УДК 51.73

СОПОСТАВЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В СКВАЖИНЕ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ РАЗЛОЖЕНИЯ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ В РЯД МАКЛОРЕНА

Филиппов А.И., Ахметова О.В., Зеленова М.А.

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, e-mail: filippovai@rambler.ru, ahoksana@yandex.ru, marina_ag@inbox.ru

Представлена математическая модель, позволяющая на основе асимптотического метода строить аналитические и численные решения задач теплопроводности. Метод демонстрируется на примере поэтапного решения нестационарной задачи теплообмена восходящего цилиндрического потока флюида, окруженного сплошным массивом. Осуществлены постановки краевых задач для нулевого и первого коэффициентов асимптотического разложения. Найдены их аналитические решения. Сформулирована задача для остаточного члена. Установлено, что нулевое приближение описывает «асимптотически усредненные» значения температуры, а первый коэффициент разложения, найденный с дополнительными условиями, следующими из требования тривиальных решений осредненной задачи для остаточного члена, при больших временах определяет стационарные температурные поля. Получено точное решение параметризованной задачи. Достоверность развитого метода обоснована сопоставлением полученных асимптотических решений с коэффициентами разложения точного решения параметризованной задачи в ряд Маклорена по формальному параметру.

Ключевые слова: асимптотический метод, формальный параметр, температурное поле, скважина, теплообмен

QUASISTATIONARY TEMPERATURE FIELD IN A THIN PERMEABLE ANISOTROPIC LAYER IS IN THE ZERO APPROXIMATION

Filippov A.I., Akhmetova O.V., Zelenova M.A.

Sterlitamak branch of Bashkir State University, Sterlitamak, e-mail: filippovai@rambler.ru, ahoksana@yandex.ru, marina_ag@inbox.ru

A mathematical model, allowing on the basis of the asymptotic method to build the analytical and numerical solutions of heat conduction problems. The method is demonstrated on the example of a phased solution of the nonstationary problem of the rising heat of a cylindrical fluid flow surrounded by a continuous array. The major productions of boundary value problems for the zero and the first coefficients of the asymptotic expansion. Found their analytical solutions. The problem of for the remainder. It was found that the zero approximation describes «asymptotically average» temperature, and the first expansion coefficient found with additional conditions, the following from the requirement of trivial solutions of the homogenized problem for the remainder term, for large time determines the stationary temperature fields. An exact solution of a parameterized problem. The validity of the developed method is proved by comparison of the asymptotic solutions with expansion coefficients of the exact solution of a parameterized problem in the Maclaurin series for the formal parameter.

Keywords: asymptotic method, formal parameter, temperature field, well, the heat transfer

В технических приложениях большое значение имеют задачи по определению осредненных по области значений физических параметров, например тепловой эффективности [4], потерь тепла [12], тепловой производительности теплообменников [1], термоупругих напряжений [2] и т.д. Для этого созданы специальные методы, например схема Ловерье [4, 12], метод «сосредоточенной емкости» [1, 2] и др. Однако при использовании этих методов возникают проблемы определения погрешностей физических параметров или приближенного детального описания полей в области осреднения.

В работах [5–8] и [10–11] показано, что такие задачи могут быть успешно решены на основе асимптотического метода при специальном выборе формального параметра асимптотического разложения. Применение этого метода к задачам сопряжения областей, в одной из которых преобладает конвективная теплопроводность, и его сущность на примере известной задачи Коши рассмотрены в монографии [9]. Там же описан случай применения формального параметра в квазистационарной задаче теплообмена, где рассмотренный метод асимптотического разложения приводит к точному решению в ограниченном числе слагаемых разложения.

В данной статье демонстрируется поэтапное решение нестационарной задачи теплообмена восходящего цилиндрического потока флюида, окруженного сплошным массивом и сравнение полученных асимптотических выражений с коэффициентами разложения точного решения в ряд Маклорена.

