УДК 691.32:628.16.086.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ АКТИВАЦИИ ПРИРОДНОЙ ВОДЫ ЗАТВОРЕНИЯ БЕТОНОВ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

[1]Бояркин Д.И., [2]Фомичев В.Т., [1]Ерофеев В.Т., [1]Емельянов Д.В., [3]Матвиевский А.А.

[1]ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева», Саранск, e-mail: emelyanoffdv@yandex.ru;

[2]ФГБОУ ВПО «Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет», Волгоград;

[3]ОАО «МАКСМИР», Москва, e-mail: maxmir@maxmir.ru

Показано, что активация растворных и бетонных смесей, а также составляющих их компонентов является одним из действенных технологических приемов. На определенном этапе процесса структурообразования цементного вяжущего можно активно влиять на технологические, структурные и физико-технические свойства получаемых материалов, а именно путем использования для затворения активированной воды и водных растворов. Аппараты и устройства, направленные на генерацию электромагнитных волн, должны соответствовать множеству критериев, что выявляется с помощью моделей, направленных на решение начально-краевых задач для трехмерного волнового уравнения. Показана реализация разностной схемы численного решения задачи с помощью метода расщепления, который наряду с устойчивостью обладает свойством минимальности объема вычислений. Для доказательства устойчивости разностных схем использован спектральный признак Неймана.

Ключевые слова: активация, природная вода, затворение бетонов, электромагнитное поле, моделирование процессов, решение волнового уравнения, метод расщепления, устойчивость разностных схем

MODELING OF THE ACTIVATION PROCESSES OF NATURAL WATER MIXING CONCRETE IN THE ELECTROMAGNETIC FIELD

[1]Boyarkin D.I., [2]Fomichev V.T., [1]Erofeev V.T., [1]Emelyanov D.V., [3]Matvievskiy A.A.

[1]Mordovian State University n.a. N.P. Ogarev, Saransk, e-mail: emelyanoffdv@yandex.ru;

[2]Volgograd State Architectural and Construction University, Volgograd;

[3]JSC «MAXMIR», Moscow, e-mail: maxmir@maxmir.ru

It is shown that activation the mortar and concrete mixes, and also the components making them is one of effective processing methods. At a certain stage of process of the formation of the cement binder it is possible to influence actively technological, structural and physics and technology properties of the received materials, namely by use for a mixing of the activated water and water solutions. The devices and devices directed on generation of electromagnetic waves have to correspond to a set of criteria that comes to light by means of the models directed on the solution of initial and regional tasks for the three-dimensional wave equation. Implementation of the differential scheme of the numerical solution of a task by means of a splitting method which along with stability possesses property of a minimum of volume of calculations is shown. For the proof of stability of differential schemes the spectral sign of Neumann is used.

Keywords: activation, natural water, mixing of concrete, electromagnetic field, modeling of processes, solution of the wave equation, splitting method, stability of differential schemes

Активация растворных и бетонных смесей, а также составляющих их компонентов является одним из действенных технологических приемов, позволяющих целенаправленно регулировать свойства изделий на их основе [1, 2].

Анализ теоретических исследований и моделирование процессов воздействия электромагнитного поля на природную воду затворения растворных и бетонных смесей на основе цементного вяжущего позволяют утверждать, что на определенном этапе процесса их структурообразования имеется возможность активно влиять на технологические, структурные и физико-технические свойства получаемого материала [3, 4].

В этой связи разработка математической модели процесса активации природной воды затворения с целью управления качеством композиционного материала является актуальной задачей современного материаловедения.

Получение воды затворения с заданными параметрами и обеспечение стабильных и высоких результатов ее активации возможно при применении высокоточных техники и технологий, связанных с распространением электромагнитных волн. Аппараты и устройства, направленные на генерацию электромагнитных волн, часто должны соответствовать множеству критериев под определенную для этих аппаратов задачу. В связи с этим решение начально-краевых задач для трехмерного волнового уравнения является актуальным.

Классическая постановка начальной задачи для трехмерного волнового уравнения в положительном полупространстве будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial z^2}=0,\ (x,y,z)\in R^3, 0<t<T; \quad (1)$$

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=\psi_1(x,y,z),\quad (x,y,z)\in R^3,\quad t=0; \quad (2)$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_2(x,y,z),\quad (x,y,z)\in R^3,\quad t=0. \quad (3)$$

Используя отображение $u(x,y,z,t)\to\varphi(x,y,z,t)\times u(x,y,z,t)$, где $\varphi\in C_0^\infty(D)$, можем получить постановку этой задачи в обобщенном смысле, в пространстве С.Л. Соболева. Рассмотрим выражение

$$\frac{\partial^2(u\varphi)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2(\varphi u)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2(\varphi u)}{\partial y^2}-\frac{\partial^2(\varphi u)}{\partial z^2}.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2(u\varphi)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2(\varphi u)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2(\varphi u)}{\partial y^2}-\frac{\partial^2(\varphi u)}{\partial z^2}=$$

$$=2\frac{\partial}{\partial t}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\cdot u\right)-u\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-2\frac{\partial}{\partial x}\cdot\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\cdot u\right)+u\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-2\frac{\partial}{\partial y}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot u\right)+u\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-2\frac{\partial}{\partial z}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot u\right)+u\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2};$$

$$u\cdot\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]=\frac{\partial^2(u\varphi)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2(\varphi u)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2(\varphi u)}{\partial y^2}-\frac{\partial^2(\varphi u)}{\partial z^2}-$$

$$-2\frac{\partial}{\partial t}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\cdot u\right)+2\frac{\partial}{\partial x}\cdot\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\cdot u\right)+2\frac{\partial}{\partial y}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot u\right)+2\frac{\partial}{\partial z}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot u\right).$$

