндукцию и емкости конденсатора. Восстанавливаются 6 параметров краевых условий по 6 собственным значениям, однако в этом случае получаются лишние решения, которых не будет, если известно большее число собственных значений задачи. В работах [1, 2, 3] восстанавливались только сосредоточенные массы или только жесткости пружинок на концах струнного графа, а не все параметры одновременно.

В данной работе рассматривается задача идентификации сосредоточенных масс и коэффициентов жесткости пружин, сосредоточенных на тупиковых вершинах звездного струнного графа по известному набору собственных частот. Из-за общности уравнений для электрических колебаний в проводе [4, 7] и механических колебаний струны результаты, представленные в данной работе для механической системы, справедливы и для подобной электрической системы. Для электрической сети сосредоточенным массам на концах струнного графа соответствуют индуктивности, а обратные величины коэффициентов упругости (жесткостей) пружин, закрепляющего концы графа, соответствуют емкостям.

Результаты, полученные в данной работе, позволяют получать механические системы с заданным спектром колебаний, проектировать виброзащитные системы, сохраняющие приборы от ударного воздействия, проводить диагностику таких систем, а также диагностировать условия заземления электрических сетей на участках, труднодоступных для визуального осмотра.

Постановка обратной задачи. Рассмотрим граф G в виде звезды из n ребер-струн с одним общим концом в нуле. Длина i-й струны равна l_i. Тупиковые концы струн упруго закреплены, причем каждая из струн может быть закреплена пружинками неодинаковой жесткости h_i. В местах упругого закрепления подвешены-сосредоточены массы m_i. Требуется определить сосредоточенные массы m_i и коэффициенты жесткости пружин h_i струнного графа по собственным частотам колебаний графа. Ниже для наглядности изложения этот метод решения приводится для случая $n = 3$.

Спектральная задача для каждого ребра колеблющегося графа имеет вид

$$y''(x_i) + \lambda \cdot y(x_i) = 0,\ 0 \le x_i \le l_i,\ i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где x_i – расстояние от общего узла по оси OX_i; $y(x_i)$ – вертикальные смещения с выходом из плоскости начального расположения струнного графа, а $s = \sqrt{\lambda}$ – спектральный параметр.

Точка О ($x_i = 0$) является свободной (подвижной). Условия в точке О имеют вид [3]

$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0); \quad (2)$$

$$y_1'(0) + y_2'(0) + y_3'(0) = 0. \quad (3)$$

Краевые условия на тупиковых вершинах таковы:

$$y'(l_i) + \left(h_i - m_i \cdot s^2\right) \cdot y_i(l_i) = 0,\quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Формулы (2) выражают условия непрерывности, а (3) – баланс сил, действующих на общую вершину графа (точку О – узел) со стороны каждого из примыкающих к узлу ребер, условия (4) – условия упругого закрепления ребер (струн) с сосредоточенными массами.

Математически в терминах введенных обозначений сформулируем постановку задачи.

Постановка задачи: *Пусть* $l_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$). *Требуется найти* h_i и m_i *по известному набору собственных значений* s_k *задачи* (1)–(4).

Метод введения дополнительных неизвестных. Перед решением этой обратной задачи напомним, как решается прямая задача нахождения собственных значений.

Решением уравнения (1) является следующая функция:

$$y(x_i) = c_{i1}\cos(sx_i) + c_{i2}\frac{\sin(sx_i)}{s}, \quad (5)$$

где c_{i1} и c_{i2} – произвольные константы. Подставляя функции (5) в (2)–(4) соответственно, получим, что собственные значения s_k задачи (1)–(4) находятся из частотного уравнения