Параметризация. Для простоты математическая постановка задачи о температурном поле в вертикальной трубе с учетом адиабатического эффекта в восходящем потоке представлена в безразмерных переменных [11]

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1}{\partial r}\right), \quad r > 1,\ t > 0; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\chi}{\Lambda\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \mathrm{Pe}\nu\left(1 - \mathrm{H}\right),$$

$$0 < r < 1,\ t > 0; \qquad (2)$$

$$T\big|_{r=1} = T\big|_{r=1};$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=1} = \varepsilon\Lambda\frac{\partial T_1}{\partial r}\Big|_{r=1}; \qquad (3)$$

$$T\big|_{t=0} = T\big|_{t=10} = 0;$$

$$T_1\big|_{r\to\infty} = 0. \qquad (4)$$

В задаче (1)–(4) введен параметр асимптотического разложения ε формальной заменой Λ на ε×Λ. Устремление ε к 0 соответствует возрастанию радиальной теплопроводности до бесконечности, что приводит к выравниванию температурного фронта по r в области от 0 до 1.

Разложение по асимптотическому параметру. Для получения асимптотических решений задачу (1)–(4) представим в виде асимптотической формулы по параметру ε

$$T_1 = T_1^{(0)} + \varepsilon T_1^{(1)} + \ldots + \varepsilon^n T_1^{(n)} + \Theta_1^{(n)};$$

$$T = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \ldots + \varepsilon^n T^{(n)} + \Theta^{(n)}. \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (1)–(4), запишем разбитую по степеням параметра ε задачу

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r}\right) + \varepsilon^1\left[\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r}\right)\right] + \ldots + \left[\frac{\partial \Theta_1^{(n)}}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Theta_1^{(n)}}{\partial r}\right)\right] = 0; \qquad (6)$$

$$\begin{gathered}-\frac{\chi}{\Lambda}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r}\right) + \varepsilon^1\left[\frac{\partial T^{(0)}}{\partial t} - \frac{\chi}{\Lambda}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r}\right) - \mathrm{Pe}\nu\left(1-\mathrm{H}\right)\right] + \ldots \\ \ldots + \left[\frac{\partial \Theta^{(n-1)}}{\partial t} - \frac{\chi}{\Lambda}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Theta^{(n)}}{\partial r}\right)\right] = 0;\end{gathered} \qquad (7)$$

$$T^{(0)}\big|_{r=1} - T_1^{(0)}\big|_{r=1} + \varepsilon^1\left(T^{(1)}\big|_{r=1} - T_1^{(1)}\big|_{r=1}\right) + \ldots + \left(\Theta^{(n)}\big|_{r=1} - \Theta_1^{(n)}\big|_{r=1}\right) = 0;$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r}\Big|_{r=1} + \varepsilon^1\left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r}\Big|_{r=1} - \Lambda\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r}\Big|_{r=1}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial \Theta^{(n)}}{\partial r}\Big|_{r=1} - \Lambda\frac{\partial \Theta_1^{(n-1)}}{\partial r}\Big|_{r=1}\right) = 0; \qquad (8)$$

$$T^{(0)}\big|_{t=0} + \varepsilon^1 T^{(1)}\big|_{t=0} + \ldots + \Theta^{(n)} = 0; T_1^{(0)}\big|_{t=0} + \varepsilon^1 T_1^{(1)}\big|_{t=0} + \ldots + \Theta_1^{(1)}\big|_{t=0} = 0;$$

$$T_1^{(0)}\big|_{r\to\infty} + \varepsilon^1 T_1^{(1)}\big|_{r\to\infty} + \ldots + \Theta_1^{(1)}\big|_{r\to\infty} = 0. \qquad (9)$$

Из задачи (6)–(9) можно выписать постановку для любого из коэффициентов асимптотического разложения при одинаковых степенях параметра асимптотического разложения. Однако уравнение (7) и условие (8) содержат соседние коэффициенты разложения при одинаковых степенях ε и в этом смысле являются «зацепленными».

Расцепление задачи для нулевого коэффициента разложения. Приравнивая коэффициент ε к нулю из (7), получим выражение

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r}\right)=0,$$

интегрируя которое с учетом условия (8) и требования ограниченности решения на бесконечности, определяем, что нулевой коэффициент асимптотического разложения температуры в области $0 < r < 1$ не зависит от радиальной координаты. Используя этот факт, запишем «зацепленное» выражение из (7) при первой степени коэффициента асимптотического разложения в виде

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r}\right)=\frac{\Lambda}{\chi}\left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial t}-\mathrm{Pe}\nu\left(1-\mathrm{H}\right)\right). \quad (10)$$

Интегрируя (10) с использованием условий (8), получим уравнение, содержащее только нулевые коэффициенты разложения