Интегрируя которое и используя формулу Гаусса – Остроградского по произвольной области D, будем иметь

$$\int_D u\cdot\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right]dxdydzdt=\int_S\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}(\varphi\cdot u)\cos(n,\wedge t)-\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\cdot u)\cos(n,\wedge x)-\\-\frac{\partial}{\partial y}(\varphi\cdot u)\cos(n,\wedge y)-\frac{\partial}{\partial z}(\varphi\cdot u)\cos(n,\wedge z)-\\-2\frac{\partial\varphi}{\partial t}\cdot u\cdot\cos(n,\wedge t)+2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot u\cdot\cos(n,\wedge x)+\\+2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot u\cdot\cos(n,\wedge y)+2\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot u\cdot\cos(n,\wedge z)\end{pmatrix}dS. \quad (4)$$

Если область D – все положительное полупространство ($t>0$) с кусочно-гладкой границей S: $\infty\cup t=0$, а $\varphi(x,y,z,t)\in C_0^\infty\left(R_+^4\right)$, то получим начальную задачу для трехмерного волнового уравнения в пространстве С.Л. Соболева.

$$\int_{t\geq 0}\begin{pmatrix}u\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]+2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\\-2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}-2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\end{pmatrix}dxdydzdt=\int_{t=0}\frac{\partial(u\varphi)}{\partial t}dxdydz. \quad (5)$$

Выполним постановку начальной задачи для волнового уравнения на основе интегральных законов сохранения.

Пусть γ и γ' – две непересекающиеся гиперповерхности в положительном полупространстве R_+^4.

Определим функцию φ следующим образом:

$$\varphi=\begin{cases}1 & \text{внутри } \gamma;\\ 0 & \text{вне } \gamma',\end{cases}$$

и функция φ гладким образом убывает от 1 до 0 вместе со своими производными $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ от γ до γ'.

Рассмотрим левый интеграл из уравнения (5):

$$\int\limits_{t\geq 0}\left(u\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]+2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}-2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)dxdydzdt.$$

Учитывая свойства функции φ, этот интеграл будет иметь вид

$$\int\limits_{\gamma\gamma'}\left(u\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]+2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}-2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)dxdydzdt.$$

Заменяя интегрирование по полосе от γ до γ' интегрированием по нормали и касательным направлениям к гиперповерхности γ, получим

$$\int\limits_{\gamma}ds\int\limits_{\gamma}^{\gamma'}dn\left(u\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]+2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}-2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).$$

Ширину полосы $\gamma\gamma'$ возьмем такой, чтобы можно было предположить, что

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=n_t\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right);\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=n_x\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right);\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=n_y\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right);\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=n_z\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).$$

Так как $n_x = s_x$, $n_y = s_y$, $n_z = s_z$, $n_t = -s_t$ и $s_x ds = dx$, $s_y ds = dy$, $s_z ds = dz$, $s_t ds = dt$, то получим

$$\int\limits_{\gamma}\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t}dxdydz+\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial x}dtdydz+\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial y}dtdxdz+\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial z}dtdxdy=0.$$

Таким образом, принимая во внимание правый интеграл из уравнения (5), получим обобщенную постановку начальной задачи для волнового уравнения на основе интегральных законов сохранения:

$$\oint\!\!\!\iiint\frac{\partial u}{\partial t}dxdydz+\frac{\partial u}{\partial x}dtdydz+\frac{\partial u}{\partial y}dtdxdz+\frac{\partial u}{\partial z}dtdxdy=0.$$

Реализуем явную разностную схему численного решения начально-краевой задачи для волнового уравнения.

Определим равномерную сетку с шагом h по пространственным переменным и с шагом τ по времени

$$D_h=\{x_i,y_j,z_k,t_n\},$$

где $x_i = ih$, $y_j = jh$, $z_k = kh$, $t_n = n\tau$, $i = 0, \pm1, \pm2, \dots$, $j = 0, \pm1, \pm2, \dots$, $k= 0, \pm1, \pm2, \dots$, $n= 0, 1, 2, \dots$

Для начальной задачи волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial z^2},\ (x,y,z)\in R^3,\ 0<t<T; \tag{6}$$

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=\psi_1(x,y,z),\ (x,y,z)\in R^3,\quad t=0; \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_2(x,y,z),\quad (x,y,z)\in R^3,\quad t=0. \tag{8}$$