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{s\cdot\sin(l_i s) - \left(h_i - s^2 m_i\right)\cos(l_i s)}{\cos(l_i s) + \left(h_i - s^2 m_i\right)\dfrac{\sin(l_i s)}{s}} = 0,$$

$$i = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Изложим теперь метод решения обратной задачи. Система уравнений (6) при $s = s_k$ ($k = 1, 2, ...,$) является нелинейной относительно неизвестных h_i ($i = 1, 2, 3$) и m_i ($i = 1, 2, 3$). И если для определения 6 неизвестных h_i и m_i использовать также 6 собственных значений, то, как правило, помимо диагностируемых данных окажутся и другие лишние решения. Система может иметь $6! = 720$ наборов решений, из которых достаточно трудоемко исключить лишние решения. Но при решении вышеуказанной задачи машина зависает при расчете, поскольку нужно выдать 720 вариантов наборов 6 параметров. Поэтому для решения этой задачи предложен следующий численный метод – метод введения дополнительных неизвестных. С помощью введения дополнительных неизвестных приведем уравнение (6) к линейному виду:

$$\begin{gathered} x_1 f_1(s) + x_2 f_2(s) + x_3 f_3(s) + x_4 f_4(s) + x_5 f_5(s) + \\ + x_6 f_6(s) + x_7 f_7(s) + +x_8 f_8(s) + x_9 f_9(s) + f_0(s) = 0, \end{gathered} \quad (7)$$

где
$$x_1 = h_1 + h_2 + h_3;\quad x_2 = m_1 + m_2 + m_3;\quad x_3 = h_2 h_3 + h_3 h_1 + h_2 h_1;$$
$$x_4 = \big(h_1(m_2 + m_3) + h_2(m_1 + m_3) + h_3(m_1 + m_2)\big);\quad x_5 = m_3 m_1 + m_2 m_1 + m_3 m_2;\quad x_6 = h_1 h_2 h_3;$$
$$x_7 = m_1 m_2 m_3;\quad x_8 = h_2 h_1 m_3 + h_3 h_1 m_2 + h_3 h_2 m_1;\quad x_9 = m_3 m_2 h_1 + m_3 m_1 h_2 + m_2 m_1 h_3; \tag{8}$$
$$f_0(s) = 3\cdot s^3\cos^2(s)\sin(s);\quad f_1(s) = 2\cdot s^2\cos(s)\sin^2(s) - s^2\cos^3(s);$$
$$f_2(s) = s^4\cos^3(s) - 2\cdot s^4\cos(s)\sin^2(s);\quad f_3(s) = s\cdot\sin^3(s) - 2\cdot s\cdot\cos^2(s)\sin(s);$$
$$f_4(s) = 2\cdot s^3\cos^2(s)\sin(s) - s^3\sin^3(s);\quad f_5(s) = s^5\sin^3(s) - 2\cdot s^5\cos^2(s)\sin(s);$$
$$f_6(s) = -3\cos(s)\sin^2(s);\quad f_7(s) = 3\cdot s^6\cos(s)\sin^2(s);$$
$$f_8(s) = 3\cdot s^2\cos(s)\sin^2(s);\quad f_9(s) = -3\cdot s^4\cos(s)\sin^2(s). \tag{9}$$

Функции $f_0(s), f_1(s), f_2(s), f_3(s), f_4(s), f_5(s), f_6(s), f_7(s), f_8(s), f_9(s)$ являются линейно независимыми функциями аргумента s (по определению линейной независимости функций).

Пусть s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9 – собственные значения задачи (1)–(4) подставим их в (7). В результате получим систему девяти линейных уравнений от девяти неизвестных $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$:

$$x_1 f_1(s_k) + x_2 f_2(s_k) + x_3 f_3(s_k) + x_4 f_4(s_k) + x_5 f_5(s_k) +$$
$$+ x_6 f_6(s_k) + x_7 f_7(s_k) + x_8 f_8(s_k) + x_9 f_9(s_k) + f_0(s_k) = 0,\quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. \tag{10}$$