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial t}-\mathrm{Pe}\nu\left(1-\mathrm{H}\right)=2\chi\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r}\Big|_{r=1},$$

$$0 < r < 1,\ t > 0.$$

Постановка и решение задачи в нулевом приближении. Окончательно постановка задачи для нулевого коэффициента разложения запишется как

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial t}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r}\right)=0,\ r > 1,\ t > 0; \quad (11)$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial t}-\mathrm{Pe}\nu\left(1-\mathrm{H}\right)=2\chi\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r}\Big|_{r=1},$$

$$0 < r < 1,\ t > 0; \quad (12)$$

$$T^{(0)}=T_1^{(0)}\Big|_{r=1};\ T^{(0)}\Big|_{t=0}=T_1^{(0)}\Big|_{t=0}=0;$$

$$T^{(0)}\Big|_{r\to\infty}=0. \quad (13)$$

Заметим, что, усреднив задачу (1)–(4) по r от 0 до 1 интегрально, получим постановку

$$\frac{\partial T_1}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1}{\partial r}\right),\quad r > 1,\ t > 0;$$

$$\frac{\partial\langle T\rangle_a}{\partial t}-\mathrm{Pe}\nu\left(1-\mathrm{H}\right)=2\chi\frac{\partial T_1}{\partial r}\Big|_{r=1},$$

$$0 < r < 1,\ t > 0;$$

$$\langle T\rangle_a\Big|_{r=1}=T\Big|_{r=1};\quad \langle T\rangle_a\Big|_{t=0}=T\Big|_{t=10}=0;$$

$$T_1\Big|_{r\to\infty}=0,$$

которая совпадает с (11)–(13) с точностью до обозначений. Это определяет физический смысл нулевого коэффициента разложения как некоторым образом осредненное в области $0 < r < 1$ поле температуры. В более сложных случаях нелинейных задач и задач с переменными коэффициентами, когда интегральная процедура осреднения не может быть осуществлена, построение нулевого коэффициента представляет асимптотическое осреднение.

Решение задачи для нулевого коэффициента разложения отыскивается с использованием преобразования Лапласа – Карсона [3]. В пространстве изображений задача (11)–(13) примет вид

$$pT_1^{(0)u}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial r}\right)=0,\quad r > 1; \quad (14)$$

$$pT^{(0)u}-\mathrm{Pe}\nu\left(1-\mathrm{H}\right)=2\chi\frac{\partial T_1^{(0)u}}{\partial r}\Big|_{r=1},\ r < 1; \quad (15)$$

$$T^{(0)u}=T_1^{(0)u}\Big|_{r=1};\quad T_1^{(0)u}\Big|_{r\to\infty}=0. \quad (16)$$

Выражение (14) представляет собой известное уравнение Бесселя, решение которого с учетом (16) запишется как $T_1^{(0)u}=K_0\left(r\sqrt{p}\right)T^{(0)u}\Big/K_0\left(\sqrt{p}\right)$. Подставляя в (15) производную от $T_1^{(0)u}$ при $r = 1$, получим для $T^{(0)u}$ алгебраическое уравнение. Таким образом, решения задачи (14)–(16) представятся как

$$T^{(0)u}=\frac{\mathrm{Pe}\nu\left(1-\mathrm{H}\right)}{p+2\chi k\sqrt{p}},\quad r < 1;$$

$$T_1^{(0)u}=\frac{K_0\left(r\sqrt{p}\right)}{K_0\left(\sqrt{p}\right)}\left(\frac{\mathrm{Pe}\nu\left(1-\mathrm{H}\right)}{p+2\chi k\sqrt{p}}\right),\ r > 1. \quad (17)$$

Уточнение физических полей в области осреднения достигается построением первого коэффициента разложения, которое в сложных случаях требует добавочных условий.

