

УДК 624.01 : 624.04+624.07

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ АРКИ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА

Аваков А.А., Чепурненко А.С., Литвинов С.В.

ФГБОУ ВПО «Ростовский государственный строительный университет»,
Ростов-на-Дону, e-mail: litv_step@mail.ru

В статье приводится методика расчета железобетонных арок методом конечных элементов с учетом ползучести бетона. В качестве примера рассматривается железобетонная арка параболического очертания, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой. Приводятся следующие этапы: постановка задачи, формирование расчетной схемы, вывод уравнений метода конечных элементов, решение, представление и анализ результатов. На основе вязкоупругой модели наследственного старения бетона исследуется вопрос перераспределения напряжений между бетоном и арматурой вследствие ползучести бетона. Задача решается методом конечных элементов. По результатам расчета приводятся графики изменения напряжений в бетоне по высоте сечения во времени в середине пролёта арки, а также изменение напряжений в арматуре по длине балки у верхней и нижней граней.

Ключевые слова: метод конечных элементов, ползучесть бетона, вязкоупругая модель наследственного старения, железобетонная арка, напряженно-деформированное состояние

STRESS-STRAIN STATE OF REINFORCED CONCRETE ARCH WITH CREEP OF CONCRETE

Avakov A.A., Chepurnenko A.S., Litvinov S.V.

FGBOU VPO «The Rostov state construction university»,
Rostov-on-Don, e-mail: litv_step@mail.ru

The article provides a finite element method for calculation of reinforced concrete arches with the creep of concrete. As an example, the reinforced concrete arch of parabolic shape, loaded with a uniformly distributed load is considered. We give the following stages of calculation: formulation of the problem, the formation of design scheme, derivation of the finite element method, the solution, presentation and analysis of results. On the basis of a viscoelastic model of hereditary aging concrete we explore redistribution of stresses between the concrete and reinforcement due to creep of concrete. The problem is solved by finite element method. According to the results of calculation are graphs of stresses in the concrete section through height in time in the middle of the span of the arch, as well as changing the stress in the reinforcement along the beam at the top and bottom faces.

Keywords: finite element method, the creep of concrete, viscoelastic model of hereditary aging, reinforced concrete arch, the stress-strain state

Железобетонные арки, благодаря своей высокой несущей способности, находят широкое применение в строительстве. Так как в поперечных сечениях арки возникают два основных внутренних силовых фактора: изгибающий момент и продольная сила, то конструирование арок выполняются по общим правилам для внецентренно сжатых элементов.

Для железобетонных колонн, испытывающих внецентренное сжатие, имеются теоретические и экспериментальные данные о том, что вследствие ползучести бетона происходит перераспределение напряжений между арматурой и бетоном [1–6]. Аналогичное явление возможно и для арок. В настоящей статье рассматривается методика расчета железобетонных арок с учетом ползучести бетона методом конечных элементов. Расчетная схема, а также поперечное сечение арки показаны соответственно на рис. 1.

В качестве закона, описывающего связь между напряжениями и деформациями бетона, будем использовать уравнение вязкоупругой модели наследственного старения (ВУМНС) [1], которое имеет вид

$$\varepsilon_b(t) = \frac{\sigma_b(t)}{E_b(t)} - \int_{\tau_0}^t \sigma_b(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (1)$$

где $\varepsilon_b(t)$ – деформация бетона; $\sigma_b(t)$ – напряжение в бетоне; $E_b(t)$ – модуль упругости бетона; $C(t, \tau)$ – мера ползучести, которая имеет вид

$$C(t, \tau) = C \frac{e^{\alpha t} - e^{\alpha \tau}}{e^{\alpha t} - 1} + B(e^{-\gamma t} - e^{-\gamma \tau}). \quad (2)$$

Перепишем уравнение (2) в виде

$$\varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_b} + \varepsilon_b^*, \quad (3)$$

где $\varepsilon_b^* = - \int_{\tau_0}^t \sigma_b(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau$ – деформация ползучести.

