

УДК 51.74

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ШЕРОХОВАТОСТИ
ПОВЕРХНОСТИ КАМНЯ ПРИ ПЛОСКОМ ШЛИФОВАНИИ
И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ КОНТАКТА
АБРАЗИВНОГО КРУГА С ПОВЕРХНОСТЬЮ**

Деркачев И.С., Мицик М.Ф., Адигамов К.А., Жданова О.В., Байбара С.Н.
*ФГБОУ ВПО «Институт сферы обслуживания и предпринимательства (филиал) ДГТУ»,
Шахты, e-mail: derk-igor@yandex.ru, m_mits@mail.ru*

На современных камнеобрабатывающих предприятиях оценка качества обработанной поверхности камня осуществляется визуально, тактильно либо способом профилометрирования, что не отвечает современным требованиям. В связи с большим количеством факторов, влияющих на качество обработанной поверхности и сложным характером их взаимодействия, прогнозирование окончательной шероховатости камня на данный момент не представляется возможным. Для решения этой задачи разработана математическая модель формирования шероховатости поверхности камня при плоском шлифовании, когда поверхность получена при помощи предварительного грубого шлифования, при распиливании камня на отдельные плиты и когда поверхность камня образована скалыванием пластов. В основе математической модели, лежит определение площади контакта абразивного круга с обрабатываемой поверхностью камня. На основании этого получены два случая, которые подчиняются двумерному нормальному и двумерному равномерному законам распределения.

Ключевые слова: математическая модель, плоское шлифование, площадь контакта, единичное зерно, абразивный круг

**MATHEMATICAL MODEL OF ROUGHNESS STONE SURFACE
FOR PLANE GRINDING AND DETERMINING THE AREA
OF THE ABRASIVE WHEEL CONTACT WITH THE SURFACE**

Derkachev I.S., Mitsik M.F., Adigamov K.A., Zhdanova O.V., Baybara S.N.
*Institute of service and entrepreneurship (branch) Don state technical university,
Shakhty, e-mail: derk-igor@yandex.ru, m_mits@mail.ru*

In modern stone processing enterprises assessment of the quality of the treated surface of the stone is carried out visually, tactilely profilometrirovaniya any way that does not meet modern requirements. Due to the large number of factors affecting the quality of the machined surface and the complex nature of their interaction, forecasting the final roughness of the stone at the moment is not possible. To solve this problem, a mathematical model of surface roughness at flat grinding stone, when the surface is obtained by means of a preliminary coarse sanding, sawing with a stone on a separate plate and when the surface of the stone formations formed by cleaving. In the mathematical model, is the definition of the contact area of the abrasive wheel with machined surface of the stone. On the basis of the obtained two cases, which is subject to the two-dimensional and two-dimensional normal uniform distribution law.

Keywords: mathematical model, surface grinding, the area of contact, a single grain, grinding wheel

Параметры начальной шероховатости поверхности, которую необходимо обработать, определяются либо эксплуатационными свойствами оборудования и материалов, применяемых для предварительного шлифования, либо природными свойствами камня.

В связи с большим количеством факторов, определяющих качество поверхности и сложным характером их взаимодействия, на данный момент не представляется возможным разработать единую модель формирования параметров шероховатости при шлифовании.

В зависимости от типа камня и его назначения рассматриваются обрабатываемые поверхности трех типов:

- поверхность камня получена с помощью предварительного грубого шлифования;

- поверхность образована распиливанием камня на отдельные плиты;

- поверхность камня образована скалыванием пластов.

Если перед шлифованием поверхность камня была подвержена грубой обработке, то шероховатость поверхности подчиняется двумерному нормальному закону распределения [1]. Аналогично поверхность камня подчиняется двумерному нормальному закону распределения в случае скалывания пластов, так как форма поверхности задается природной структурой камня.

В случае, когда поверхность образована распиливанием камня на отдельные плиты, закон распределения шероховатости по поверхности камня подчиняется двумерному равномерному закону [2].

