

УДК 519.6

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

**Чистяков А.Е., Фоменко Н.А., Проценко Е.А., Тимофеева Е.Ф., Григорян Л.А.**

*ФГБОУ ВО «Южный федеральный университет» Ростов-на-Дону,*

*e-mail: cheese\_05@mail.ru*

В работе представлены результаты численных экспериментов моделирования распространения волны на поверхности водоема, полученных на основе двух общепринятых математических моделей. Более того, рассмотренные модели учитывают взаимодействие волны с прямоугольными объектами, и как следствие, деформацию волны. Исходным уравнением первой математической модели, описывающей колебание водной поверхности, является волновое уравнение. Вторая математическая модель строится на основе системы уравнений Навье–Стокса и описывает движения водной среды в мелководных водоемах, при этом функция возвышения уровня выражается через значения скорости движения водной среды. В первом случае приведены результаты численного моделирования рассеяния плоской волны, взаимодействующей с прямоугольным объектом, установленным на дне водоема, во втором – результаты моделирования распространения волновых процессов при обтекании водной средой прямоугольного объекта, имеющего опоры.

**Ключевые слова:** двумерная математическая модель, система уравнений Навье–Стокса, функция возвышения, волновое уравнение

## THE RESULTS OF NUMERICAL MODELING OF DEFORMATION OF FLAT WAVE

**Chestyakov A.E., Fomenko N.A., Protsenko E.A., Timofeeva E.F., Grigoryan L.A.**

*South Federal University, Rostov-on-Don,*

*e-mail: cheese\_05@mail.ru*

In the work results of numerical experiments of modeling of wave propagation on the surface of a basin, based on two common mathematical models. Moreover, these models take into account the interaction of waves with a rectangular objects, and as a consequence of the deformation of the wave. The governing equation of the first mathematical model is the wave equation. This equation describes wavering of the water surface. The second mathematical model is based on Navier–Stokes equation and describes the motion of water environment in shallow water basins; in this case the level elevation function is calculated on the basis of the velocity of the water environment. In the first case, presented the results of numerical modeling of scattering of flat wave with a rectangular object mounted on the bottom of the basins, in the second – the results of modeling of wave propagation at a flow of aqueous medium around of rectangular object having the bearing.

**Keywords:** Two-dimensional mathematical model, Navier–Stokes equations, level elimination function, wave equation

При распространении волн в мелководных водоемах нередко на их пути встречаются различные препятствия, такие как волноломы, пирсы, берегоукрепительные сооружения и др. В результате чего происходит деформация волны. Также немаловажным является то, что в результате постоянного воздействия волн на берегоукрепительные сооружения происходит их разрушение. И изучение волновых процессов, происходящих около надводных и полностью погруженных в жидкость тел, является важной задачей, так как моделирование данных процессов позволяет предугадать последствия этих воздействий.

В работе приведены результаты численных экспериментов моделирования распространения волны на поверхности водоема. Представлены модели, в которых объект, находящийся в жидкости, рассматривается как прямоугольник. В первом случае как объект, простирающийся от дна до поверхности жидкости, во втором, как объект, имеющий опоры, установленные на дне водоема.

### Постановка волновой задачи

Требуется найти решение неоднородного волнового уравнения:

$$H''_t = a^2 (H'_x)_x + a^2 (H'_y)_y + f, \quad (1)$$

удовлетворяющего начальным условиям:

$$H(x, y, 0) = \varphi_0(x, y),$$

$$H'_t(x, y, 0) = \varphi_1(x, y) \quad (2)$$

и граничным условиям:

$$H(x, y, t) = \alpha, \text{ при } (x, y) \in \gamma_1. \quad (3)$$

$$H'_n(x, y, t) = \alpha H + \beta, \text{ при } (x, y) \in \gamma_2, \quad (4)$$

где  $\alpha$  – волновое число,  $f$  – функция, описывающая распределение и интенсивность колебаний.