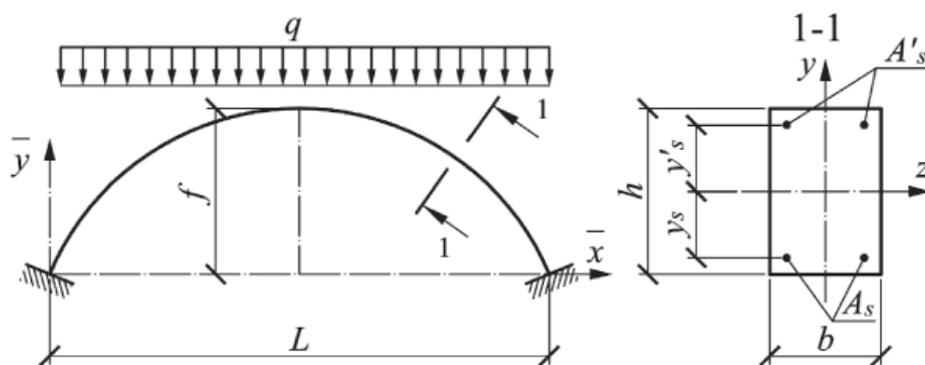


Рис. 1. Расчётная схема и поперечное сечение арки

Выразим в (3) напряжение через деформацию:

$$\sigma_b = E_b (\varepsilon_b - \varepsilon_b^*). \quad (4)$$

Полная деформация бетона представляет собой сумму осевой деформации $\varepsilon_0 = \frac{du}{dx}$ и деформации, обусловленной изменением кривизны:

$$\varepsilon_b = \varepsilon_0 - y \frac{d^2v}{dx^2}. \quad (5)$$

Деформации арматуры запишутся в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \varepsilon_0 + y_s \frac{d^2v}{dx^2}; \\ \varepsilon'_s &= \varepsilon_0 - y'_s \frac{d^2v}{dx^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Потенциальная энергия деформации представляет собой сумму потенциальной энергии бетона и арматуры:

$$\Pi = \Pi_b + \Pi_s + \Pi'_s. \quad (7)$$

Потенциальная энергия бетона определяется следующим выражением

$$\Pi_b = \frac{1}{2} \int_{V_b} \sigma_b \varepsilon_b^{el} dV, \quad (8)$$

где $\varepsilon_b^{el} = \varepsilon_b - \varepsilon_b^*$ – упругая деформация бетона.

Подставив (4) и (5) в (8), получим:

$$\begin{aligned} \Pi_b &= \frac{1}{2} E_b \int_{V_b} (\varepsilon_0 - y \frac{d^2v}{dx^2} - \varepsilon_b^*)^2 dV = \\ &= \frac{1}{2} E_b \left[A_b \int_{(l)} \varepsilon_0^2 dx + I_b \int_{(l)} \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx + \int_{V_b} (\varepsilon_b^*)^2 dV - 2 \int_{(l)} \varepsilon_0 dx \int_A \varepsilon_b^* dA + 2 \int_{(l)} \frac{d^2v}{dx^2} dx \int_A \varepsilon_b^* y dA \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где $I_b = \frac{bh^3}{12}$ – момент инерции бетона; $A_b = bh$ – площадь бетонного сечения.

Потенциальная энергия деформации арматуры, расположенной у нижней грани, может быть найдена следующим образом:

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_{V_s} \sigma_s \varepsilon_s dV = \frac{1}{2} E_s A_s \int_{(l)} \left(\varepsilon_0^2 + 2\varepsilon_0 y_s \frac{d^2v}{dx^2} + y_s^2 \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 \right) dx. \quad (10)$$

Аналогично для арматуры верхней грани:

$$\Pi'_s = \frac{1}{2} \int_{V'_s} \sigma'_s \varepsilon'_s dV = \frac{1}{2} E_s A'_s \int_{(l)} \left(\varepsilon_0^2 - 2\varepsilon_0 y'_s \frac{d^2v}{dx^2} + (y'_s)^2 \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 \right) dx. \quad (11)$$

В случае симметричного армирования ($A_s = A'_s$, $y_s = y'_s$) для потенциальной энергии деформации всей арматуры получим

$$\Pi_s + \Pi'_s = \frac{1}{2} E_s \left(A_{s, \text{общ}} \int_{(l)} \varepsilon_0^2 dx + I_s \int_{(l)} \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx \right), \quad (12)$$

где $I_s = A_s y_s^2 + A'_s (y'_s)^2$ – момент инерции арматуры.