Из правил Крамера следует, что если определитель матрицы

$$D = \begin{vmatrix}
f_1(s_1) & f_2(s_1) & f_3(s_1) & f_4(s_1) & f_5(s_1) & f_6(s_1) & f_7(s_1) & f_8(s_1) & f_9(s_1)\\
f_1(s_2) & f_2(s_2) & f_3(s_2) & f_4(s_2) & f_5(s_2) & f_6(s_2) & f_7(s_2) & f_8(s_2) & f_9(s_2)\\
f_1(s_3) & f_2(s_3) & f_3(s_3) & f_4(s_3) & f_5(s_3) & f_6(s_3) & f_7(s_3) & f_8(s_3) & f_9(s_3)\\
f_1(s_4) & f_2(s_4) & f_3(s_4) & f_4(s_4) & f_5(s_4) & f_6(s_4) & f_7(s_4) & f_8(s_4) & f_9(s_4)\\
f_1(s_5) & f_2(s_5) & f_3(s_5) & f_4(s_5) & f_5(s_5) & f_6(s_5) & f_7(s_5) & f_8(s_5) & f_9(s_5)\\
f_1(s_6) & f_2(s_6) & f_3(s_6) & f_4(s_6) & f_5(s_6) & f_6(s_6) & f_7(s_6) & f_8(s_6) & f_9(s_6)\\
f_1(s_7) & f_2(s_7) & f_3(s_7) & f_4(s_7) & f_5(s_7) & f_6(s_7) & f_7(s_7) & f_8(s_7) & f_9(s_7)\\
f_1(s_8) & f_2(s_8) & f_3(s_8) & f_4(s_8) & f_5(s_8) & f_6(s_8) & f_7(s_8) & f_8(s_8) & f_9(s_8)\\
f_1(s_9) & f_2(s_9) & f_3(s_9) & f_4(s_9) & f_5(s_9) & f_6(s_9) & f_7(s_9) & f_8(s_9) & f_9(s_9)
\end{vmatrix} \tag{11}$$

системы уравнений (10) отличен от нуля, то неизвестные $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$ находятся единственным образом по формулам $x_j = \dfrac{D_j}{D}$ ($j = 1, 2, ..., 9$), где D_j – определитель матрицы, получаемый заменой j-го столбца столбцом свободных членов.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если s_1, s_2, ..., s_9 являются точными собственными значениями краевой задачи (1)–(4), $D \neq 0$, то система (10) имеет единственное решение $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$, определяемое по формулам Крамера $x_j = \dfrac{D_j}{D}$ ($j = 1, 2, ..., 9$), а значения коэффициентов жесткости пружинок h_1, h_2, h_3 и сосредоточенных масс m_1, m_2, m_3 находятся с точностью до перестановок закреплений на тупиковых концах механической системы местами по формулам (8).

Пример. Пусть

$s_1 = 0.5351947856$; $s_2 = 0.7209194738$;

$s_3 = 1.7077687399$; $s_4 = 3.2007784617$;

$s_5 = 4.7562882600$; $s_6 = 6.312233015$;

$s_7 = 7.8802149625$; $s_8 = 9.4440741650$;

$s_9 = 11.0142910657$

являются собственными значениями краевой задачи L и длины струн $l_1 = l_2 = l_3 = 1$. Требуется найти h_1, h_2, h_3, m_1, m_2, m_3.

Решая систему линейных уравнений (7), получим

$$x_1 = 6.00012454515180;\quad x_2 = 11.0002292716576;\quad x_3 = 6.00012584636183;$$

$$x_4 = 15.0002729440572;\quad x_5 = 74.0013465243788;\quad x_6 = 120.002183553839;$$

$$x_7 = 58.0011800634226;\quad x_8 = 51.0010534591865;\quad x_9 = 138.002713340072.$$

Подставляя $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$ в (8), получим 36 наборов решений, из которых только 6 наборов являются искомыми:

1. {h1 = 3.00027942412555, h2 = 1.00001056019994, h3 = 1.99983456082631, m1 = 6.00196131492730, m2 = 4.00058303446869, m3 = 4.99772859466121};
2. {h1 = 1.99983456082631, h2 = 1.00001056019994, h3 = 3.00027942412555, m1 = 4.99772859466121, m2 = 4.00058303446869, m3 = 6.00196131492730};
3. {h1 = 3.00027942412555, h2 = 1.99983456082631, h3 = 1.00001056019994, m1 = 6.00196131492730, m2 = 4.99772859466121, m3 = 4.00058303446869};
4. {h1 = 1.00001056019994, h2 = 1.99983456082631, h3 = 3.00027942412555, m1 = 4.00058303446869, m2 = 4.99772859466121, m3 = 6.00196131492730};
5. {h1 = 1.99983456082631, h2 = 3.00027942412555, h3 = 1.00001056019994, m1 = 4.99772859466121, m2 = 6.00196131492730, m3 = 4.00058303446869};
6. {h1 = 1.00001056019994, h2 = 3.00027942412555, h3 = 1.99983456082631, m1 = 4.00058303446869, m2 = 6.00196131492730, m3 = 4.99772859466121}.

Итак, закрепления на тупиковых концах механической системы мы можем восстановить с точностью до перестановок их местами по 9 собственным значениям, используя новый метод – метод введения дополнительных неизвестных. В то время как если рассматривать граф из трех струн и восстанавливать одновременно и сосредоточенные массы и коэффициенты жесткости пружинок (6 параметров) на концах струнного графа по 6 собственным значениям, то получим 6! или 720 наборов решений, из которых достаточно трудоемко исключить лишние решения. И при решении задачи машина зависает при расчете, поскольку нужно выдать 720 вариантов наборов 6 параметров.

Список литературы

1. Аксенова З.Ф., Ахтямов А.М. Акустическая диагностика сосредоточенных масс на концах струнного графа с упругим закреплением на концах // Вестник Башкирского университета. – 2014. – Т. 19, № 1. – С. 14–18.

2. Ахтямов А.М., Аксенова З.Ф. Восстановление сосредоточенных масс на тупиковых вершинах струнного графа // В мире научных открытий. – 2013. – № 2.1 (38). – С. 56–67.

3. Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. – М.: Физматлит, 2009. – 272 с.

4. Ахтямов А.М., Ямилова Л.С. Идентификация условий замыкания провода по собственным частотам колебаний напряжения переменного тока // Электромагнитные волны и электронные система. – 2006. – Т. 11, № 2–3, – С. 15–17.

5. Валеев Н.Ф., Рабцевич С.А., Нугуманов Э.Р. О задаче определения параметров граничных условий оператора Штурма-Лиувилля по спектру // Вестник СамГУ. Серия: Естественнонаучная. – 2009. – № 6 (72). – С. 12–20.

6. Кадченко С.И. Численный метод решения обратных задач, порожденных возмущенными самосопряженными операторами, методом регуляризованных следов // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2013. – № 6 (107).

7. Какушкин С.Н. Математическое моделирование спектральной задачи об электрических колебаниях в протяженной линии методом регуляризованных следов // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6, № 3.

8. Капустин Н.Ю. О классической задаче с комплекснозначным коэффициентом и спектральным параметром в граничном условии // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 10. – С. 1361–1367.

9. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. – М.: Наука, 1984. – 240 с.

10. Мартынова Ю.В. Модельная обратная спектральная задача для оператора Штурма–Лиувилля на геометрическом графе // Вестник Башкирского университета. – 2011. – Т. 16, № 1. – С. 4–10.

11. Покорный Ю.В., Пенкин О.М. и д.р. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. – М.: Физматлит, 2004. – 272 с.

12. Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009. – 184 с.

13. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 384 с.

14. Benedek A.I., Panzone R. Problemas de contorno para equaciones differenciales ordinarias de sequndo orden con condiciones de borde dependientes del parametro spectral // Trab. Mat. Inst/ argent. mat, 1983. – № 53. – P. 1–21.