Математическая постановка задачи для первого коэффициента разложения. «Расцепленная» математическая постановка для первого коэффициента разложения имеет вид [5]

$$\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial t}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r}\right)=0,\ r>1,\ t>0; \quad (18)$$

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial t}+\Lambda\frac{1-2r^{22}}{8\chi}\frac{\partial\ T^{(0)}}{\partial t^2}=2\chi\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r}\Big|_{r=1},$$

$$r<1,\ t>0; \quad (19)$$

$$T^{(1)}\big|_{r=1}=T_1^{(1)}\big|_{r=1};$$

$$T^{(1)}\big|_{t=0}=T_1^{(1)}\big|_{t=0}=0; \quad T^{(1)}\big|_{r\to\infty}=0. \quad (20)$$

В пространстве изображений Лапласа – Карсона задача для первых коэффициентов разложения (18)–(20) запишется как

$$pT_1^{(1)u}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1^{(1)u}}{\partial r}\right)=0,\ r>1; \quad (21)$$

$$pT^{(1)u}+\Lambda\frac{1-2r^2}{8\chi}p\left[pT^{(0)u}-\mathrm{Pe}\nu\left(1-\mathrm{H}\right)\right]=$$

$$=2\chi\frac{\partial T_1^{(1)u}}{\partial r}\Big|_{r=1},$$

$$r<1; \quad (22)$$

$$T^{(1)u}\big|_{r=1}=T_1^{(1)u}\big|_{r=1}; \quad T_1^{(1)u}\big|_{r\to\infty}=0. \quad (23)$$

Последовательно интегрируя (10), получим общий вид выражения для первого коэффициента разложения

$$T^{(1)}=\Lambda r^2\left[\left(\partial T^{(0)}/\partial t\right)-\mathrm{Pe}\nu\left(1-\mathrm{H}\right)\right]\Big/4\chi+B(t),$$

которое в пространстве изображений Лапласа – Карсона примет вид

$$T^{(1)u}=\Lambda r^2\left[pT^{(0)u}-\mathrm{Pe}\nu\left(1-\mathrm{H}\right)\right]\Big/4\chi+B^u(p).$$

Решение задачи для первого коэффициента разложения отыскивается аналогично решению для нулевого приближения. Выражения для первого коэффициента разложения в скважине и окружающей среде представятся как

$$T^{(1)u}=-\left[\frac{2r^2-1}{4}-\frac{\chi k}{2\left(\sqrt{p}+2\chi k\right)}\right]\times \quad (24)$$

$$\times\Lambda k\sqrt{p}T^{(0)u};$$

$$T_1^{(1)u}=-\frac{K_0\left(r\sqrt{p}\right)}{K_0\left(\sqrt{p}\right)}\times$$

$$\times\left[\frac{2r^2-1}{4}-\frac{\chi k}{2\left(\sqrt{p}+2\chi k\right)}\right]\Lambda k\sqrt{p}T^{(0)u} \quad (25)$$

соответственно. Выражения для первого коэффициента асимптотического разложения зависят от радиальной координаты во всех областях и позволяют изучать изменение температуры по радиусу трубы. Кроме того, из выражений для первого коэффициента разложения следуют стационарные решения задач, полученные при формальном устремлении времени к бесконечности. В этом смысле построение первого коэффициента разложения представляет важнейшую задачу определения стационарных решений ряда задач теории теплопроводности.

В рассматриваемой задаче (19)–(21) все условия выполняются. В более сложных случаях требуется ослабление начальных и (или) граничных условий. Искомые условия определяются из требования тривиального решения осредненной задачи для остаточного члена, и в этом смысле соответствующие выражения для нулевого и первого приближения названы «в среднем точными».

Задача для остаточного члена. Обозначим сумму слагаемых после первого коэффициента разложения за остаточный член Θ, тогда решение задачи (1)–(4) строится в виде асимптотической формулы

$$T=T^{(0)}+\varepsilon T^{(1)}+\Theta;$$

$$T_1=T_1^{(0)}+\varepsilon T_1^{(1)}+\Theta_1, \quad (26)$$

где Θ – остаточный член.

$$\frac{\partial\Theta_1}{\partial t}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Theta_1}{\partial r}\right)=0,\ r>1, \quad (27)$$

$$\varepsilon\frac{\partial\Theta}{\partial t}-\frac{\chi}{\Lambda}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)=-\varepsilon^2\frac{\partial T^{(1)}}{\partial t},\ r<1, \quad (28)$$

$$\Theta\big|_{r=1}=\Theta_1\big|_{r=1};\ \frac{\partial\Theta}{\partial r}\bigg|_{r=1}=\varepsilon\Lambda\frac{\partial\left(\varepsilon T_1^{(1)}+\Theta_1\right)}{\partial r}\bigg|_{r=1}; \quad (29)$$

$$\Theta\big|_{t=0}=0; \quad \Theta_1\big|_{t=0}=0; \quad \Theta_1\big|_{r\to\infty}=0. \quad (30)$$

