УДК 517.956.6

ОБ ОДНОЙ ВНУТРЕННЕ-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ГРУППОЙ МЛАДШИХ ЧЛЕНОВ

Езаова А.Г., Думаева Л.В.

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Нальчик, e-mail: alena_ezaova@mail.ru, armand97a@gmail.com

Настоящая статья посвящена исследованию однозначной разрешимости одной внутренне-краевой задачи, для уравнения третьего порядка смешанного типа с группой младших членов в параболической части. В работе формулируется и доказывается теорема о существовании и единственности решения поставленной задачи. Единственность решения поставленной задачи доказывается методом интегралов энергии. Для доказательства существования решения поставленной задачи выписываются соотношения между следом искомой функции и следом производной искомой функции на линии вырождения. В параболической части поставленная задача сводится к дифференциальному уравнению третьего порядка и рассматриваются различные случаи значений коэффициентов (коэффициенты – константы, коэффициенты – функции). В случае постоянных коэффициентов выписываются три различных соотношения между следом искомой функции и следом производной искомой функции в зависимости от дискриминанта кубического уравнения, соответствующего полученному дифференциальному уравнению. В каждом из рассмотренных случаев существование решения поставленной задачи доказывается эквивалентной редукцией к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение смешанного типа, характеристики уравнения, аффиксы, метод интегралов энергии, уравнение третьего порядка, интегральное уравнение Фредгольма, операторы дробного интегро-дифференцирования

ABOUT ONE INNER BOUNDERY VALUE PROBLEM FOR EQUATION OF THIRD ORDER WITH A GROUP OF LOWEST TERM

Ezaova A.G., Dumaeva L.V.

H.M. Berbekov Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, e-mail: alena_ezaova@mail.ru, armand97a@gmail.com

This article is devoted to research of the unique solvability of one inner boundary value problem for equation of third order of mixed type with a group of lowest term in the parabolic part. In this paper we formulate and prove a theorem on the existence and uniqueness of the solution of the problem. The uniqueness of the solution of the problem is proved by energy integrals. To prove the existence of a solution of the problem the relationship between the trace of the unknown function and the trace of derivative of the unknown function in the line of degeneracy is written out. At the parable part the problem reduces to a differential equation of the third order and different cases of coefficients (coefficients – constants, coefficients – functions) are considered. In the case of constant coefficients three different relationships between the trace of the unknown function and the trace of derivative of the unknown function are written out depending on the discriminant of the cubic equation corresponding to the received differential equation. In each of these cases the existence of the solution of the problem is proved by equivalent reduction to Fredholm integral equation of the second kind.

Keywords: boundary value problem, the equation of the mixed type, the characteristics of the equation, affixes, the method of integral energy equation of the third order, Fredholm integral equation, operators of fractional integro-differentiation

Рассматривается уравнение

$$0=\begin{cases} U_{xxx}-U_y+a_1(x,y)U_x+a_0(x,y)U, & y>0,\\ (-y)^m U_{xx}-U_{yy}, & y<0, \end{cases} \qquad (1)$$

где m – натуральное число, в конечной односвязной области W, ограниченной отрезками AA_0, A_0B_0, B_0B и характеристиками AC, BC уравнения (1).

Обозначим через Ω^+ и Ω^- части области W лежащие соответственно в полуплоскостях $y>0$ и $y<0$; $\Theta_0(x)$, $\Theta_1(x)$ –аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x,\ 0)$, с характеристиками AC и BC соответственно; $\mathrm{I}=AB$-интервал $0<x<1$.

Задача. Найти функцию $U(x, y)$ со следующими свойствами*:*

1) $U(x,y)\in C(\bar{\Omega})\cap C^1(\Omega)\cap C^{3,1}_{x,y}(\Omega^+)\cap C^{2,2}_{x,y}(\Omega^-)$;

2) $U(x, y)$ – регулярное в $\Omega^+\cup\Omega^-$ решение уравнения *(1);*

3) $U(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям*:*

$$U(0,y)=\varphi_1(y);\ U(1,y)=\varphi_2(y);\ U(0,y)=\varphi_3(y);\ \ 0\le y\le 1, \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\alpha(x)\,D_{0x}^{a}\delta(x)U\left[\Theta_0(x)\right]+\beta(x)\,D_{x1}^{a}\omega(x)U\left[\Theta_1(x)\right]+\\ +\gamma(x)U(x,0)+c(x)U_y(x,0)=f(x),\end{gathered}\quad \forall x\in I, \tag{3}$$