построим явную многомерную разностную схему:

$$\frac{u_{ijk}^{n+1}-2u_{ijk}^{n}+u_{ijk}^{n-1}}{\tau^2}=\frac{u_{i+1jk}^{n}-2u_{ijk}^{n}+u_{i-1jk}^{n}}{h^2}+\frac{u_{ij+1k}^{n}-2u_{ijk}^{n}+u_{ij-1k}^{n}}{h^2}+\frac{u_{ijk+1}^{n}-2u_{ijk}^{n}+u_{ijk-1}^{n}}{h^2},$$

$$i = 0, \pm 1, \ldots;\ j = 0, \pm 1, \ldots;\ k = 0, \pm 1, \ldots;\ n = 0, 1, \ldots; \tag{9}$$

$$u_{ijk}^{0} = \psi_{1ijk},\ i = 0, \pm 1, \ldots;\ j = 0, \pm 1, \ldots;\ k = 0, \pm 1, \ldots; \tag{10}$$

$$u_{ijk}^{1} = \psi_{1ijk} + \tau\psi_{2ijk},\ i = 0, \pm 1, \ldots;\ j = 0, \pm 1, \ldots;\ k = 0, \pm 1, \ldots. \tag{11}$$

Из теории разностных схем известно, что невязка между точным решением задачи (6)–(7) и приближенным решением задачи (9)–(11) есть $O\left(h^2\right) + O\left(\tau^2\right)$, а необходимое условие устойчивости разностной схемы (9)–(11) равняется $\frac{\tau}{h} \le 1$.

Реализуем метод расщепления численного решения начально-краевой задачи для волнового уравнения.

При решении многомерных задач объем вычислений методом сеток существенно возрастает. Для его снижения Н.Н. Яненко [5] предложил эффективный метод расщепления, который наряду с устойчивостью обладает свойством минимальности объема вычислений. Решение задачи (6)–(7) сводится к решению трех вспомогательных задач. Построим схему метода расщепления для решения задачи (6)–(7). Введем дифференциальный оператор *A,* такой, что

$$Au \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Тогда уравнение (6) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Au.$$

Оператор *A* является суммой трех операторов

$$A_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad A_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};\quad A_3 = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Рассмотрим три вспомогательные одномерные задачи.

Задача 1:

$$\frac{\partial^2 v(x,y,z,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v(x,y,z,t)}{\partial x^2},\quad t_{n-1} \le t \le t_{n+1}, \tag{12}$$

с начальными условиями

$$v(x,y,z,t_{n-1}) = u(x,y,z,t_{n-1}),\quad n = 1, 2, \ldots; \tag{13}$$

$$v(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z),\quad n = 0; \tag{14}$$

$$\left.\frac{\partial v(x,y,z,t)}{\partial t}\right|_{t=t_n} = \left.\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t}\right|_{t=t_n}. \tag{15}$$

Задача 2:

$$\frac{\partial^2 w(x,y,z,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w(x,y,z,t)}{\partial y^2},\quad t_{n-1} \le t \le t_{n+1}, \tag{16}$$

с начальными условиями

$$w(x,y,z,t_{n-1}) = v(x,y,z,t_n); \tag{17}$$

$$\left.\frac{\partial w(x,y,z,t)}{\partial t}\right|_{t=t_n} = \left.\frac{\partial v(x,y,z,t)}{\partial t}\right|_{t=t_{n+1}}. \tag{18}$$

Задача 3:

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial z^2},\quad t_{n-1} \le t \le t_{n+1}, \tag{19}$$

с начальными условиями

$$f(x,y,z,t_{n-1}) = w(x,y,z,t_n),\quad n = 0, 1, \ldots, \tag{20}$$

$$\left.\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial t}\right|_{t=t_n} = \left.\frac{\partial w(x,y,z,t)}{\partial t}\right|_{t=t_{n+1}}. \tag{21}$$

Поставленные задачи могут быть решены последовательно: сначала задача 1, потом задача 2, а затем задача 3.

Установим связь между функциями $v(x, y, z, t_{n+1})$, $w(x, y, z, t_{n+1})$, $f(x, y, z, t_{n+1})$ и решением $u(x, y, z, t_{n+1})$ исходной задачи на $(n + 1)$ слое.

Пользуясь формулой Тейлора, для функции $v(x, y, z, t_{n+1})$ получим соотношение

$$v(x,y,z,t_{n+1}) = v(x,y,z,t_n) + \tau v_x(x,y,z,t_n) + \frac{\tau^2}{2} v_{xx}(x,y,z,t_n) + \frac{\tau^3}{6} v_{xxx}(x,y,z,t_n) =$$

$$= v(x,y,z,t_n) + \tau v_x(x,y,z,t_n) + \frac{\tau^2}{2} A_1 v(x,y,z,t_n) + O(\tau^3) = \tag{22}$$

$$= \left(E + \frac{\tau^2}{2} A_1\right) v(x,y,z,t_n) + \tau v_x(x,y,z,t_n) + O\left(\tau^3\right), \tag{23}$$

где *E* – единичный оператор.

