

УДК 621.314.5:517.518.4

## РАСЧЁТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОКА ПО ПОПЕРЕЧНОМУ СЕЧЕНИЮ РЕЛЬСОТРОНА

<sup>1</sup>Колчанова В.А., <sup>2</sup>Стеглянникова С.Ю.

<sup>1</sup>ФГБОУ ВПО «НИ ТПУ» («Национальный исследовательский

Томский политехнический университет»), Томск, e-mail: ni105@mail.ru;

<sup>2</sup>Национальный исследовательский Томский университет, Томск, e-mail: stekljannik@mail.ru

Приводится алгоритм определения распределения тока по поперечному сечению рельсотрона при воздействии синусоидального однополярного импульса на основе разложения импульса в ряд Фурье с дальнейшим определением активного сопротивления и индуктивности рельсотрона на единицу длины. При расчёте распределения плотности тока по сечению рельсотрона применялся принцип наложения. Несинусоидальный импульс тока рассчитывается как ток от действия пяти гармоник, амплитуды и начальные фазы которых определяются с использованием разложения в ряд Фурье. Погонное индуктивное и активное сопротивление рельсотрона при различных частотах определяется на основе расчёта электромагнитного поля с помощью теоремы Умова – Пойтинга в комплексной форме. Расчет электромагнитного поля проведен на основе метода конечных элементов. Решения получены с помощью программно-интегрированной среды MathCAD. Для реализации метода конечных элементов был использован пакет Matlab.

**Ключевые слова:** рельсотрон, скин-эффект, электромагнитное поле, плотность тока, метод конечных элементов

## CALCULATION CURRENT DISTRIBUTION OVER THE CROSS-SECTION OF THE RAILGUN

<sup>1</sup>Kolchanova V.A., <sup>2</sup>Steklyannikova S.Y.

<sup>1</sup>National research Tomsk polytechnic university, Tomsk, e-mail: ni105@mail.ru;

<sup>2</sup>National research Tomsk State University, Tomsk, e-mail: stekljannik@mail.ru

An algorithm for calculating the current distribution over the cross section of the railguns when exposed to a sinusoidal unipolar pulse based on the expansion of the pulse in a Fourier series with the further definition of active resistance and inductance per unit length of the railgun. When calculating the current density distribution over the cross section of the railgun applied the principle of superposition. A non-sinusoidal current pulse is calculated as the current actions of the five harmonics, amplitude and initial phase are determined using Fourier series. Inductance and resistance railgun at different frequencies is determined by calculating the electromagnetic field with the help of Theorem Poynting-Pointing in complex form. The calculation of the electromagnetic field performed on the basis of the finite element method. Solutions obtained by using software-integrated environment MathCAD. For realization of the finite element method was used package Matlab.

**Keywords:** railguns, skin effect, current density, electromagnetic field, inductance, resistance, parameters, finite element method

Рельсотрон – импульсный электродный ускоритель масс, состоящий из двух параллельных электропроводных шин, вдоль которых движется электропроводная масса (снаряд или плазма) [8]. Принцип работы основан на превращении электрической энергии в кинетическую энергию снаряда. С изготовлением рельсотрона связан ряд серьезных проблем: импульс должен быть настолько мощным и резким, чтобы снаряд не успел бы испариться и разлететься, но возникла бы ускоряющая сила, разгоняющая его вперед. Поэтому материал снаряда и рельс должен обладать как можно более высокой проводимостью, снаряд как можно меньшей массой, а источник тока как можно большей мощностью и меньшей индуктивностью [5, 6].

Количественное определение указанных характеристик позволит глубже познать особенности физических процессов, происходящих в рельсотроне, а также мно-

гих электрофизических устройств, работающих в импульсном электромагнитном поле (ЭМП), когда при проектировании и оптимизации их работы возникает необходимость расчета параметров с учетом проникновения (диффузии) ЭМП в массивные проводники [7]. В работе предложена математическая модель для исследования процессов, происходящих в рельсотроне, и алгоритм расчета электрических параметров на основе расчета энергии электромагнитного поля.