где $\varphi_i(x)\in C\left[0,y_0\right]\cap C^2\left]0,y_0\right[,\ i=\overline{1,3};\ \alpha(x),\beta(x),\gamma(x),c(x),\ f(x)\in C^1(\bar{I})\cap C^3(I)$, причем $\alpha^2(x)+\beta^2(x)+\gamma^2(x)+c^2(x)\neq 0$ a – вещественное число, D_{ox}^{l}, D_{x1}^{l} – операторы дробного в смысле Римана – Лиувилля интегро-дифференцирования.

Пусть $U(x, 0) = \tau(x)$; $U_y(x, 0) = \nu(x)$. Решение задачи Коши в области Ω^- имеет вид [5]

$$\begin{aligned}U(x,y)=&\frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma^2(\varepsilon)}\int_0^1\tau\left[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right]\left[t(1-t)\right]^{\varepsilon-1}dt+\\ &+\frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma^2(1-\varepsilon)}y\int_0^1\nu\left[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right]\left[t\,(1-t)\right]^{-\varepsilon}dt,\end{aligned}$$

где $\varepsilon=\dfrac{m}{2m+4}$, $\Gamma(z)$ – гамма функция Эйлера.

Учитывая значения $\Theta_0(x)$ и $\Theta_1(x)$ в последнем равенстве, получим

$$U\left[\Theta_0(x)\right]=\frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}x^{1-2\varepsilon}D_{0x}^{-\varepsilon}x^{\varepsilon-1}\tau(x)-\frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\varepsilon}D_{0x}^{\varepsilon-1}x^{-\varepsilon}\nu(x);$$

$$U\left[\Theta_1(x)\right]=\frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}(1-x)^{1-2\varepsilon}D_{x1}^{-\varepsilon}(1-x)^{\varepsilon-1}\tau(x)-\frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\varepsilon}D_{x1}^{\varepsilon-1}(1-x)^{-\varepsilon}\nu(x).$$

Имеет место

Теорема. *В области Ω существует единственное решение задачи (1)–(3), если выполняются условия*

$$\begin{gathered}a_{1x}(x,y)-2;\ \ a_0(x\ \ y)\ge 0;\\ a_i(x,y)\in C^i\left(\bar{\Omega}^+\right),\end{gathered} \tag{4}$$

и либо $$a=\varepsilon;\quad \delta(x)=x^{2\varepsilon-1};\quad \omega(x)=(1-x)^{2\varepsilon-1}, \tag{5}$$

и выполняются условия

$$\alpha(x)=x^{1-\varepsilon}\alpha_*(x);\ \ \beta(x)=(1-x)^{1-\varepsilon}\beta_*(x);\ \ \alpha_*(x);\ \ \beta_*(x)\in C^1(\bar{I});$$

$$A_1(x)=\alpha_*(x)+\beta_*(x)+\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)}\gamma(x)\neq 0,\quad \forall x\in \bar{I}; \tag{6}$$

$$\left[\frac{\alpha_*(x)}{A_1(x)}\right]'\le 0;\ \ \left[\frac{\beta_*(x)}{A_1(x)}\right]'\ge 0;\ \ \frac{c(x)}{A_1(x)}\sin\pi\varepsilon\le 0,\quad \forall x\in \bar{I}, \tag{7}$$

либо $$a=1-\varepsilon;\quad \delta(x)=\omega(x)=1, \tag{8}$$

и выполняются условия

$$A_2(x)=(1-x)^{\varepsilon}\alpha(x)+x^{\varepsilon}\beta(x)-\frac{1}{k}x^{\varepsilon}(1-x)^{\varepsilon}c(x)\neq 0,\ \forall x\in \bar{I}; \tag{9}$$

$$\left[\frac{(1-x)^{\varepsilon}\alpha(x)}{A_2(x)}\right]'\le 0;\ \ \left[\frac{x^{\varepsilon}\beta(x)}{A_2(x)}\right]'\ge 0;\ \ \frac{\gamma(x)}{A_2(x)}\sin\pi\varepsilon\ge 0,\ \ \forall x\in \bar{I}, \tag{10}$$

где $k=\dfrac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)}\left(\dfrac{m+2}{4}\right)^{1-2\varepsilon}$.