Для функций $w(x, y, z, t_{n+1})$ и $f(x, y, z, t_{n+1})$ можно получить аналогичные выражения:

$$w(x,y,z,t_{n+1}) = \left(E + \frac{\tau^2}{2} A_2\right) w(x,y,z,t_n) + \tau w_x(x,y,z,t_n) + O\left(\tau^3\right); \tag{24}$$

$$f(x,y,z,t_{n+1}) = \left(E + \frac{\tau^2}{2}A_3\right) f(x,y,z,t_n) + \tau f_x(x,y,z,t_n) + O\left(\tau^3\right). \qquad (25)$$

Воспользуемся дифференциальным условием (21) для задачи 3:

$$\left.\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial t}\right|_{t=t_n} = \left.\frac{\partial w(x,y,z,t)}{\partial t}\right|_{t=t_{n+1}}.$$

Пользуясь формулой Тейлора, получим соотношение

$$\frac{f(x,y,z,t_n) - f(x,y,z,t_{n-1})}{\tau} + O\left(\tau^2\right) = \frac{w(x,y,z,t_{n+1}) - w(x,y,z,t_n)}{\tau} + O\left(\tau^2\right).$$

Учитывая условие (20), получим

$$f(x,y,z,t_n) = w(x,y,z,t_{n+1}) + O\left(\tau^2\right).$$

Аналогично

$$w(x,y,z,t_n) = v(x,y,z,t_{n+1}) + O\left(\tau^2\right);$$

$$f(x,y,z,t_{n+1}) = \left(E + \frac{\tau^2}{2}A_3\right) f(x,y,z,t_n) + \tau f_x(x,y,z,t_n) + O\left(\tau^3\right) =$$

$$= \left(E + \frac{\tau^2}{2}A_3\right) w(x,y,z,t_{n+1}) + \tau f_x(x,y,z,t_n) + O(\tau^2) =$$

$$= \left(E + \frac{\tau^2}{2}A_3\right)\left(\left(E + \frac{\tau^2}{2}A_2\right) v(x,y,z,t_n) + \tau w_x(x,y,z,t_n) + O\left(\tau^2\right)\right) + \tau f_x(x,y,z,t_n) + O\left(\tau^2\right) =$$

$$= \left(E + \frac{\tau^2}{2}A_3\right)\left(\left(E + \frac{\tau^2}{2}A_2\right)\left(\left(E + \frac{\tau^2}{2}A_1\right) u(x,y,z,t_n) + \tau v_x(x,y,z,t_n) + O\left(\tau^2\right)\right) +\right.$$

$$\left. + \tau w_x(x,y,z,t_n) + O\left(\tau^2\right)\right) + \tau f_x(x,y,z,t_n) + O\left(\tau^2\right) =$$

$$= \left(E + \frac{\tau^2}{2}A_3\right)\left(\left(E + \frac{\tau^2}{2}A_2\right)\left(\left(E + \frac{\tau^2}{2}A_1\right) u(x,y,z,t_n) + \tau v_x(x,y,z,t_n) + O\left(\tau^2\right)\right) +\right.$$

$$\left. + \tau w_x(x,y,z\,t_n) + O\left(\tau^2\right)\right) + \tau f_x(x,y,z,t_n) + O\left(\tau^2\right) =$$

$$= \left(E + \frac{\tau^2}{2}A_3\right)\left(\left(E + \frac{\tau^2}{2}A_2 + \frac{\tau^2}{2}A_1 + \frac{\tau^4}{4}A_1A_2\right) u(x,y,z,t_n) + \tau v_x(x,y,z,t_n) + \tau w_x(x,y,z,t_n) + \right.$$

$$\left. + O\left(\tau^2\right) + \frac{\tau^2}{2}A_2 u(x,y,z,t_n) O\left(\tau^2\right) + \frac{\tau^3}{2}A_2 u(x,y,z,t_n) v_x(x,y,z,t_n)\right) + \tau f_x(x,y,z,t_n) + O\left(\tau^2\right) =$$

$$= \left(E + \frac{\tau^2}{2}A_3 + \frac{\tau^2}{2}A_2 + \frac{\tau^4}{4}A_2A_3 + \frac{\tau^2}{2}A_1 + \frac{\tau^4}{4}A_1A_3 + \frac{\tau^4}{4}A_1A_2 + \frac{\tau^6}{8}A_1A_2A_3\right) u(x,y,z,t_n) +$$

$$+ \tau v_x(x,y,z,t_n) + \frac{\tau^3}{2}A_3 u(x,y,z,t_n) v_x(x,y,z,t_n) + \tau w_x(x,y,z,t_n) +$$

$$+ \frac{\tau^3}{2}A_3 u(x,y,z,t_n) w_x(x,y,z,t_n) + \frac{\tau^2}{2}A_3 O\left(\tau^2\right) + O\left(\tau^2\right) + \frac{\tau^2}{2}A_2 u(x,y,z,t_n) O(\tau^2) +$$

$$+ \frac{\tau^3}{2}A_2 u(x,y,z,t_n) v_x(x,y,z,t_n) + \frac{\tau^4}{4}A_3A_2 u(x,y,z,t_n) O\left(\tau^2\right) +$$

$$+ \frac{\tau^5}{4}A_3A_2 u(x,y,z,t_n) v_x(x,y,z,t_n) + \tau f_x(x,y,z,t_n) + O\left(\tau^2\right).$$