Для расчета будет использоваться стержневой конечный элемент, показанный на рис. 2. В каждом узле данного элемен-

та имеется 3 степени свободы: 2 линейных перемещения u и v , а также угол поворота φ . Вектор узловых перемещений запишется в виде

$$\{U\} = \{u_i \ u_j \ v_i \ \varphi_i \ v_j \ \varphi_j\}.$$

Прогиб конечного элемента будем аппроксимировать следующим образом:

$$v(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 = \begin{Bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{Bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{Bmatrix} \{\alpha\}. \quad (13)$$

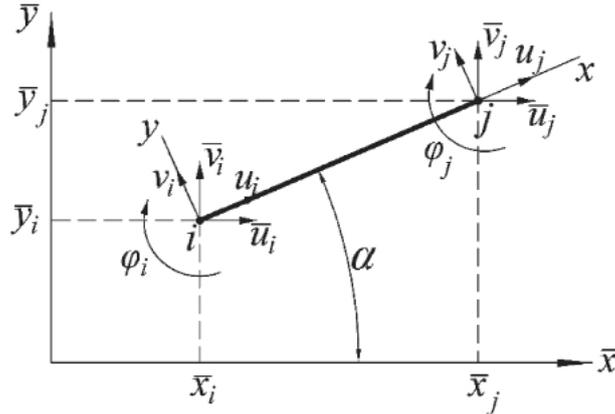


Рис. 2. Стержневой конечный элемент

Вектор $\{\alpha\}$ найдем из следующих условий:

$$v(0) = v_i, \quad \varphi(0) = -\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = \varphi_i, \quad v(l) = v_j, \quad \varphi(l) = -\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=l} = \varphi_j.$$

$$\{\alpha\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{l^2} & \frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & \frac{1}{l} \\ 0 & 0 & \frac{2}{l^3} & -\frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & -\frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \{U\} = [F] \{U\}. \quad (14)$$

Вторая производная прогиба запишется в виде

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \{0 \ 0 \ 2 \ 6x\} \{\Phi\} \{U\}. \quad (15)$$

Для осевых перемещений u принимаем линейную зависимость от x :

$$u = \left(1 - \frac{x}{l}\right) u_i + \frac{x}{l} u_j. \quad (16)$$

Тогда осевая деформация ϵ_0 будет определяться следующим образом:

$$\epsilon_0 = \frac{du}{dx} = \left\{ -\frac{1}{l} \ \frac{1}{l} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right\} \{U\}. \quad (17)$$

Подставив (15) и (17) в (9) и (12), получим следующее выражение для потенциальной энергии железобетонного элемента:

$$\Pi = \frac{1}{2} \{U\}^T [K] \{U\} - \{U\}^T \{F_b^*\} + \frac{1}{2} E_b \int_V (\epsilon_b^*)^2 dV, \quad (18)$$

где $[K] = \begin{bmatrix} [K_c] \\ [K_u] \end{bmatrix}$ – матрица жесткости, которая имеет блочную структуру; $\{F_b^*\}$ – вклад деформаций ползучести бето-

на в вектор узловых нагрузок;

$$[K_c] = \frac{EA_{red}}{l} \begin{bmatrix} 11 & - \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; [K_u] = EI_{red} \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix},$$

где $EA_{red} = E_b A_b + E_s A_{s, общ}$ – жесткость приведенного сечения при центральном растяжении (сжатии); $EI_{red} = E_b I_b + E_s I_s$ – жесткость приведенного сечения при изгибе.

$$\{F_b^*\} = E_b \left(\int_A \varepsilon_b^* dA \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_A \varepsilon_b^* y dA \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right). \quad (19)$$

Окончательно задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений, имеющей вид

$$[K]\{U\} = \{F_q\} + \{F_b^*\}, \quad (20)$$

где $\{F_q\}$ – вектор внешних узловых нагрузок.

Определение деформаций ползучести. В соответствии с выбранной реологической моделью деформация ползучести бетона определяется следующим образом:

$$\varepsilon_b^* = - \int_{\tau_0}^t \sigma_b(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \varepsilon_{b1}^* + \varepsilon_{b2}^*, \quad (21)$$

$$\text{где } \varepsilon_{b1}^* = \frac{C\alpha}{e^{\alpha t} - 1} \int_{\tau_0}^t \sigma_b(\tau) e^{\alpha \tau} d\tau;$$

$$\varepsilon_{b2}^* = B\gamma \int_{\tau_0}^t \sigma_b(\tau) e^{-\gamma \tau} d\tau.$$

Найдем производную каждой составляющей по времени:

$$\frac{\partial \varepsilon_{b1}^*}{\partial t} = \frac{\alpha e^{\alpha t}}{e^{\alpha t} - 1} (C\sigma_b(t) - \varepsilon_{b1}^*); \quad (22)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{b2}^*}{\partial t} = B\gamma \sigma_b(t) e^{-\gamma t}.$$

Методика решения задачи. Рассматриваемый временной интервал разбивается на n шагов Δt , а поперечное сечение каждого элемента по высоте на m частей Δy . На первом шаге выполняется решение упругой задачи ($\varepsilon_b^* = 0$). По найденным перемещениям

вычисляются напряжения, а по напряжениям находятся скорости роста составляющих ε_{b1}^* и ε_{b2}^* по формулам (22). Компоненты деформации ползучести в момент времени $t + \Delta t$ определяются при помощи линейной аппроксимации.