Необходимо учесть, что распределение плотности тока по сечению рельсотрона неравномерно. Форма импульса тока – несинусоидальна. Поэтому при расчёте распределения плотности тока по сечению проводника применялся принцип наложения. В соответствии с принципом суперпозиции (наложения) расчёт можно вести для каждой гармоники отдельно. Рассмотрим несинусоидальный импульс тока как ток

от действия пяти гармоник, амплитуды и начальные фазы которых определяются с использованием разложения в ряд Фурье. Гармониками выше пятой можно пренебречь, степень приближения к исходному импульсу можно оценить, используя теорему Парсеваля [7]:

$$\Delta = \frac{\int_0^T f(t)^2 dt - \left[ F_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=5} (A_k^2 + B_k^2) \right]}{\int_0^T f(t)^2 dt} \times$$

$$\times 100 \% = 0,801 \%,$$

где  $k$  – номер гармоники;  $F_0$ ,  $A_k$ ,  $B_k^2$  – постоянная составляющая, амплитуды косинусной и синусной составляющей  $k$ -й гармоники;  $f(t)$  – исследуемая функция;  $T$  – период.

Качественно приближения к исходному импульсу демонстрирует рис. 1. Сплошной линией изображена исходная функция, пунктирной – полученная в результате сложения пяти гармоник и постоянной составляющей,  $I_m$  – амплитуда од-

нополярного синусоидального импульса. Определим частотный спектр импульса. Для этого разложим импульс в ряд Фурье, определив коэффициенты разложения  $A_k$ ,  $k = 0, \dots, N$ . Для определения коэффициентов использовалась стандартная программа быстрого преобразования Фурье (FFT) программно-интегрированной среды MathCAD. Далее функция представлялась в виде ряда:

$$U(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^N |A_k| \sin\left(\omega kt + \arg(A_k) + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{где } \omega = \frac{2\pi}{T}; \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T U(t) \cos(\omega kt) dt;$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T U(t) \sin(\omega kt) dt; \quad A_k = a_k + jb_k.$$

Спектр и результат восстановления функции по коэффициентам представлены ниже.

Число коэффициентов разложения бралось  $N = 15$ . Из спектра импульса видно, что, начиная с 5 гармоники, относительный вклад высших гармоник в импульсе не превышает 5%.

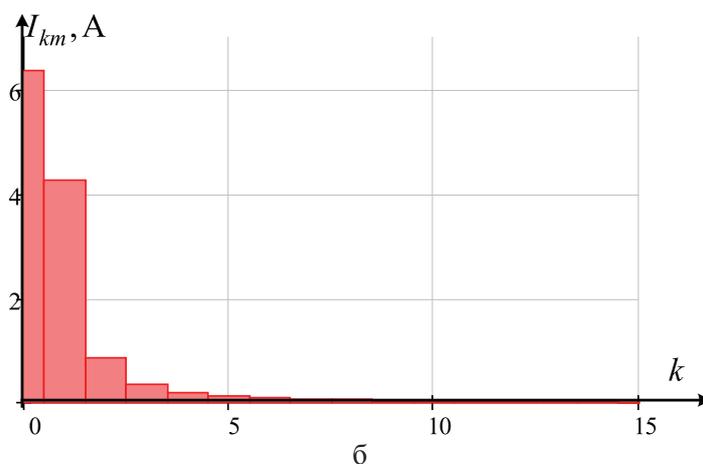
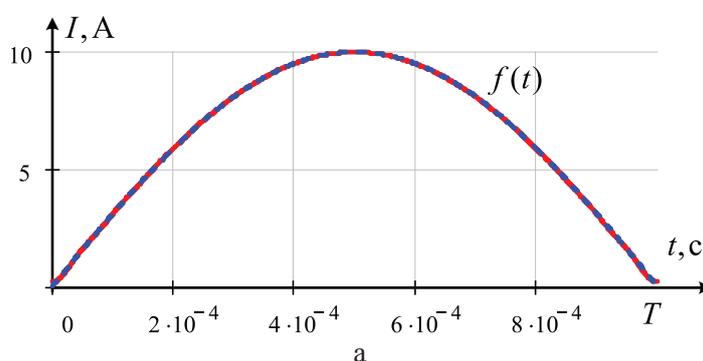