Рассмотрим выражение

$$\tau v_x(x,y,z,t_n)+\tau w_x(x,y,z,t_n)+\tau f_x(x,y,z,t_n)=$$
$$=v(x,y,z,t_n)-v(x,y,z,t_{n-1})+w(x,y,z,t_n)-w(x,y,z,t_{n-1})+f(x,y,z,t_n)-f(x,y,z,t_{n-1})+O\left(\tau^2\right).$$

С учетом *х* начальных данных для вспомогательных задачи 1, задачи 2 и задачи 3 получим

$$\tau v_x(x,y,z,t_n)+\tau w_x(x,y,z,t_n)+\tau f_x(x,y,z,t_n)=u(x,y,x,t_n)-u(x,y,x,t_{n-1})=$$
$$=\tau u_x(x,y,z,t_n)+O\left(\tau^2\right),$$

и так как

$$\frac{\tau^4}{4}(A_1A_2+A_1A_3+A_3A_2)u(x,y,z,t_n)+\frac{\tau^2}{2}A_3O\left(\tau^2\right)+\frac{\tau^2}{2}A_2u(x,y,z,t_n)O\left(\tau^2\right)=O\left(\tau^4\right);$$
$$\frac{\tau^6}{8}A_1A_2A_3u(x,y,z,t_n)+\frac{\tau^4}{4}A_3A_2u(x,y,z,t_n)O\left(\tau^2\right)=O\left(\tau^6\right);$$
$$\frac{\tau^3}{2}A_3u(x,y,z,t_n)v_x(x,y,z,t_n)+\frac{\tau^3}{2}A_3u(x,y,z,t_n)w_x(x,y,z,t_n)+$$
$$+\frac{\tau^3}{2}A_2u(x,y,z,t_n)v_x(x,y,z,t_n)=O\left(\tau^3\right);$$
$$\frac{\tau^5}{4}A_3A_2u(x,y,z,t_n)v_x(x,y,z,t_n)=O\left(\tau^5\right).,$$

получим

$$f(x,y,z,t_{n+1})=\left(E+\frac{\tau^2}{2}A\right)u(x,y,z,t_n)+\tau u_x(x,y,z,t_n)+O\left(\tau^2\right). \tag{26}$$

Следовательно, можем положить, что

$$u(x,y,z,t_{n+1})\cong f(x,y,z,t_{n+1}) \tag{27}$$

с соответствующей аппроксимационной оценкой.

Процесс решения исходной задачи с тремя пространственными переменными *x*, *y*, *z* заменен процессом решения трех задач с одной пространственной переменной в силу расщепления дифференциального оператора *A* на сумму трех операторов $A_1 + A_2 + A_3$.

Очевидно, что метод расщепления не увеличивает погрешность по пространственным переменным *x*, *y*, *z*. Покажем, что и по времени *t* аппроксимационная оценка имеет тот же порядок, что и при прямом разностном методе.

Для каждой задачи (1, 2, 3) построим явные разностные схемы на той же сетке, что и для исходной многомерной задачи:

$$D_h=\{x_i,y_j,z_k,t_n\},$$

где $x_i = ih$, $y_j = jh$, $z_k = kh$, $t_n = n\tau$, $i = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, $j = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, $k= 0, \pm1, \pm2, \ldots$, $n= 0, 1, 2, \ldots$.

Рассмотрим задачу 1.

Заменим производную $v_{tt}(x_i, y_j, z_k, t_n)$ её разностной аппроксимацией. Пользуясь формулой Тейлора, получим следующие соотношения:

$$v(x_i,y_j,z_k,t_n+\tau)=v(x_i,y_j,z_k,t_n)+\tau v_t(x_i,y_j,z_k,t_n)+\frac{\tau^2}{2}v_{tt}(x_i,y_j,z_k,t_n)+$$
$$+\frac{\tau^3}{3!}v_{ttt}(x_i,y_j,z_k,t_n)+\frac{\tau^4}{4!}v_{tttt}\left(x_i,y_j,z_k,\xi_n'\right),\quad t_n<\xi_n'<t_n+\tau; \tag{28}$$

$$v(x_i,y_j,z_k,t_n-\tau)=v(x_i,y_j,z_k,t_n)-\tau v_t(x_i,y_j,z_k,t_n)+\frac{\tau^2}{2}v_{tt}(x_i,y_j,z_k,t_n)-$$
$$-\frac{\tau^3}{3!}v_{ttt}(x_i,y_j,z_k,t_n)+\frac{\tau^4}{4!}v_{tttt}\left(x_i,y_j,z_k,\xi_n''\right),\quad t_n-\tau<\xi_n''<t_n. \tag{29}$$

Сложим (28) и (29) и выразим $v_{tt}(x_i, y_j, z_k, t_n)$.