15. Kapustin N.Yu., Moiseev E.I. Spectral problems with the spectral parameter in the boundary condition // Differential Equations. – 1997. – T. 33, № 1. – С. 116–120.

References

1. Aksenova Z.F., Ahtyamov A.M. Akusticheskaya diagnostika sosredotochennykh mass na kontcakh strunnogo grafa s uprugim zakrepleniem na kontcakh // Vestnik Bashkirskogo universiteta. 2014. T. 19, no. 1. pp. 14–18.

2. Ahtyamov A.M., Aksenova Z.F. Vosstanovlenie sosredotochennykh mass na tupikovykh vershinakh strunnogo grafa // V mire nauchnykh otkrytiy. 2013. no. 2.1 (38). pp. 56–67.

3. Ahtyamov A.M. Teoriya identifikatcii kraevykh usloviy i ee prilozhenija. M.: Fizmatlit, 2009. 272 p.

4. Ahtyamov A.M., Yamilova L.S. Identifikatciya usloviy zamykaniya provoda po sobstvennym chastotam kolebaniy napryazheniya peremennogo toka // Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy. 2006. T. 11, no. 2–3, pp. 15–17.

5. Valeev N.F., Rabcevich S.A., Nugumanov E.R. O zadache opredeleniya parametrov granichnykh usloviy operatora Shturma-Liuvillya po spektru // Vestnik SamGU. Seriya: Estestvennonauchnaya. 2009. no. 6 (72). pp. 12–20.

6. Kadchenko S.I. Chislennyy metod resheniya obratnykh zadach, porozhdennykh vozmu-shhennymi samosopryazhennymi operatorami, metodom regulyarizovannykh sledov // Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaya seriya. 2013. no. 6 (107).

7. Kakushkin S.N. Matematicheskoe modelirovanie spektralnoy zadachi ob elektricheskikh kolebaniyakh v protyazhennoy linii metodom regulyarizovannykh sledov // Vestnik YuUr-GU. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie. 2013. T. 6, no. 3.

8. Kapustin N.Yu. O klassicheskoy zadache s kompleksnoznachnym koefficientom i spektralnym parametrom v granichnom uslovii // Differencialnye uravneniya. 2012. T. 48, no. 10. pp. 1361–1367.

9. Levitan B.M. Obratnye zadachi Shturma-Liuvillya. M.: Nauka, 1984. 240 p.

10. Martynova Yu. V. Modelnaya obratnaya spektralnaya zadacha dlya operatora Shturma–Liuvillya na geometricheskom grafe // Vestnik Bashkirskogo universiteta. 2011. T. 16, no. 1. pp. 4–10.

11. Pokornyy Yu.V., Penkin O.M. i d.r. Differencialnye uravneniya na geometricheskikh grafakh. M.: Fizmatlit, 2004. 272 p.

12. Sadovnichiy V.A., Sultanaev Ya.T., Ahtyamov A.M. Obratnye zadachi Shturma-Liuvillya s neraspadayushhimisya kraevymi usloviyami. M.: Izd-vo Mosk. un-ta, 2009. 184 p.

13. Jurko V.A. Vvedenie v teoriyu obratnykh spektralnykh zadach. M.: FIZMAT-LIT, 2007. 384 p.

14. Benedek A.I., Panzone R. Problemas de contorno para equaciones differenciales ordi-narias de sequndo orden con condiciones de borde dependientes del parametro spectral // Trab. Mat. Inst/ argent. mat, 1983. no. 53. pp. 1–21.

15. Kapustin N.Yu., Moiseev E.I. Spectral problems with the spectral parameter in the boundary condition // Differential Equations. 1997. T. 33, no. 1. pp. 116–120.

Рецензенты:

Спивак С.И., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой математического моделирования, ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет», г. Уфа;

Султанаев Я.Т., д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник лаборатории «Механика твердого тела», ФГБУН «Институт механики им. Р.Р. Мавлютова» Уфимского научного центра Российской академии наук, г. Уфа.