Была решена модельная задача при следующих исходных данных: пролет арки $L = 16$ м, подъем $f = 3,2$ м, $b = 20$ см, $h = 40$ см, $\tau_0 = 28$ сут, $E_b(\tau_0) = 3 \cdot 10^4$ МПа, реологические константы $\alpha = 0,032$, $\gamma = 0,062$, $C = 3,77 \cdot 10^{-5}$ МПа⁻¹, $B = 5,68 \cdot 10^{-5}$ МПа⁻¹, коэффициент армирования $\mu = \frac{A_{s, общ}}{A_b} = 0,03$,

$y_s = y'_s = 15$ см, $E_s = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Рис. 3 – изменение напряжений в бетоне в середине пролёта. Рис. 4–5 – соответственно графики изменения напряжений в арматуре у верхней и нижней грани.

Из рис. 3–5 видно, что вследствие ползучести бетона происходит перераспределение напряжений: в бетоне напряжения по абсолютному значению снижаются, а в арматуре возрастают. У верхней грани наиболее существенно меняются напряжения в середине пролёта: в арматуре сжимающие напряжения σ_s возрастают с 52,48 до 97,46 МПа, а в бетоне убывают с 8,27 до 6,84 МПа.

У нижней грани наиболее значительное перераспределение происходит в сечениях $x = 0$ и $x = l$: в арматуре сжимающие напряжения σ_s возрастают с 70,7 до 131,4 МПа, а в бетоне убывают с 11,3 до 9,35 МПа.