$$\frac{v(x_i, y_j, z_k, t_n+\tau) - 2v(x_i, y_j, z_k, t_n) + v(x_i, y_j, z_k, t_n-\tau)}{\tau^2} = \\ = v_{tt}(x_i, y_j, z_k, t_n) + R\left(\tau^2\right); \tag{30}$$

$$R\left(\tau^2\right) = \frac{\tau^2}{4!} v_{tttt}(x_i, y_j, z_k, \xi'_n) + \frac{\tau^2}{4!} v_{tttt}\left(x_i, y_j, z_k, \xi''\right)_n. \tag{31}$$

Аналогично получим аппроксимацию для $v_{xx}(x_i, y_j, z_k, t_n)$.

$$\frac{v(x_i+h, y_j, z_k, t_n) - 2v(x_i, y_j, z_k, t_n) + v(x_i-h, y_j, z_k, t_n)}{h^2} = \\ = v_{xx}(x_i, y_j, z_k, t_n) + R\left(h^2\right); \tag{32}$$

$$R\left(h^2\right) = \frac{\tau^2}{4!} v_{xxxx}\left(\xi'_i, y_j, z_k, t_n\right) + \frac{\tau^2}{4!} v_{tttt}\left(\xi''_i, y_j, z_k, t_n\right);\ x_i < \xi'_i < x_i + h,\ x_i - h < \xi''_n < x_i. \tag{33}$$

Из (31) и (32) получим

$$\frac{v(x_i, y_j, z_k, t_n+\tau) - 2v(x_i, y_j, z_k, t_n) + v(x_i, y_j, z_k, t_n-\tau)}{\tau^2} - \\ - \frac{v(x_i+h, y_j, z_k, t_n) - 2v(x_i, y_j, z_k, t_n) + v(x_i-h, y_j, z_k, t_n)}{h^2} = \\ = v_{tt}(x_i, y_j, z_k, t_n) - v_{xx}(x_i, y_j, z_k, t_n) + R\left(\tau^2\right) + R\left(h^2\right). \tag{34}$$

Оценим внутреннюю невязку $R\left(\tau^2\right) + R\left(h^2\right)$.

$$\left\|R(\tau^2) + R(h^2)\right\| \le \max_{x,y,z,t\in D}\left|\frac{\tau^2}{4!} v_{tttt}\left(x_i, y_j, z_k, \xi'_n\right) + \frac{\tau^2}{4!} v_{tttt}\left(x_i, y_j, z_k, \xi''_n\right)\right| + \\ + \max_{x,y,z,t\in D}\left|\frac{\tau^2}{4!} v_{xxxx}\left(\xi'_i, y_j, z_k, t_n\right) + \frac{\tau^2}{4!} v_{tttt}\left(\xi''_i, y_j, z_k, t_n\right)\right| \le \tau^2(M_1 + M_2) + h^2(M_3 + M_4). \tag{35}$$

Пусть $r = \dfrac{\tau^2}{h^2} = \text{const}$, тогда получим

$$\left\|R(\tau^2) + R(h^2)\right\| \le \tau^2(M_1 + M_2) + h^2(M_3 + M_4) = \\ = h^2(M_1 r + M_2 r + M_3 + M_4) = Ch^2 = O\left(h^2\right). \tag{36}$$

Таким образом получаем, что разностная схема (34) аппроксимирует исходную задачу 1 со вторым порядком аппроксимации по τ.

Начальное условие $v_t(x,y,z,t)\big|_{t=t_{n-1}} = u_t(x,y,z,t)\big|_{t=t_{n-1}}$ задачи 1 можно представить в следующем виде:

$$\frac{v_{ijk}^{n+1} - v_{ijk}^{n}}{\tau} = \frac{u_{ijk}^{n+1} - u_{ijk}^{n}}{\tau}. \tag{37}$$

Тогда разностная схема для задачи 1 будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{v_{ijk}^{n+1} - 2v_{ijk}^{n} + v_{ijk}^{n-1}}{\tau^2} = \dfrac{v_{i+1\,jk}^{n} - 2v_{ijk}^{n} + v_{i-1\,jk}^{n}}{h^2}, i = 0, \pm1, \ldots;\ j = 0, \pm1, \ldots;\ k = 0, \pm1, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots; \\ v_{ijk}^{n} = u_{ijk}^{n}, \quad i = 0, \pm1, \ldots;\ j = 0, \pm1, \ldots;\ k = 0, \pm1, \ldots;\ n = 0, 1, 2, \ldots, \\ \dfrac{v_{ijk}^{n} - v_{ijk}^{n-1}}{\tau} = \dfrac{u_{ijk}^{n} - u_{ijk}^{n-1}}{\tau},\ i = 0, \pm1, \ldots;\ j = 0, \pm1, \ldots;\ k = 0, \ldots; n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{38}$$