### Аппроксимация задачи

Расчетная область вписана в прямоугольник. Покроем область равномерной прямоугольной расчетной сеткой  $\omega = \omega_x \times \omega_y$ .

$$\omega_t = \{t^n = nh_t, 0 \leq n \leq N_t - 1, l_t = h_t (N_t - 1)\},$$

$$\omega_x = \{x_i = ih_x, 0 \leq i \leq N_x - 1, l_x = h_x (N_x - 1)\},$$

$$\omega_y = \{y_j = jh_y, 0 \leq j \leq N_y - 1, l_y = h_y (N_y - 1)\},$$

где  $n, i, j$  – индексы по временной координате и пространственным координатным направлениям  $Ox, Oy$  соответственно,  $h_t, h_x, h_y$  – шаги по временной координате и пространственным координатным направлениям  $Ox, Oy$  соответственно,  $N_t, N_x, N_y$  – количество узлов по временной коор-

динате и пространственным координатным направлениям  $Ox, Oy$  соответственно,  $l_t, l_x, l_y$  – длина расчетной области по временной координате и пространственным координатным направлениям  $Ox, Oy$  соответственно.

Построим разностную схему, аппроксимирующую уравнение (1) с соответствующими граничными и начальными условиями (2)–(4). Для получения дискретной модели воспользуемся интегро-интерполяционным методом [1–3]. Проинтегрируем уравнение (1) по области  $D_{txy}$ :

$$D_{txy} \in \left\{ t \in [t^{n-1/2}, t^{n+1/2}], x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}], y \in [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}] \right\},$$

в результате чего получим:

$$\iiint_{D_{txy}} H_{tt}'' dt dx dy = a^2 \iiint_{D_{txy}} H_{xx}'' dt dx dy + a^2 \iiint_{D_{txy}} H_{yy}'' dt dx dy + \iiint_{D_{txy}} f dt dx dy.$$

После вычисления интегралов в левой и правой части уравнения разделим полученное выражение на  $h_x^2, h_y^2, h_t^2$ , в результате чего получим конечно-разностную схему аппроксимирующую задачу (1)

$$\frac{H_{i,j}^{n+1} - 2H_{i,j}^n + H_{i,j}^{n-1}}{h_t^2} = a^2 \frac{\bar{H}_{i+1,j} - 2\bar{H}_{i,j} + \bar{H}_{i-1,j}}{h_x^2} + a^2 \frac{\bar{H}_{i,j+1} - 2\bar{H}_{i,j} + \bar{H}_{i,j-1}}{h_y^2} + f_{i,j}^n,$$

$$\bar{H}_{i,j} = \sigma_1 H_{i,j}^{n+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) H_{i,j}^n + \sigma_2 H_{i,j}^{n-1}.$$