Рис. 1. Однополярный импульс:  
а – исходный импульс показан сплошной линией, пунктирной показан импульс, полученный в среде MathCAD; б – амплитудно-частотный спектр

Зная геометрические размеры рельсотрона, решаем уравнение электрического поля в проводнике (1) численным методом интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных путем сведения их к уравнениям в конечных разностях [2, 4].

$$-\nabla\left(\frac{1}{\mu}\nabla E\right)+(j\omega\gamma-\omega^2\varepsilon)E=0, \quad (1)$$

где  $E$  – напряженность электрического поля;  $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$  – магнитная постоянная;  $\gamma = 57 \cdot 10^6$  1/(Ом·м) – удельная проводимость (для меди);  $\varepsilon = 8,86 \cdot 10^{-12}$  – электрическая постоянная;  $\omega$  – угловая частота.

В проводящей среде даже при очень высоких частотах произведение  $\omega^2\varepsilon$  много меньше  $\omega\gamma$ . Поэтому с большой степенью точности слагаемым  $\omega^2\varepsilon E$  можно пренебречь.

Программная среда pdeTool математического пакета Matlab позволяет найти решения дифференциальных уравнений в двумерных областях методом конечных элементов [1, 3]. В результате получаем массив распределения плотности тока по поперечному сечению рельсотрона. Графики распределения плотности тока по сечению даны на рис. 2. С увеличением частоты плотность тока возрастает к периферии рельсотрона. Электрическое поле определяется через плотность  $\vec{\delta}$  тока проводимость  $\gamma$

$$\vec{\delta} = \gamma \cdot \vec{E}.$$

Зная распределение тока по сечению, можно вычислить напряженности поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Электрическое поле определяется через плотность  $\vec{J}$  тока проводимость  $\gamma$ .  $\vec{E} = \vec{j} \cdot \gamma$ .

Об адекватности метода можно судить по совпадению полученных результатов с известным расчётом распределения плотности тока круглого проводника с использованием функций Бесселя [2, с. 168–170], на рис. 3, б – пунктирная линия, с использованием среды pdeTool математического пакета Matlab – сплошная линия.

Электрическое поле и магнитное связаны уравнением Максвелла.

$$-j\omega\mu\vec{H} = \text{rot}\vec{E}.$$

Откуда определяется напряженность магнитного поля с учётом того, что у вектора напряжённости электрического поля присутствует только z-я составляющая (ось z направим вдоль оси рельсотрона (рис. 4))

$$\vec{H} = j \frac{1}{\omega\mu} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & E_z \end{vmatrix} = j \frac{1}{\omega\mu} \left[ \vec{i} \left( \frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial}{\partial z} E_x - \frac{\partial}{\partial x} E_z \right) \right].$$

Известно, что операция дифференцирования является некорректно поставленной задачей (в частности, малые ошибки могут вызвать сколь угодно большие ошибки в производной). Для устойчивого дифференцирования функции  $E(x, y)$ , заданной в виде дискретного массива данных в расчётных точках  $x_i, y_i$  значениями  $\vec{E}(x_i; y_i)$  в качестве приближения для  $E(x, y)$  примем *сглаживающий кубический сплайн* (СКС).