Аналогично для вспомогательных задач 2 и 3 соответственно получим

$$\begin{cases} \dfrac{w_{ijk}^{n+1}-2w_{ijk}^{n}+w_{ijk}^{n-1}}{\tau^2}=\dfrac{w_{ij+1k}^{n}-2w_{ijk}^{n}+v_{ij-1k}^{n}}{h^2}, i=0,\pm1,...;\ j=0,\pm1,...;k=0,\pm1,...;n=1,2,..;\\ w_{ijk}^{n}=v_{ijk}^{n+1},\quad i=0,\pm1,...;\ j=0,\pm1,...;k=0,\pm1,...;\ n=0,1,2,...,\\ \dfrac{w_{ijk}^{n}-w_{ijk}^{n-1}}{\tau}=\dfrac{v_{ijk}^{n}-v_{ijk}^{n-1}}{\tau},\ i=0,\pm1,...;\ j=0,\pm1,...;\ k=0,...;n=1,2,... \end{cases} \quad (39)$$

$$\begin{cases} \dfrac{f_{ijk}^{n+1}-2f_{ijk}^{n}+f_{ijk}^{n-1}}{\tau^2}=\dfrac{f_{ijk+1}^{n}-2f_{ijk}^{n}+f_{ijk-1}^{n}}{h^2}, i=0,\pm1,...;\ j=0,\pm1,...;k=0,\pm1,...;n=1,2,..;\\ f_{ijk}^{n}=w_{ijk}^{n+1},\quad i=0,\pm1,...;\ j=0,\pm1,...;\ k=0,\pm1,...;\ n=0,1,2,...,\\ \dfrac{f_{ijk}^{n}-f_{ijk}^{n-1}}{\tau}=\dfrac{w_{ijk}^{n}-w_{ijk}^{n-1}}{\tau},\ i=0,\pm1,...;\ j=0,\pm1,...;k=0,...;n=1,2,... \end{cases} \quad (40)$$

Разностные схемы (38), (39) и (40) аппроксимируют соответствующие им задачи со вторым порядком аппроксимации по h и τ.

Для доказательства устойчивости каждой из разностных схем воспользуемся спектральным признаком Неймана.

Рассмотрим разностную схему (38) для задачи 1:

$$\begin{cases} \dfrac{v_{ijk}^{n+1}-2v_{ijk}^{n}+v_{ijk}^{n-1}}{\tau^2}=\dfrac{v_{i+1jk}^{n}-2v_{ijk}^{n}+v_{i-1jk}^{n}}{h^2}, i=0,\pm1,...;j=0,\pm1,...;k=0,\pm1,...;n=1,2,..;\\ v_{ijk}^{n}=u_{ijk}^{n},\quad i=0,\pm1,...;\ j=0,\pm1,...;\ k=0,\pm1,...;\ n=0,1,2,...,\\ \dfrac{v_{ijk}^{n}-v_{ijk}^{n-1}}{\tau}=\dfrac{u_{ijk}^{n}-u_{ijk}^{n-1}}{\tau},\ i=0,\pm1,...;\ j=0,\pm1,...;k=0,...;n=1,2,... \end{cases}$$

Определим начальное условие в виде трехмерной гармоники, зависящей от трех вещественных параметров α, β, γ:

$$v_{ijk}^{0}=e^{I(\alpha i+\beta j+\gamma k)},\quad I^2=-1,\ \alpha,\beta,\gamma\in R. \quad (41)$$

Тогда решение задачи 1 при начальном условии (41) имеет вид

$$v_{ijk}^{n}=\lambda^n e^{I(\alpha i+\beta j+\gamma k)}. \quad (42)$$

Функция $e^{I(\alpha i+\beta j+\gamma k)}$ является собственной функцией разностного оператора

$$v_{ijk}^{n+1}=\frac{\tau^2}{h^2}v_{i+1jk}^{n}+2\left(1-\frac{\tau^2}{h^2}\right)v_{ijk}^{n}+\frac{\tau^2}{h^2}v_{i-1jk}^{n}-v_{ijk}^{n-1}. \quad (43)$$

$\lambda(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ – соответствующее собственное число разностного оператора.

Подставив это выражение в разностную схему, получим

$$\frac{\lambda^{n+1}e^{I(\alpha i+\beta j+\gamma k)}-2\lambda^{n}e^{I(\alpha i+\beta j+\gamma k)}+\lambda^{n-1}e^{I(\alpha i+\beta j+\gamma k)}}{\tau^2}= =\frac{\lambda^{n}e^{I(\alpha(i+1)+\beta j+\gamma k)}-2\lambda^{n}e^{I(\alpha i+\beta j+\gamma k)}+\lambda^{n}e^{I(\alpha(i-1)+\beta j+\gamma k)}}{h^2}. \quad (44)$$

Поделим полученное равенство на $\lambda^{n-1}e^{I(\alpha i+\beta j+\gamma k)}$, получим

$$\frac{\lambda^2-2\lambda+1}{\tau^2}=\frac{\lambda\left(e^{I\alpha}-2+e^{-I\alpha}\right)}{h^2}. \quad (45)$$

Обозначим $r=\dfrac{\tau^2}{h^2}$ и заметим, что

$$\frac{\lambda\left(e^{I\alpha}-2+e^{-I\alpha}\right)}{4}=\left(\frac{e^{I\alpha}-e^{-I\alpha}}{2I}\right)^2=-\sin^2\frac{\alpha}{2}, \quad (46)$$

получим

$$\lambda^2-2\lambda+1=-4r\lambda\sin^2\frac{\alpha}{2}; \quad (47)$$

$$\lambda^2-2\left(1-2r\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\lambda+1=0. \quad (48)$$

Для выполнения условия устойчивости необходимо, чтобы спектр разностного оператора $\lambda(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ лежал в единичном круге, т.е. $\left|\lambda(\alpha,\beta,\gamma)\right|\le 1$.