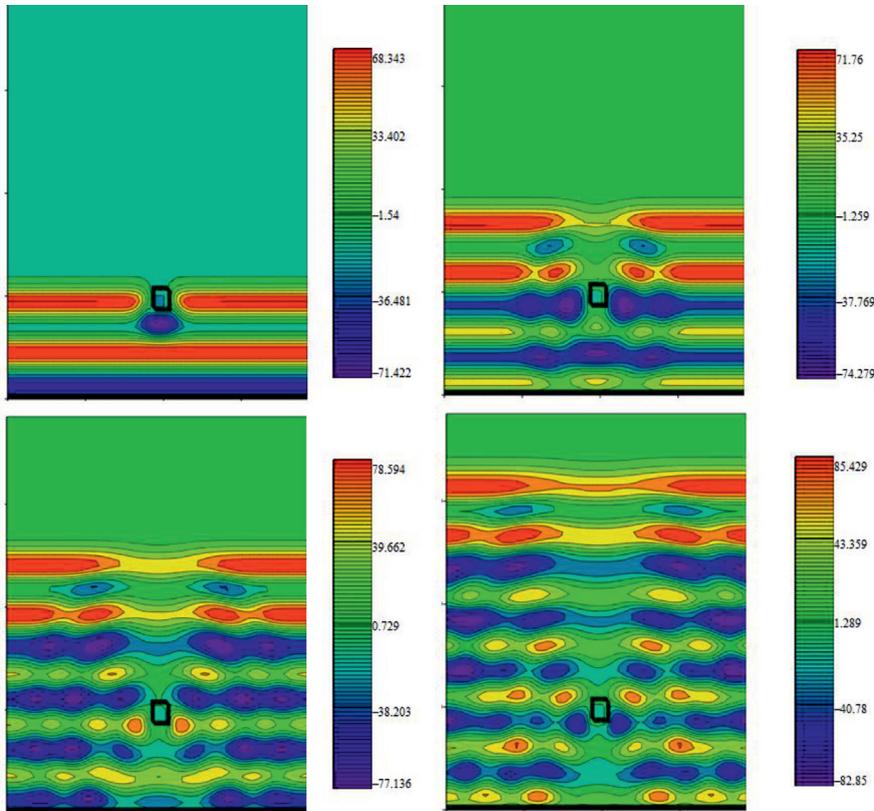


Рис. 1. Рассеяние плоской волны на прямоугольнике

### Результаты численных экспериментов

На рис. 1 приведены результаты численных экспериментов по моделированию рассеяния волны на прямоугольнике.

#### Постановка задачи волновой

При построении двумерной математической модели движения водной среды воспользовались трехмерной гидростатической моделью [7, 14]. Исходными уравнениями гидродинамики (теории мелкой воды) являются:

– система уравнений Навье–Стокса [1–4, 8]

$$\begin{aligned} u'_t + uu'_x + vv'_y + ww'_z &= -\frac{1}{\rho} P'_x + \\ &+ (\mu u'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (\eta u'_z)'_z, \\ v'_t + uv'_x + vv'_y + wv'_z &= -\frac{1}{\rho} P'_y + \\ &+ (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (\eta v'_z)'_z, \end{aligned} \quad (5)$$

– уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$u'_x + v'_y + w'_z = 0, \quad (6)$$

– уравнение гидростатики [9, 10]

$$P = \rho g (z + \xi). \quad (7)$$

Система уравнений (5)–(7) рассматривается при следующих граничных условиях:

– на дне условие непроницаемости и трения [4, 14]

$$\rho_v \eta u'_n = \tau_{x,b}(t),$$

$$\rho_v \eta v'_n = \tau_{y,b}(t),$$

$$V'_n = 0,$$

– на поверхности задается подъем уровня и ветровые напряжения [11]

$$\rho \eta u'_n = -\tau_{x,p}(t),$$

$$\rho \eta v'_n = -\tau_{y,p}(t),$$

$$w = -\xi'_t,$$

– на боковых границах условие скольжения без трения

$$u'_n = 0, \quad v'_n = 0, \quad \xi'_n = 0,$$

где  $\xi$  – функция подъема уровня (функция возвышения),  $V = \{u, v, w\}$  – вектор скорости движения водной среды,  $P$  – давление,  $\mu, \eta$  – коэффициенты турбулентного обмена

по горизонтальному и вертикальному направлениям соответственно,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\rho$  – плотность жидкости,  $\tau_x, \tau_y$  – тангенциальное напряжение на дне жидкости.

Уравнение гидростатики в случае наличия на поверхности жидкости надводного тела [13]:

$$P = \rho g (z + \chi) + P_g = \rho g \left( z + \chi + \frac{P_g}{\rho g} \right).$$

Доопределим функцию возвышения в случае наличия на поверхности жидкости надводного тела:

$$\xi = \chi + \frac{P_g}{\rho g},$$

где  $\chi$  – функция, описывающая геометрию дна надводного тела.

#### Двумерная модель гидродинамики

Расчетной областью является прямоугольник. Так же, как и в случае волновой задачи, покроем область равномерной прямоугольной расчетной сеткой  $\omega = \omega_x \times \omega_y$ .

Уравнение неразрывности (6) в гидростатическом случае запишется в виде

$$\theta'_t + ((H + \theta)u)'_x + ((H + \theta)v)'_y = 0, \quad (8)$$

где  $\theta = \min(\chi, \xi)$ .