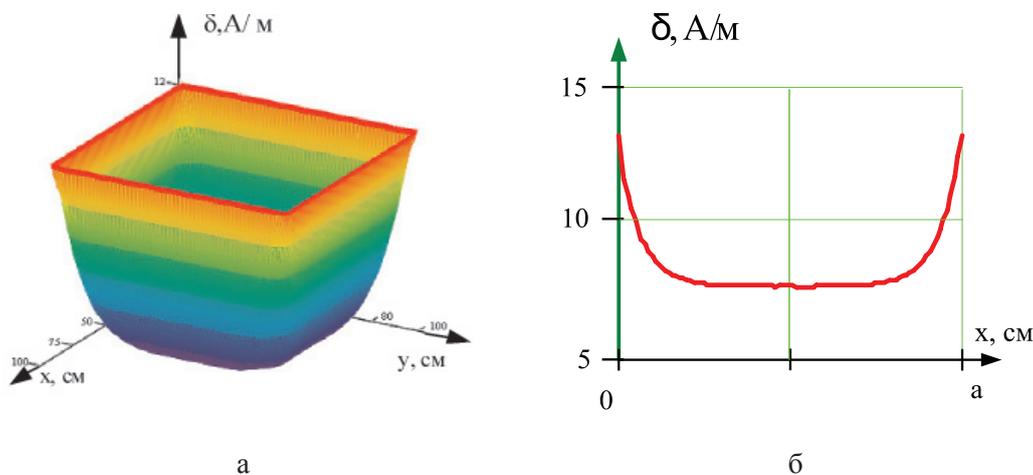


Рис. 2.  
а – распределение плотности тока по объёму рельсотрона;  
б – профиль распределения плотности тока, где  $a$  – ширина рельсотрона