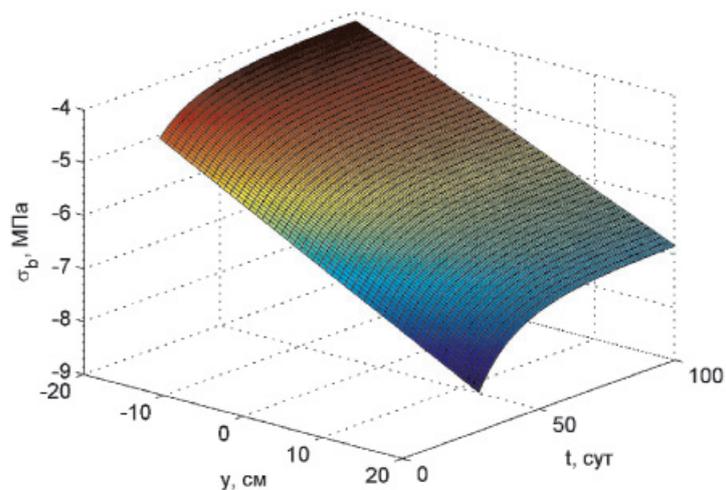


Рис. 3. Изменение напряжений в бетоне по высоте сечения при $x = \frac{L}{2}$

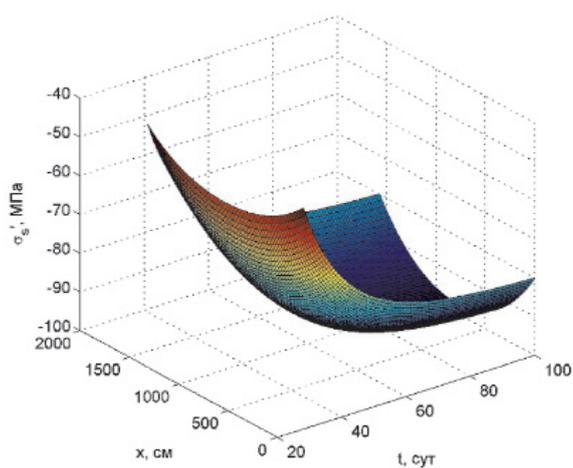


Рис. 4. Изменение напряжений в арматуре у верхней грани

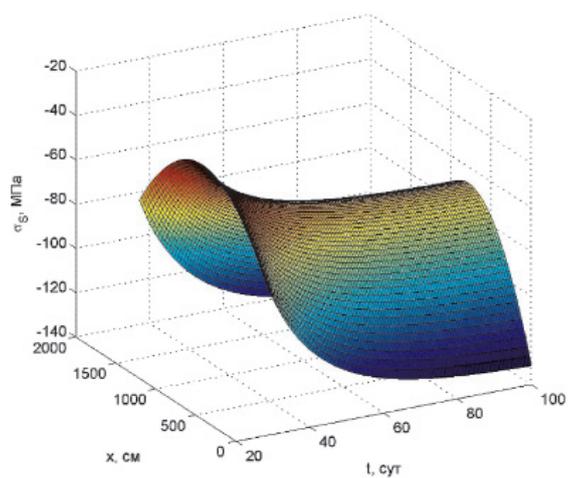


Рис. 5. Изменение напряжений в арматуре у нижней грани

Таким образом, даже линейная ползучесть бетона оказывает существенное влияние на напряженно-деформированное состояние железобетонных арок. В рассмотренном примере напряжения в арматуре у верхней грани в середине пролета возросли в 1,85 раз.

Список литературы

1. Гурьева Ю.А. Некоторые приложения упрощенной теории нелинейной ползучести нестареющего бетона при сжатии // Промышленное и гражданское строительство. – 2008. – № 6. – С. 52–53.
2. Гурьева Ю.А. Упрощенная теория нелинейной ползучести бетона при сжатии // Вестн. гражд. инженеров. – 2008. – № 2 (15). – С. 37–41.
3. Литвинов С.В., Юхнов И.В., Языев Б.М., Чепурненко А.С. Продольный изгиб гибкой железобетонной стойки при нелинейной ползучести // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 5; URL:<http://www.science-education.ru/119-14705>.
4. Тамразян А.Г. Механика ползучести бетона: монография / А.Г. Тамразян, С.Г. Есян. – М.: МГСУ, 2012. – 490 с.
5. Чепурненко А.С., Юхнов И.В., Языев Б.М., Литвинов С.В. Расчет внецентренно сжатого железобетонного стержня на ползучесть при различных законах деформирования // Научное обозрение. – 2014. – № 8. – Ч. 3. – С. 935–940.
6. Юхнов И.В., Языев Б.М., Чепурненко А.С., Литвинов С.В. Напряженно-деформированное состояние короткого внецентренно сжатого железобетонного стержня при нелинейной ползучести // Научное обозрение. – 2014. – № 8. – Ч. 3. – С. 929–934.

References

1. Gur'eva Ju.A. Nekotorye prilozhenija uproshhennoj teorii nelinejnoj polzuchesti nestarejushhego betona pri szhatii // Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo. 2008. no. 6. pp. 52–53.
2. Gur'eva Ju. A. Uproshhennaja teorija nelinejnoj polzuchesti betona pri szhatii // Vestn. grazhd. inzhenerov. 2008. no. 2 (15). pp. 37–41.
3. Litvinov S.V., Jukhnov I.V., Jazyev B.M., Chepurnenko A.S. Prodol'nyj izgib gibkoj zhelezobetonnoj stojki pri nelinejnoj polzuchesti // Sovremennye problemy nauki i obrazovanija. 2014. no. 5; URL:<http://www.science-education.ru/119-14705>.
4. Tamrazjan A.G. Mekhanika polzuchesti betona: monografiya / A.G. Tamrazjan, S.G. Esajan. Moskva: MGSU, 2012. 490 p.
5. Chepurnenko A.S., Jukhnov I.V., Jazyev B.M., Litvinov S.V. Raschet vnecentrenno szhatogo zhelezobetonного sterzhnja na polzuchest' pri razlichnykh zakonakh deformirovaniya // Nauchnoe obozrenie. no. 8. Chast' 3. 2014. pp. 935–940.
6. Jukhnov I.V., Jazyev B.M., Chepurnenko A.S., Litvinov S.V. Naprjazhenno-deformirovanное sostojanie korotkogo vnecentrenno szhatogo zhelezobetonного sterzhnja pri nelinejnoj polzuchesti // Nauchnoe obozrenie. no. 8. Chast' 3. 2014. pp. 929–934.

Рецензенты:

Бескопильный А.Н., д.т.н., профессор кафедры технической эксплуатации и сервиса автомобилей и оборудования, проректор по учебной работе, Ростовский государственный строительный университет, г. Ростов-на-Дону;

Маилян Д.Р., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой «Железобетонные и каменные конструкции», ФГБОУ ВПО «Ростовский государственный строительный университет», г. Ростов-на-Дону.

Работа поступила в редакцию 04.02.2015.