Система уравнений Навье–Стокса (5) с учетом гидростатического приближения в двумерном случае запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} ((H + \theta)u)'_t + (H + \theta)uu'_x + (H + \theta)vu'_y &= \\ &= -g(H + \theta)\xi'_x + ((H + \theta)\mu u'_x)'_x + \\ &+ ((H + \theta)\mu u'_y)'_y + \frac{\tau_{x,p}}{\rho} - \frac{\tau_{x,b}}{\rho_v}, \\ ((H + \theta)v)'_t + (H + \theta)uv'_x + (H + \theta)vv'_y &= \\ &= -g(H + \theta)\xi'_y + ((H + \theta)\mu v'_x)'_x + \\ &+ ((H + \theta)\mu v'_y)'_y + \frac{\tau_{y,p}}{\rho} - \frac{\tau_{y,b}}{\rho_v}. \end{aligned} \quad (9)$$

#### Схемы расщепления по физическим процессам

Рассмотрим двумерную модель движения водной среды, представленную урав-

нениями (8), (9). Воспользуемся схемами расщепления по физическим процессам [2, 9–12] для системы (9). При этом решение исходной задачи находится вначале на некоем промежуточном временном слое:

$$\begin{aligned} & (H + \theta) \frac{u^{n+\sigma} - u^n}{h_t} + (H + \theta) u u'_x + \\ & + (H + \theta) v u'_y = ((H + \theta) \mu u'_x)'_x + \\ & + ((H + \theta) \mu u'_y)'_y + \frac{\tau_{x,p}}{\rho} - \frac{\tau_{x,b}}{\rho_v}, \\ & (H + \theta) \frac{v^{n+\sigma} - v^n}{h_t} + (H + \theta) u v'_x + \\ & + (H + \theta) v v'_y = ((H + \theta) \mu v'_x)'_x + \\ & + ((H + \theta) \mu v'_y)'_y + \frac{\tau_{y,p}}{\rho} - \frac{\tau_{y,b}}{\rho_v}, \end{aligned} \quad (10)$$

а затем на следующем

$$\begin{aligned} & (H + \theta) \frac{u^{n+1} - u^{n+\sigma}}{h_t} = -g(H + \theta) \xi'_x, \\ & (H + \theta) \frac{v^{n+1} - v^{n+\sigma}}{h_t} = -g(H + \theta) \xi'_y. \end{aligned} \quad (11)$$

Для решения задачи (11) необходимо вычислить функцию возвышения уровня для этого про дифференцируем первое уравнение данной системы по переменной  $x$ , второе по  $y$  и сложим их в результате чего получим:

$$\begin{aligned} & \frac{((H + \theta) u^{n+1})'_x - ((H + \theta) u^{n+\sigma})'_x}{h_t} + \\ & + \frac{((H + \theta) v^{n+1})'_y - ((H + \theta) v^{n+\sigma})'_y}{h_t} = \\ & = -g((H + \theta) \xi'_x)'_x - g((H + \theta) \xi'_y)'_y. \end{aligned}$$

С учетом выполнения уравнения неразрывности поля скорости данное уравнение может быть записано:

$$\begin{aligned} & \theta'_t - h_t ((H + \theta) \xi'_x)'_x - h_t ((H + \theta) \xi'_y)'_y = \\ & = -g((H + \theta) u^{n+\sigma})'_x - g((H + \theta) v^{n+\sigma})'_y. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнения системы (10)–(12) решаются в следующем порядке: вначале находим поле скорости на промежуточном временном шаге (10), затем находим функцию возвышения уровня (12) и потом уточняется поле скорости (11).

Приведены результаты численных экспериментов по моделированию распространения гидродинамических волновых процессов, которые дают возможность провести оценку воздействия волн на сооружения, имеющие опору на дне водоема (рис. 2).

Область применения – построение поля скоростей движения водной среды на сетках с высокой разрешающей способностью, учитывающих такие физические параметры, как ветровые напряжения, трение о дно, форму, амплитуду и частоту волновых колебаний, рельеф дна и учет наличия различных сооружений в мелководном водоеме.