Произведение корней этого уравнения по теореме Виета равно единице. Если дискриминант

$$d=4r\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(r\sin^2\frac{\alpha}{2}-1\right) \quad (49)$$

квадратного уравнения отрицателен, то корни $\lambda_1(\alpha, \beta, \gamma)$ и $\lambda_2(\alpha, \beta, \gamma)$ комплексно-сопряженные и равны единице по модулю.

В случае $r < 1$ дискриминант остается отрицательным при всех α. В этом случае спектр заполняет часть единичной окружности.

В случае $r = 1$ спектр заполняет всю окружность.

При $r > 1$, по мере увеличения α от 0 до π, корни $\lambda_1(\alpha, \beta, \gamma)$ и $\lambda_2(\alpha, \beta, \gamma)$ двигаются из точки $\lambda = 1$ по единичной окружности: один по часовой, а другой против часовой стрелки соответственно и сходятся в точке $\lambda = -1$. Затем один из корней перемещается по вещественной оси из точки $\lambda = -1$ влево, а другой вправо, т.к. они вещественны и $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$.

Условие устойчивости выполнено при $r \le 1$.

Проведя аналогичные подстановки и преобразования для разностных схем (45) и (46), соответствующих вспомогательным задачам 2 и 3, получим

$$\lambda^2 - 2\left(1 - 2r\sin^2\frac{\beta}{2}\right)\lambda + 1 = 0$$ – для разностной схемы (45),

$$\lambda^2 - 2\left(1 - 2r\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)\lambda + 1 = 0$$ – для разностной схемы (46).

По рассуждениям, аналогичным для (41)–(49), получаем, что условие устойчивости для разностных схем (39) и (40) выполняется также при $r \le 1$.

Список литературы

1. Ерофеев В.Т. Композиционные строительные материалы на активированной воде затворения / В.Т. Ерофеев, Е.А. Митина, Д.В. Емельянов [и др.] // Строительные материалы. – 2007. – № 11. – С. 56–57.

2. Ерофеев В.Т. Долговечность цементных композитов на активированной воде / В.Т. Ерофеев, А.А. Матвиевский, Д.В. Емельянов [и др.] // Промышленное и гражданское строительство. – 2008. – № 7. – С. 51–53.

3. Ерофеев В.Т. Влияние активированной воды затворения на структурообразование цементных паст / В.Т. Ерофеев, В.Т. Фомичев, Д.В. Емельянов [и др.] // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Сер.: Строительствово и архитектура. – 2013. – Вып. 30(49). – С. 179–183.

4. Седова А.А. Установление показателей физико-химических свойств активированной воды для составления математической модели технологического процесса / А.А. Седова, А.К. Осипов, Д.В. Емельянов [и др.] // Вестник МАДИ. – 2011. – № 2. – С. 101–108.

5. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967.

References

1. Erofeev V.T., Mitina E.A., Matvievskij A.A., Osipov A.K., Emelyanov D.V., Judin P.V. *Kompozicionnye stroitel'nye materialy na aktivirovannoj vode zatvorenija* [Composite building materials on an activated water mixing]. *Stroitel'nye materialy* [Building materials]. 2007. no. 11. pp. 56–57.

2. Erofeev V.T., Mitina E.A., Matvievskij A.A., Emelyanov D.V., Judin P.V. *Dolgovechnost' cementnyh kompozitov na aktivirovannoj vode* [Durability of cement composites along a water]. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo* [Industrial and civil construction]. 2008. no. 7. pp. 51–53.

3. Erofeev V.T., Fomichev V.T., Emelyanov D.V., Rodin A.I., Eremin A.V. *Vlijanie aktivirovannoj vody zatvorenija na strukturoobrazovanie cementnyh past* [The effect of activated water mixing structure of cement pastes]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta* [Bulletin of Volgograd state architectural and construction University]. Ser.: Construction and architecture. 2013. Vol. 30(49). pp. 179–183.

4. Sedova A.A., Osipov A.K., Emelyanov D.V., Judin P.V., Erofeev V.T. *Ustanovlenie pokazatelej fiziko-himicheskih svojstv aktivirovannoj vody dlja sostavlenija matematicheskoj modeli tehnologicheskogo processa* [Establishing indicators of physico-chemical properties of activated water for the compilation of mathematical process models]. *Vestnik MADI* [Bulletin of MADI]. 2011. no. 2. pp. 101–108.

5. Janenko N.N. *Metod drobnyh shagov reshenija mnogomernyh zadach matematicheskoj fiziki* [Fractional step method for solving multidimensional problems of mathematical physics]. Novosibirsk: Science, 1967.

Рецензенты:

Камбург В.Г., д.т.н., профессор кафедры «Информационно-вычислительные системы», Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза;

Монастырев П.В., д.т.н., профессор, директор института архитектуры, строительства и транспорта, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов.

Работа поступила в редакцию 06.03.2015.