Случайная величина X называется нормально распределенной (имеющей распределение Гаусса), если ее плотность вероятности имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}; \quad \sigma > 0,$$

где a – средняя шероховатость; σ – среднеквадратическое отклонение значений шероховатости.

Случайная величина XY называется двумерной нормально распределенной, если ее плотность вероятности имеет вид

$$p(x; y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}} \times e^{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)} \left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_y^2} - 2r_{xy} \frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_x\sigma_y} \right]}, \quad (1)$$

где a_1, a_2 – средние значения шероховатостей поверхности камня в направлении осей OX и OY соответственно; σ_x, σ_y – среднеквадратические отклонения шероховатостей поверхности камня в направлениях OX и OY ; r_{xy} – коэффициент корреляции между шероховатостями поверхности камня в направлении осей OX и OY .

Для природного камня по данным статистических исследований [3] шероховатости в направлении осей OX и OY не коррелированы, тогда коэффициент корреляции $r_{xy} = 0$ и функция плотности принимает вид

$$p(xy) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_y^2} \right]} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_y^2}} = p(x) \cdot p(y). \quad (2)$$

Иными словами, плотность распределения шероховатостей по плоскости равна произведению плотностей шероховатостей в направлении осей OX и OY , то есть случайные величины шероховатостей в направлении осей независимы между собой.

В процессе шлифования взаимодействуют абразивный круг и обрабатываемая поверхность.

Рассмотрим, какую площадь контакта имеет абразивный круг с обрабатываемой поверхностью. Пусть на поверхности абразивного круга имеется единичное зерно, которое взаимодействует с поверхностью камня (рис. 1). Их взаимодействие описывается по типу микрорезания поверхности камня, либо по типу микроскалывания [4]. При микрорезании камня абразивное зерно заглубляется в камень в среднем на

величину $h_3 = \frac{h_a}{2}$, где h_a – средняя шероховатость поверхности абразивного круга, соответственно глубина воронки в камне от резания имеет среднюю величину h_3 . При микроскалывании глубина воронки в камне имеет среднюю величину, существенно превосходящую h_3 [5].

Полагаем в среднем, что абразивное зерно имеет форму куба, который в абразивной связке расположен, как показано на рис. 1. Тогда площадь поверхности абразивного зерна – это площадь боковой поверхности пирамиды с прямыми углами при ее вершине и высотой h_a , т.е. площадь трех прямоугольных треугольников. Длина стороны единичного зерна равна $h_a \cdot \sqrt{3}$, а площадь боковой поверхности единичного зерна, выступающего на поверхности абразивного круга, равна

$$S_{\text{бок}} = \frac{9}{2} h_a^2. \quad (3)$$

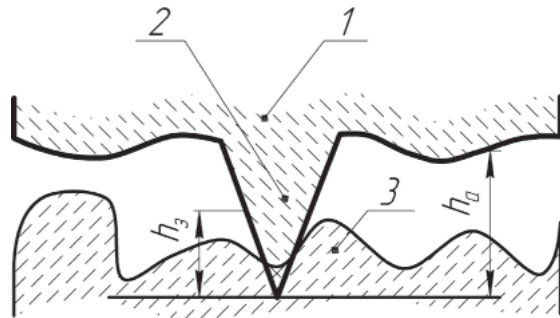


Рис. 1. Схема взаимодействия единичного зерна абразивного круга с обрабатываемой поверхностью камня:

1 – абразивный круг; 2 – единичное зерно абразивного круга; 3 – обрабатываемая поверхность камня

При этом площадь, которую единичное зерно занимает на поверхности абразивного круга, равна

$$S_{\text{осн}} = \frac{\sqrt{3}}{4} (h_a \sqrt{3} \sqrt{2})^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} h_a^2. \quad (4)$$