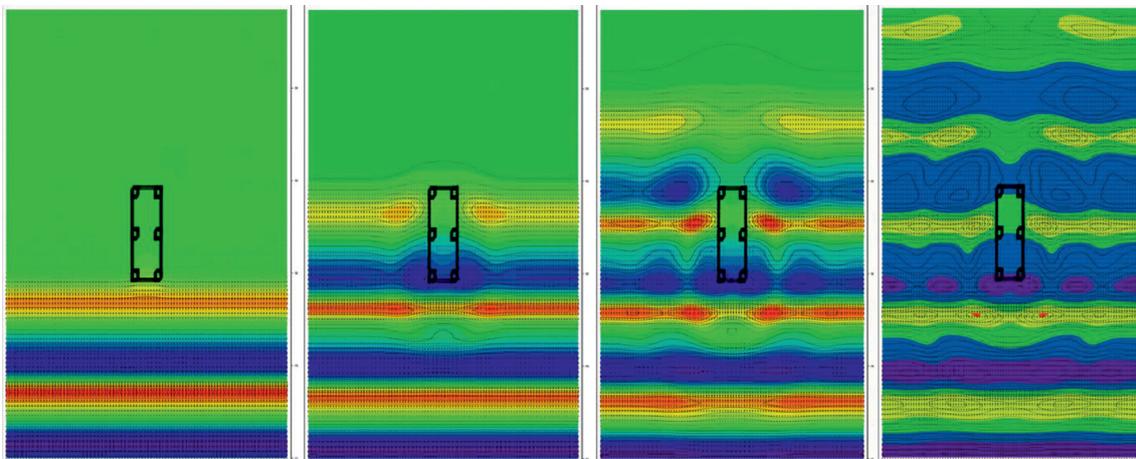


Рис. 2. Динамика изменения функции возвышения уровня

### Заключение

Разработана двумерная модель волновых гидродинамических процессов, которая описывает движение водной среды как в случае наличия препятствия (сооружений, конструкций) на поверхности водоема, так и в случае его отсутствия. Из полученной системы уравнений нетрудно получить модель движения мелкой воды и двумерную модель, не учитывающую изменение геометрии водной поверхности. При моделировании плоских двумерных течений впервые использована дискретная модель, учитывающая частичную заполненность контрольных областей, отличную от нуля и единицы, для описания сложной границы раздела двух сред.

*Работа выполнена при частичной поддержке проектов Программы № 43 фундаментальных исследований Президиума РАН по стратегическим направлениям развития науки «Фундаментальные проблемы математического моделирования».*

### Список литературы

1. Алексеенко Е.В., Сидоренко Б.В., Колгунова О.В., Чистяков А.Е. Сравнительный анализ классических и неклассических моделей гидродинамики водоемов с турбулентным обменом // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 6–18.
2. Белоцерковский О.М., Гушин В.А., Щенников В.В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1975. – № 15 (1). – С. 197–207.
3. Роуч П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. – М.: Мир, 1980.
4. Васильев В.С., Сухинов А.И. Прецизионные двумерные модели мелких водоемов // Математическое моделирование. – 2003. – Т. 15, № 10. – С. 17–34.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989.
6. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978.
7. Сухинов А.И., Тимофеева Е.Ф., Чистяков А.Е. Построение и исследование дискретной математической модели расчета прибрежных волновых процессов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 22–32.
8. Сухинов А.И., Никитина А.В., Чистяков А.Е., Семенов И.С. Математическое моделирование условий формирования заморозов в мелководных водоемах на многопроцессорной вычислительной системе // Вычислительные методы и программирование. – 2013. – Т. 14. – С. 103–112.
9. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Алексеенко Е.В. Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23, № 3. – С. 3–21.
10. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Бондаренко Ю.С. Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 6–13.
11. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Тимофеева Е.Ф., Шишня А.В. Математическая модель расчета прибрежных волновых процессов // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 8. – С. 32–44.
12. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Фоменко Н.А. Методика построения разностных схем для задачи диффузии-конвекции-реакции, учитывающих степень заполненности

контрольных ячеек // Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2013. – № 4. – С. 87–98.

13. Фоменко Н.А. Моделирование гидродинамических процессов при обтекании корпуса судна // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 139–147.