Доказательство. Пусть выполняются условия (5). Тогда, подставляя найденные значения $U[\Theta_0(x)]$, $U[\Theta_1(x)]$ в краевое условие (3), найдем

$$\alpha(x)D_{0x}^{\varepsilon}x^{2\varepsilon-1}\left[\frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}x^{1-2\varepsilon}D_{0x}^{-\varepsilon}x^{\varepsilon-1}\tau(x)-\frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\varepsilon}D_{0x}^{\varepsilon-1}x^{-\varepsilon}\nu(x)\right]+$$

$$+\beta(x)D_{x1}^{\varepsilon}(1-x)^{2\varepsilon-1}\left[\frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}(1-x)^{1-2\varepsilon}D_{x1}^{-\varepsilon}(1-x)^{\varepsilon-1}\tau(x)-\right.$$

$$\left.-\frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\varepsilon}D_{x1}^{\varepsilon-1}(1-x)^{-\varepsilon}\nu(x)\right]+\gamma(x)\tau(x)+c(x)\nu(x)=f(x).$$

Откуда, с учетом того, что $D_{0x}^{\varepsilon}D_{0x}^{-\varepsilon}=D_{x1}^{\varepsilon}D_{x1}^{-\varepsilon}=D^0$, где D^0 – единичный оператор, получим

$$\left[\frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}\alpha(x)x^{\varepsilon-1}+\frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}\beta(x)(1-x)^{\varepsilon-1}+\gamma(x)\right]\tau(x)-$$
$$-\frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\varepsilon}\left[\alpha(x)D_{0x}^{\varepsilon}x^{2\varepsilon-1}D_{0x}^{\varepsilon-1}x^{-\varepsilon}\nu(x)+\right. \tag{11}$$
$$\left.+\beta(x)D_{x1}^{\varepsilon}(1-x)^{2\varepsilon-1}D_{x1}^{\varepsilon-1}(1-x)^{-\varepsilon}\nu(x)\right]+c(x)\nu(x)=f(x).$$

Преобразуем двойные интегралы, входящие в выражение (11) [4]:

$$I_1=D_{0x}^{\varepsilon}x^{2\varepsilon-1}D_{0x}^{\varepsilon-1}x^{-\varepsilon}\nu(x)=$$
$$=\frac{1}{\Gamma^2(1-\varepsilon)}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{t^{2\varepsilon-1}}{(x-t)^{\varepsilon}}dt\int_0^t\frac{\xi^{-\varepsilon}\nu(\xi)}{(t-\xi)^{\varepsilon}}d\xi=$$
$$=\frac{1}{\Gamma^2(1-\varepsilon)}\frac{d}{dx}\int_0^x\xi^{-\varepsilon}\nu(\xi)d\xi\int_\xi^x\frac{t^{2\varepsilon-1}dt}{(x-t)^{\varepsilon}(t-\xi)^{\varepsilon}}.$$

Проделав некоторые преобразования, получим

$$I_1=x^{\varepsilon-1}D_{0x}^{2\varepsilon-1}\nu(x). \tag{12}$$

Аналогичным образом получаем

$$I_2=D_{x1}^{\varepsilon}(1-x)^{2\varepsilon-1}D_{x1}^{\varepsilon-1}(1-x)^{-\varepsilon}\nu(x)=(1-x)^{\varepsilon-1}D_{x1}^{2\varepsilon-1}\nu(x). \tag{13}$$