Иными словами, площадь боковой поверхности пирамиды больше площади ее основания в $\sqrt{3}$ раз. При этом фактическая площадь основания зерна с учетом той части, которая находится в связке, в два раза больше, чем площадь основания пирамиды, то есть

$$S_{\text{осн.факт}} = 3\sqrt{3} \cdot h_a^2. \quad (5)$$

Таким образом, отношение площади боковой поверхности единичного зерна, выступающего на поверхности абразивного круга, к фактической площади основания зерна будет равно

$$D_3 = \frac{S_{\text{осн}}}{S_{\text{осн.факт}}} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (6)$$

Следует, однако, учесть, что объемная доля абразивных зерен в составе шлифовального круга зависит от зернистости круга и составляет порядка $D_{\text{зер}} = 40\text{--}45\%$ [5]. Если объемная доля абразивных зерен, содержащихся в связке, равна $D_{\text{зер}}$, то доля рабочей площади абразивных зерен, содержащихся в связке и распределенных по поверхности шлифовального круга, с учетом (6) определяется по формуле

$$D_{\text{раб}} = D_3 \cdot D_{\text{зер}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,4 = \frac{\sqrt{3}}{5}. \quad (7)$$

В процессе шлифования доля рабочей площади абразивных зерен возрастает, так как часть камня шлифуется микроскалыванием, при этом процесс шлифования – это процесс хрупкой деформации с отрывом микрочастиц камня от основы и последующим их движением по кругу. Таким образом, часть деформированного камня продолжает участвовать в процессе шлифования, существенно увеличивая площадь контакта абразивного круга и обрабатываемой поверхности.

Следует также отметить тот факт, что процесс шлифования осуществляется на высокой скорости и срезание (скалывание) микрочастиц камня происходит многократно даже при одном прохождении шлифовальным кругом поверхности камня.

Определим долю площади, по которой происходит контакт между абразивным кругом и обрабатываемой поверхностью.

В начальный момент времени, когда шлифовальный круг касается поверхности камня, площадь контакта оказывается минимальной, поскольку обработка поверхности камня начинается при соприкосновении наиболее выступающих участков поверхности. В последующем, когда участки деформированы, шлифование происходит по большей площади соприкосновения круга и поверхности камня.

Полагая, что шероховатости поверхности камня в направлении осей OX и OY независимы, можно определить долю контакта между абразивным кругом и обрабатываемой поверхностью по оси OX .

Пусть в процессе одного прохождения шлифовальным кругом с поверхности камня снимается слой толщиной δ . При этом средняя шероховатость поверхности, как отмечено ранее, равна a_1 ($\delta < a_1$). Задача шлифования – совершить столько проходов шлифовальным кругом, чтобы выполнялось условие

$$a_1 < k \cdot \delta, \quad (8)$$

где k – число проходов шлифовальным кругом.

Из неравенства (8) следует, что

$$k = \left[\frac{a_1}{\delta} \right] + 1, \quad (9)$$

здесь функция $\left[\frac{a_1}{\delta} \right]$ – целая часть числа $\frac{a_1}{\delta}$.

На практике число проходов шлифовальным кругом k может оказаться большим, чем из формулы (9), так как в (9) k определяется по среднему размеру шероховатости, а на практике процесс шлифования ведется до тех пор, пока шероховатость камня не станет равной шероховатости абразивного круга. Так как распределение шероховатостей на поверхности камня удовлетворяет нормальному закону распределения, то с надежностью $\gamma = 0,997$ можно утверждать, что число проходов k не будет превосходить величины

$$k \leq \left[\frac{6 \cdot \sigma_x}{\delta} \right] + 1. \quad (10)$$

Определим, какой будет доля площади, по которой происходит контакт между абразивным кругом и обрабатываемой поверхностью при первом прохождении. Так как начало прохождения поверхности происходит от точки $a_1 + 3\sigma_x$, то после одного прохода абразивным кругом на графике будет достигнуто положение $a_1 + 3\sigma_x - \delta$ (рис. 2).