14. Чистяков А.Е. Трехмерная модель движения водной среды в Азовском море с учетом транспорта солей и тепла // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 75–82.

### References

1. Alekseenko E.V., Sidorenko B.V., Kolgunova O.V., Chistjakov A.E. Sravnitel'nyj analiz klassicheskikh i neklassicheskikh modelej gidrodinamiki vodoemov s turbulentnym обменom // Izvestija JuFU. Tehnicheskie nauki. 2009. no. 8 (97). pp. 6–18.
2. Belocerkovskij O.M., Gushhin V.A., Shhennikov V.V. Metod rasshhepleniya v primenenii k resheniju zadach dinamiki vjazkoj neszhimaemoj zhidkosti // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. 1975. no. 15 (1). pp. 197–207.
3. Rouch P. Vychislitel'naja gidrodinamika / P. Rouch. M.: Mir, 1980.
4. Vasil'ev V.S., Suhinov A.I. Precizionnye dvumernye modeli melkih vodoemov // Matematicheskoe modelirovanie. 2003. T. 15, no. 10. pp. 17–34.
5. Samarskij A.A. Teorija raznostnyh shem. M.: Nauka, 1989.
6. Samarskij A.A., Nikolaev E.S. Metody reshenija setochnykh uravnenij. M.: Nauka, 1978.
7. Suhinov A.I., Timofeeva E.F. Chistjakov A.E. Postroenie i issledovanie diskretnoj matematicheskoy modeli rascheta pribrezhnykh volnovykh processov // Izvestija JuFU. Tehnicheskie nauki. 2011. no. 8 (121). pp. 22–32.
8. Suhinov A.I., Nikitina A.V., Chistjakov A.E., Semenov I.S. Matematicheskoe modelirovanie uslovij formirovaniya zamorov v melkovodnykh vodoemah na mnogoproцessornoj vychislitel'noj sisteme // Vychislitel'nye metody i programmirovaniye. 2013. T. 14. pp. 103–112.
9. Suhinov A.I., Chistjakov A.E., Alekseenko E.V. Chislennaja realizacija trehmernoj modeli gidrodinamiki dlja melkovodnykh vodoemov na supervychislitel'noj sisteme // Matematicheskoe modelirovanie. 2011. T. 23, no. 3. pp. 3–21.
10. Suhinov A.I., Chistjakov A.E., Bondarenko Ju.S. Ocenka pogreshnosti reshenija uravnenija diffuzii na osnove shem s vesami // Izvestija JuFU. Tehnicheskie nauki. 2011. no. 8 (121). pp. 6–13.
11. Suhinov A.I., Chistjakov A.E., Timofeeva E.F., Shishnya A.V. Matematicheskaja model' rascheta pribrezhnykh volnovykh processov // Matematicheskoe modelirovanie. 2012. T. 24, no. 8. pp. 32–44.
12. Suhinov A.I., Chistjakov A.E., Fomenko N.A. Metodika postroeniya raznostnyh shem dlja zadachi diffuzii-konvekcii-reakcii, uchityvajushih stepen' zapolnennosti kontrol'nyh jacheek // Izvestija Juzhnogo federal'nogo universiteta. Tehnicheskie nauki. 2013. no. 4. pp. 87–98.
13. Fomenko N.A. Modelirovanie gidrodinamicheskikh processov pri obtekanii korpusa sudna // Izvestija JuFU. Tehnicheskie nauki. 2011. no. 8 (121). pp. 139–147.
14. Chistjakov A.E. Trehmernaja model' dvizhenija vodnoj sredy v Azovskom more s uchetoм transporta solej i tepla // Izvestija JuFU. Tehnicheskie nauki. 2009. no. 8 (97). pp. 75–82.

### Рецензенты:

Илюхин А.А., д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры математики, Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) РИНХ, г. Таганрог;

Сухинов А.И., д.ф.-м.н., профессор, Начальник НОЦ «Комплексные исследования и математическое моделирование» НИИ многопроцессорных вычислительных систем им. А.В. Каляева, ЮФУ, г. Таганрог.

Работа поступила в редакцию 12.02.2015.