С учетом (12) и (13) уравнение (11) принимает вид

$$\left[\alpha(x)(1-x)^{1-\varepsilon}+\beta(x)x^{1-\varepsilon}+\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)}x^{1-\varepsilon}(1-x)^{1-\varepsilon}\gamma(x)\right]\tau(x)=$$
$$=c_1\left[(1-x)^{1-\varepsilon}\alpha(x)D_{0x}^{2\varepsilon-1}\nu(x)+\beta(x)x^{1-\varepsilon}D_{x1}^{2\varepsilon-1}\nu(x)\right]- \tag{14}$$
$$-\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)}x^{1-\varepsilon}(1-x)^{1-\varepsilon}c(x)\nu(x)+\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)}x^{1-\varepsilon}(1-x)^{1-\varepsilon}f(x).$$

С учетом выполнения условия (6) перепишем (14) в виде

$$\tau(x)=\alpha_1(x)D_{0x}^{2\varepsilon-1}\nu(x)+\beta_1(x)D_{x1}^{2\varepsilon-1}\nu(x)+\gamma_1(x)\nu(x)+f_1(x), \tag{15}$$

где
$$\alpha_1(x)=\frac{k_1\alpha_*(x)}{A_1(x)};\quad \beta_1(x)=\frac{k_1\beta_*(x)}{A_1(x)};\quad \gamma_1(x)=-\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)}\frac{c(x)}{A_1(x)};$$
$$f_1(x)=\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)}\frac{f(x)}{A_1(x)};\quad k_1=\frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)}\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\varepsilon}.$$

Выражение (15) является основным функциональным соотношением между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенным на линию $y = 0$ из области Ω^-.

Докажем, что решение задачи (1)–(3) единственно при выполнении условий (4)–(7) теоремы. При $f(x) = 0$, с учетом равенства (15), получаем

$$I^* = \int_0^1 \alpha_1(x)\nu(x)D_{0x}^{2\varepsilon-1}\nu(x)dx + \int_0^1 \beta_1(x)\nu(x)D_{x1}^{2\varepsilon-1}\nu(x)dx + \int_0^1 \gamma_1(x)\nu^2(x)dx.$$

Проделав некоторые преобразования, заключаем, что $I^* \geq 0$.

С другой стороны, переходя в уравнении (1) к пределу при $y \to +0$, получаем

$$\tau'''(x) + a_1(x,0)\tau'(x) + a_0(x,0)\tau(x) = \nu(x). \tag{16}$$

Умножая последнее на $\tau(x)$, а затем интегрируя от 0 до 1, с учетом однородных граничных условий, получим

$$I^* = \int_0^1 \tau(x)\nu(x)dx = -\left[\frac{1}{2}\tau'^2(1) + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(a_{1x}(x,0) - 2a_0(x,0)\right)\tau^2(x)dx\right]. \tag{17}$$

Учитывая условие 4, имеем $I^* \leq 0$. Следовательно $I^* = 0$.

Следовательно, $\nu(\xi) = 0$ почти всюду, а так как $\nu(x)$ непрерывна по условию, то $\nu(\xi) = 0$ всюду. Отсюда видно, что $\nu(x) = 0$ и при $f(x) = 0$ следует, что $\tau(x) = 0$.

Таким образом, $U(x, y)$ º 0 в Ω^- как решение задачи Коши с нулевыми данными, а в Ω^+ как решение задачи (1), $\tau(x) = 0$, $U(0, y) = 0$; $U(1, y) = 0$; $U_x(0, y) = 0$ [1–3]. Отсюда заключаем, что решение задачи (1)–(3) при выполнении условий (4)–(7) единственно.

Для доказательства существования решения задачи рассмотрим уравнение (1) в области Ω^+. Получаем задачу (16)

$$\tau(0) = \varphi_1(0);\ \tau(1) = \varphi_2(0);\ \tau'(0) = \varphi_3(0). \tag{18}$$

Пусть $a_1(x, 0) = s_1$; $a_0(x, 0) = s_0$; s_1, $s_0 = \text{const} \neq 0$. Делая замену неизвестной функции $\tau(x)$ в равенстве (16) по формуле

$$\tau(x) = z(x) + g(x), \tag{19}$$

где

$$g(x) = \left(1 - x^2\right)\varphi_1(0) + x^2\varphi_2(0) + \left(x - x^2\right)\varphi_3(0),$$

и учитывая граничные условия, получим относительно функции $\tau(x)$ задачу

$$z'''(x) + s_1 z'(x) + s_0 z(x) = f_2(x); \tag{20}$$

$$z(0) = 0;\ z(1) = 0;\ z'(0) = 0, \tag{21}$$

где $f_2(x) = \nu(x) - s_1 g'(x) - s_0 g(x)$.