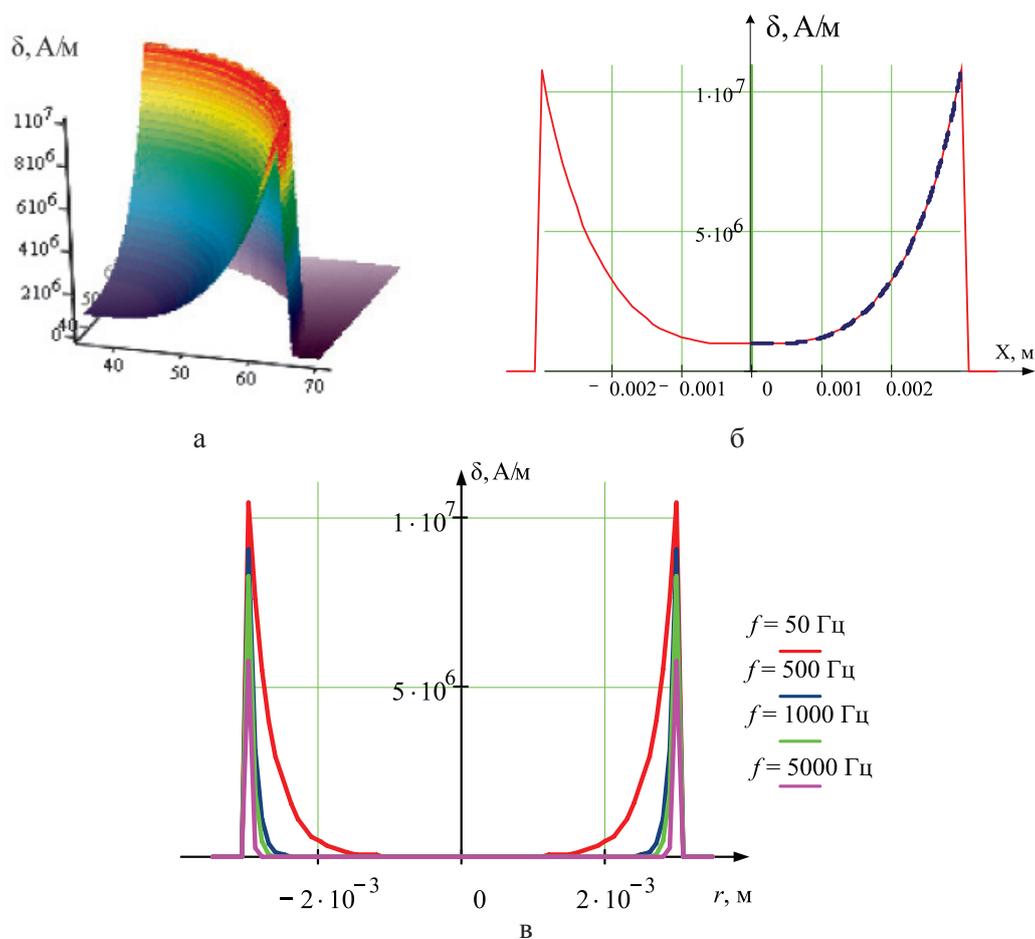


Рис. 3.

а – распределение плотности тока по объёму проводника;  
 б – профиль распределения плотности тока, где  $x$  – радиус проводника в метрах;  
 в – распределение тока в цилиндрическом медном  $\gamma = 57 \cdot 10^6$  Ом·м проводе для разных частот

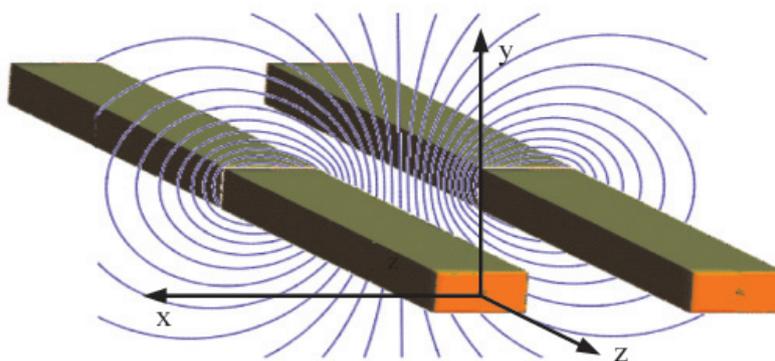


Рис. 4. Магнитное поле рельсотрона и ориентация осей декартовой системы координат для расчёта ЭМП методом конечных элементов

Вследствие того, что ток и магнитное поле распределяются внутри рельсотрона неравномерно, активное сопротивление и индуктивность для переменного тока отличаются от соответствующих значений квазистационарного тока.

Активное и индуктивное сопротивление рельсотрона при различных частотах определим с помощью теоремы Умова – Пойтинга в комплексной форме. С этой целью рассчитаем поток Пойтинга через боковую поверхность рельсотрона на длине в 1 метр

и разделим на квадрат тока, протекающего по рельсотрону; получаем комплексное сопротивление на единицу длины [2].

$$\oint \left[ \vec{E} \vec{H}^* \right] d\vec{s} = I^2 R + jI^2 \omega L;$$

$$R + j\omega L = \frac{\oint \left[ \vec{E} \vec{H}^* \right] d\vec{s}}{I^2}. \quad (2)$$

Из (2) определяется индуктивность рельсотрона и активное сопротивление на единицу длины для каждой расчётной гармоники входного тока.

$$R = \operatorname{Re} \left[ \left( \oint \left[ \vec{E} \vec{H}^* \right] d\vec{s} \right) / I^2 \right];$$

$$L = \operatorname{Im} \left[ \left( \oint \left[ \vec{E} \vec{H}^* \right] d\vec{s} \right) / (I^2 \omega) \right].$$

### Выводы

Приводится алгоритм определения распределения тока по поперечному сечению рельсотрона при воздействии синусоидального однополярного импульса на основе разложения импульса в ряд Фурье с дальнейшим определением величин погонной индуктивности и активного сопротивления рельсотрона для каждой расчётной гармоники тока. Полученная математическая модель позволяет определить распределения тока по поперечному сечению рельсотрона с достоверной погрешностью для дальнейших исследований без использования натурного эксперимента. Апробация метода была произведена на примере расчёта плотности тока проводника круглого сечения [2, с. 168–170].