Интегрально осредненная в области $0<r<1$ задача для остаточного члена имеет вид

$$\frac{\partial\Theta_1}{\partial t}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Theta_1}{\partial r}\right)=0; \quad (31)$$

$$\frac{\partial\left\langle\Theta\right\rangle}{\partial t}-2\chi\left.\frac{\partial\Theta_1}{\partial r}\right|_{r=1}=$$

$$=-\varepsilon\left(\frac{\partial\left\langle T^{(1)}\right\rangle}{\partial\mathrm{Fo}}-2\chi\left.\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r}\right|_{r=1}\right); \quad (32)$$

$$\left\langle\Theta\right\rangle\big|_{r=1}=\Theta_1\big|_{r=1};\quad \left\langle\Theta\right\rangle_{t=0}=0;$$

$$\Theta_1\Big|_{t=0}=0;\quad \Theta_1\Big|_{r\to\infty}=0. \quad (33)$$

Из осреднения выражения, следующего из (6), и условия, следующего из (8), получим

$$\frac{\partial\left\langle T^{(1)}\right\rangle}{\partial t}=2\chi\left.\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r}\right|_{r=1}.$$

Таким образом, задача (32)–(34) имеет только тривиальное решение. Сумма нулевого и первого коэффициентов разложения представляют собой «в среднем точное» асимптотическое решение для задачи (1)–(4) [5–8].

Точное решение задачи. При решении задачи асимптотическими методами возникает вопрос о близости точного и асимптотического решений. Достоверность развитого метода может быть обоснована сопоставлением полученных асимптотических решений с коэффициентами разложения точного решения параметризованной задачи в ряд Маклорена по формальному параметру. Представленный в данной статье случай допускает точное решение задачи (1)–(4) в пространстве изображений Лапласа – Карсона

$$pT_1^u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1^u}{\partial r}\right); \quad (34)$$

$$pT^u=\frac{\chi}{\Lambda\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T^u}{\partial r}\right)+\mathrm{Pe}\nu\left(1-\mathrm{H}\right); \quad (35)$$

$$T^u\big|_{r=1}=T_1^u\big|_{r=1};$$

$$\frac{\partial T^u}{\partial r}\Big|_{r=1}=\varepsilon\Lambda\frac{\partial T_1^u}{\partial r}\Big|_{r=1};$$

$$T_1^u\big|_{r\to\infty}=0. \quad (36)$$

Решения задачи (35)–(37) имеют вид

$$T^u=\frac{\mathrm{Pe}\nu\left(1-\mathrm{H}\right)}{p}\times$$

$$\times\left[1-\frac{\sqrt{\varepsilon\Lambda\chi}kI_0\left(r\sqrt{\varepsilon p\Lambda/\chi}\right)}{\left[I_1\left(\sqrt{\varepsilon p\Lambda/\chi}\right)+\sqrt{\varepsilon\Lambda\chi}kI_0\left(\sqrt{\varepsilon p\Lambda/\chi}\right)\right]}\right]; \quad (37)$$

$$T_1^u=\frac{K_0\left(r\sqrt{p}\right)}{K_0\left(\sqrt{p}\right)}\frac{\mathrm{Pe}\nu\left(1-\mathrm{H}\right)}{p}\times$$

$$\times\left[1-\frac{\sqrt{\varepsilon\Lambda\chi}kI_0\left(r\sqrt{\varepsilon p\Lambda/\chi}\right)}{\left[I_1\left(\sqrt{\varepsilon p\Lambda/\chi}\right)+\sqrt{\varepsilon\Lambda\chi}kI_0\left(\sqrt{\varepsilon p\Lambda/\chi}\right)\right]}\right]. \quad (38)$$

Нетрудно убедиться, что T^u при $\varepsilon\to 0$ совпадает с выражением (17), а $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\partial T^u/\partial\varepsilon$ – с выражением (24) для первого коэффициента разложения. Такое сопоставление является прямой проверкой справедливости развитого выше метода решения задач сопряжения.

Список литературы

1. Алишаев М.Г. Уточнение потерь тепла для геотермальной скважины // Известия Российской академии наук. Энергетика. – 2010. – № 1. – С. 73–84.