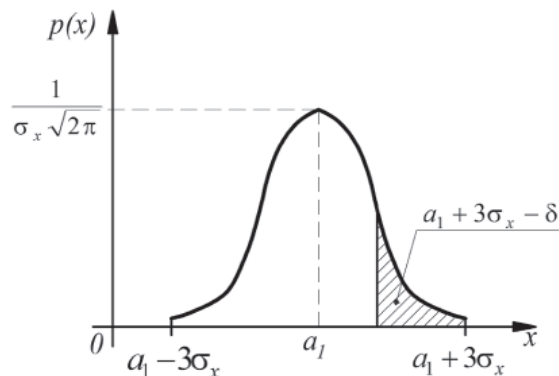


Рис. 2. Нормальное распределение шероховатостей вдоль оси OX и область прохождения первого участка

После финишного прохождения поверхности шлифования абразивным кругом площадь контакта между кругом и поверхностью будет полная, то есть будет равна 100%.

Это практически соответствует площади фигуры, ограниченной кривой $p(x)$ и осью OX , а также вероятности того, что значение случайной величины шероховатости после шлифования окажется меньшим $a_1 - 3\sigma_x$. При этом вероятность того, что значение случайной величины шероховатости после шлифования окажется меньшим $a_1 + 3\sigma_x - \delta$, будет пропорциональна площади фигуры, ограниченной кривой $p(x)$, осью OX и прямой $x = a_1 + 3\sigma_x - \delta$, площадь которой определяется с помощью функции Лапласа:

$$P(a_x < a_1 + 3\sigma_x - \delta) = 1 - \Phi\left(\frac{3\sigma_x - \delta}{\sigma_x}\right), \quad (11)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – интегральная функция Лапласа.

Таким образом, доля площади, по которой происходит контакт между абразивным кругом и обрабатываемой поверхностью при первом прохождении поверхности будет определяться по формуле (11). Рассуждая аналогично, можно показать, что при n -м прохождении поверхности абразивным кругом доля площади контакта будет определяться по формуле

$$P(a_x < a_1 + 3\sigma_x - n\delta) = 1 - \Phi\left(\frac{3\sigma_x - n\delta}{\sigma_x}\right), \quad (12)$$

при этом число n должно удовлетворять условию (10).

Нетрудно видеть, что функция (12) является монотонно возрастающей по переменной n , то есть при увеличении числа прохождений поверхности абразивным кругом доля площади контакта будет монотонно возрастать от 0 до 1.

Подводя итог рассуждениям, получим, что если шероховатость поверхности камня подчиняется двумерному нормальному закону распределения, то доля площади контакта между абразивным кругом и обрабатываемой поверхностью с учетом формул (7) и (12) определяется в виде

$$\text{Pr}_{\text{ци}} = \frac{\sqrt{3}}{5} \left[1 - \Phi\left(\frac{3\sigma_x - n\delta}{\sigma_x}\right) \right]. \quad (13)$$

Рассмотрим случай, когда распределение шероховатостей по поверхности камня подчиняется двумерному равномерному за-

кону. Двумерное равномерное распределение задается функцией плотности:

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)(d-c)}, & \text{при } a \leq x \leq b, c \leq y \leq d; \\ 0, & \text{при } (x, y) \notin ABCD, \end{cases}$$

где $ABCD$ – прямоугольник с вершинами $A(a; c); B(a; d); C(b; d); D(b; c)$.