### Список литературы

1. Ануфриев И.Е. Самоучитель Matlab 5.3/6.x. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 736 с.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электромагнитное поле: учебное пособие. – 8-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1986. – 263 с.
3. Васильева О.В. Моделирование электромагнитного привода вакуумного выключателя // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 3 (Электронный жур-

нал); URL: [www.science-education.ru/109-9347](http://www.science-education.ru/109-9347) (дата обращения: 08.01.2015).

4. Измайлов С.В. Курс электродинамики: учебное пособие. – М.: Учпедгиз, 1962. – 440 с.

5. Носов Г.В. К расчету параметров и эффективности преобразования энергии рельсотроном // Известия Томского политехнического университета. – 2007. – т. 310. – № 2. – С. 70–73.

6. Носов Г.В., Косилова Д.Ю. Параметры скин-слоя массивных ферромагнитных проводников в установившемся режиме при синусоидальном электромагнитном поле // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 3 (Электронный журнал); URL: [www.science-education.ru/109-9201](http://www.science-education.ru/109-9201) (дата обращения: 08.01.2015).

7. Толстов Г.П. Ряды Фурье. – М.: Наука, 1980. – 381 с.

8. Vasiljeva O.V., Isaev Y.N., Budko A.A., Filkov A.I. Assessment of thermodynamic parameters (Article number 012026) // Journal of Physics: Conference Series. – 2014 – Vol. 552 – № 1. – P. 1–5; <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=6986867&isnumber=6986840>.

### References

1. Anufriev I.E. Samouchitel' Matlab 5.3/6.x. SPb.: BKhV-Peterburg, 2003. 736 p.
2. Bessonov L. A. Teoreticheskie osnovy ehlektrotekhniki: Ehlektromagnitnoe pole: uchebnoe posobie / L.A. Bessonov. 8-e izd., pererab. i dop. M.: Vysshaja shkola, 1986. 263 p.
3. Vasileva O.V. Modelirovanie ehlektromagnitnogo privoda vakuumnogo vykljuchatelja // Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya. 2013. no. 3 (Ehlektronnyj zhurnal); URL: [www.science-education.ru/109-9347](http://www.science-education.ru/109-9347) (data obrashhenija: 08.01.2015).
4. Izmajlov S.V. Kurs ehlektrodinamiki : uchebnoe posobie. M.: Uchpedgiz, 1962. 440 p.
5. Nosov G.V. K raschetu parametrov i ehffektivnosti preobrazovaniya ehnergii rel'sotonom // Izvestija Tomskogo politekhnicheskogo universiteta, 2007 t. 310, no. 2. pp. 70–73.
6. Nosov G.V., Kosilova D.Ju. Parametry skin-sloja massivnykh ferromagnitnykh provodnikov v ustanovivshemsja rezhime pri sinusoidal'nom ehlektromagnitnom pole // Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya. 2013. no. 3 (Ehlektronnyj zhurnal); URL: [www.science-education.ru/109-9201](http://www.science-education.ru/109-9201) (data obrashhenija: 08.01.2015).
7. Tolstov G.P. Rjady Fur'e / G. P. Tolstov. M.: Nauka, 1980. 381 p.
8. Vasiljeva O.V., Isaev Y.N., Budko A.A., Filkov A.I. Assessment of thermodynamic parameters (Article number 012026) // Journal of Physics: Conference Series. 2014 Vol. 552 no. 1. pp. 1–5; <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=6986867&isnumber=6986840>.

### Рецензенты:

Усов Ю.П., д.т.н., профессор кафедры ЭСиЭ ЭНИН, ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский Томский политехнический университет», г. Томск;

Канев Ф.Ю., д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Институт оптики и атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН, г. Томск.

Работа поступила в редакцию 03.02.2015.