2. Алхасова Д.А. Оценка влияния оребрения на рост тепловой производительности скважинного теплообменника с применением схемы сосредоточенной емкости // Труды Института геологии Дагестанского научного центра РАН. – 2009. – № 55. – С. 145–147.

3. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1966. – 406 с.

4. Рубинштейн Л. И. Температурные поля в нефтяных пластах. – М.: Недра, 1971. – 276 с.

5. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Зеленова М.А., Крупинов А.Г. Исследование температурных полей потока газа в скважине // Инженерно-физический журнал. 2011. Т. 84, № 5, С. 1052 – 1064

6. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Зеленова М.А., Родионов А.С. Задача термокаротажа с заданным радиальным профилем скорости нефтяного потока в стволе скважины // Инженерно-физический журнал. – 2013. – Т. 86, № 1. – С. 172–190.

7. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Кабиров И.Ф. Температурное поле источников тепла при закачке жидкости в анизотропный неоднородный пласт // Прикладная механика и техническая физика. – 2013. – Т. 54, № 6 (322). – С. 95–111.

8. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Родионов А.С. Температурное поле турбулентного потока в скважине // Теплофизика высоких температур. – 2013. – Т. 51, № 2. – С. 277–286.

9. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Родионов А.С. Температурные поля ламинарных и турбулентных потоков жидкости. – Уфа: РИЦ УГНТУ, 2013. – 128 с.

10. Филиппов А.И., Михайлов П.Н., Ахметова О.В. Основная задача термокаротажа // Теплофизика высоких температур. – 2006. м Т. 44, № 5. – С. 747–755.

11. Филиппов А.И., Михайлов П.Н., Ахметова О.В. Температурное поле в действующей скважине.//Сибирский журнал индустриальной математики. – 2004. – Т. VII, № 1(17). – С. 135–144.

12. Чупров И.Ф. Тепловая эффективность при прогреве пласта через водоносный пропласток // Нефтепромысловое дело. – 2008. – № 12. – С. 28–31.

References

1. Alishaev M.G. *Izvestija Rossijskoj akademii nauk. Jenergetika,* 2010, no. 1, pp. 73–84.

2. Alhasova D.A. *Trudy Instituta geologii Dagestanskogo nauchnogo centra RAN*, 2009, no. 55, pp. 145–147.

3. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Spravochnik po operacionnomu ischisleniju,* Moscow, Vysshaja shkola, 1965, 466 p.

4. Rubinshtejn L.I. *Temperaturnye polja v neftjanyh plastah*. Moscow: Nedra, 1971. 276 p.

5. Filippov A.I., Ahmetova O.V., Zelenova M.A., Krupinov A.G. *Inzhenerno – fizicheskij zhurnal*, 2011, vol. 85, no. 5, pp. 1052–1064.

6. Filippov A.I., Ahmetova O.V., Zelenova M.A., Rodionov A.S. *Inzhenerno-fizicheskij zhurnal*, 2013, vol. 86, no. 1. pp. 172–190.

7. Filippov A.I., Ahmetova O.V., Kabirov I.F. *Prikladnaja mehanika i tehnicheskaja fizika*, 2013, vol. 54, no. 6 (322), pp. 95–111.

8. Filippov A.I., Ahmetova O.V., Rodionov A.S. *Teplofizika vysokih temperatur*, 2013, vol. 51, no. 2, pp. 277–286.

9. Filippov A.I., Ahmetova O.V., Rodionov A.S. *Temperaturnye polja laminarnyh i turbulentnyh potokov zhidkosti*, Ufa, RIC UGNTU, 2013. 128 p.

10. Filippov A.I., Mihajlov P.N., Ahmetova O.V. *Teplofizika vysokih temperature*, 2006, vol. 44, no. 5, pp. 747–755.

11. Filippov A.I., Mihajlov P.N., Ahmetova O.V. *Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki*, 2004, vol. VII, no. 1, pp. 135–144.

12. Chuprov I.F. *Neftepromyslovoe delo*, 2008, no. 12, pp. 28–31.

Рецензенты:

Мустафина С.А., д.ф.-м.н., профессор, декан физико-математического факультета, Стерлитамакский филиал, Башкирский государственный университет, г. Стерлитамак;

Гималтдинов И.К., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой прикладной информатики и программирования, Стерлитамакский филиал, Башкирский государственный университет, г. Стерлитамак.