Будем полагать, что распределения шероховатостей в направлении осей OX и OY независимы, тогда распределение шероховатостей в направлении оси OX подчиняется равномерному закону

Случайная величина X называется равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$, если ее плотность распределения имеет вид (рис. 3)

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{при } x < a, x > b. \end{cases} \quad (14)$$

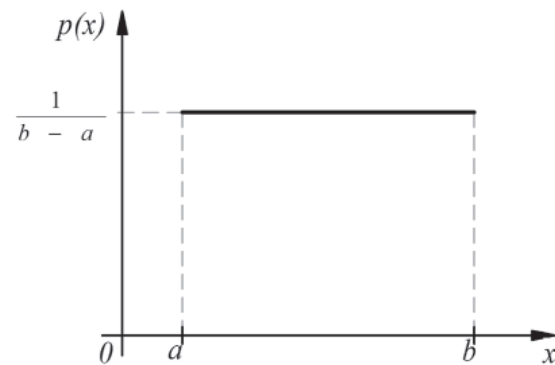


Рис. 3. График функции плотности равномерного закона распределения

Равномерное распределение шероховатостей на отрезке $[a; b]$ означает, что на микроуровне поверхность имеет форму, показанную на рис. 1. Иными словами, на малых расстояниях равномерное распределение шероховатостей является псевдонормальным распределением [1]. В таком случае, для известных значений средних шероховатостей a_1 и a_2 в направлении осей OX и OY соответственно и среднеквадратических отклонений шероховатостей поверхности камня в направлениях OX и OY , σ_x , σ_y применим вышеописанный алгоритм определения доли площади контакта между абразивным кругом и обрабатываемой поверхностью. При этом значения параметров a_1 , a_2 , σ_x , σ_y могут быть существенно меньшими, чем для случая двумерного нормального распределения шероховатостей, но сама доля площади контакта

между абразивным кругом и обрабатываемой поверхностью может быть также определена по формуле (13).

Список литературы

1. Абразивная и алмазная обработка материалов: справочник; под ред. А.Н. Резникова. – М.: Машиностроение, 1977. – 391 с.
2. Вержанский А.П. Обоснование параметров упругого круглого наружного шлифования природного камня / А.П. Вержанский, П.И. Дубинин – М.: Горный информационно-аналитический бюллетень, 2007. – № 5. – С. 72–82.
3. Гусев В.В. Математическая модель формирования шероховатости поверхности конструкционной керамики при алмазном шлифовании / В.В. Гусев, А.Д. Молчанов // Прогрессивные технологии и системы машиностроения: Международный сборник научных трудов. – Донецк: ДонНТУ, 2002. – Вып. 19. – С. 50–57.
4. Корчак С.Н. Производительность процесса шлифования стальных деталей. – М.: Машиностроение, 1974. – 280 с.
5. Маслов Е.Н. Теория шлифования материалов. – М.: Машиностроение, 1974. – 212 с.

References

1. Abrasive and diamond processing materials. Directory. Ed. Reznikov A.N. M.: Engineering, 1977. 391 p.

2. Verzhansky A.P. Substantiation of parameters of elastic round outer grinding natural stone / A.P. Verzhansky, P.I. Dubinin M.: Mountain information-analytical bulletin, no. 5, 2007, pp. 72–82.

3. Gusev V.V. Mathematical model of the surface roughness of structural ceramics with diamond grinding / V.V. Gusev, A.D. Molchanov // Progressive Technologies and Systems Engineering: International collection of scientific-tion works. Donetsk Donetsk National Technical University, 2002. Vol. 19. pp. 50–57.

4. Korczak S.N. Performance of the grinding process of steel parts. M.: Engineering, 1974. 280 p.

5. Maslov E.N. Theory grinding materials. M.: Machine-building, 1974. 212 c.

Рецензенты:

Евстратов В.А., д.т.н., профессор, зав. кафедрой «Машины и оборудование предприятий стройиндустрии», ШИ ЮРГПУ (НПИ), филиал ЮРГПУ им М.И. Платова, г. Шахты;

Кожемяченко А.В., д.т.н., профессор кафедры «Технические системы ЖКХ и сферы услуг», ИСОиП, (филиал) ДГТУ, г. Шахты.

Работа поступила в редакцию 18.03.2015.