Решение задачи (20), (21) относительно $\tau(x)$ существенно зависит от корней характеристического уравнения $k^3 + s_1 k + s_0 = 0$. Введем обозначение

$$\overline{s} = \frac{s_0^2}{4} + \frac{s_1^3}{27}.$$

Рассмотрим случай, когда $\overline{s} > 0$. В этом случае общее решение (16), (18) можно записать в виде

$$\tau(x) = \int_0^1 G(x,t)\nu(t)dt + \tilde{f}(x), \tag{22}$$

где $G(x, t)$ – функция Грина однородной задачи, $\tilde{f}(x)$ – функция, выраженная через заданные.

С учетом выполнения условий (4)–(7) теоремы исключим $\tau(x)$ из (22) и (15). Учитывая условия (6), получим

$$\nu(x) + \int_0^1 \frac{K_1(x, t)\nu(t)dt}{|x - t|^{2\varepsilon}} = F_1(x), \tag{23}$$

где $K_1(x, t)$ и $F_1(x)$ – функции, выраженные через известные, заданные функции.

При $\gamma_1(x) \neq 0$ или, что то же самое $c(x) \neq 0$, уравнение (23) есть уравнение Фредгольма второго рода со слабой особенностью в ядре и непрерывной правой частью, безусловная разрешимость которого заключается из единственности решения задачи.

По найденному $\nu(x)$ из (15) определяется $\tau(x)$, а решение задачи (1)–(3) в области Ω^- как решение задачи Коши, а в области Ω^+ решение задачи 1 определяется по формуле [5]

$$U(x,y) = \int_0^y G_{\xi\xi}(x,y;0,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta - \int_0^y G_{\xi\xi}(x,y;1,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta -$$
$$-\int_0^y G_{\xi}(x,y;0,\eta)\varphi_3(\eta)d\eta + \int_0^1 G(x,y;\xi,0)\tau(\xi)d\xi,$$

где $G(x, y, \xi, \eta)$ – функция Грина задачи (1), (2), $U(x, 0) = \tau(x)$.

Аналогичным образом рассматриваются случаи когда $\overline{s} = 0$ и когда $\overline{s} < 0$.

Пусть $a_1(x, 0)$, $a_0(x, 0) \neq \text{const}$. В этом случае поставленная задача, аналогично предыдущему случаю, сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно функции $\nu(x)$, со слабой особенностью в ядре и непрерывной правой частью, вида

$$\nu(x) + \int_0^1 \frac{K_2(x, t)\nu(t)}{|x-t|^{2\varepsilon}} dt = F_2(x),$$

где $K_2(x, t)$ и $F_2(x)$ функции, выраженные через известные, заданные функции.

Доказательство единственности и существования решения поставленной задачи при выполнении условий (8)–(10) теоремы проводится аналогично.

Список литературы

1. Езаова А.Г. Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного третьего порядка // Известия КБГУ. – 2011. – Т 1, № 4. – С. 26–31.

2. Езаова А.Г., Водахова М.В. Задача с нелокальными условиями на характеристиках для смешанного уравнения третьего порядка // Современная математика и математическое образование, проблемы истории и философии математики: международная научная конференция Россия. – Тамбов, 2008. – С. 39–42.

3. Елеев В.А., Кумыкова С.К. О некоторых краевых задачах со смещением на характеристиках для смешанного уравнения гиперболо-параболического типа // Укр. мат. журнал. – 2000. – т. 52, № 5. – С. 707–716.

4. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.

5. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. – М.: Гостехиздат, 1947.

References

1. Ezaova A.G. Ob odnoj nelokalnoj kraevoj zadache dlja uravnenija smeshannogo tretego porjadka. Izvestija KBGU, 2011. T 1, no. 4. pp. 26–31.

2. Ezaova A.G., Vodahova M.V. Zadacha s nelokalnymi uslovijami na harakteristikah dlja smeshannogo uravnenija tretego porjadka. Sovremennaja matematika i matematicheskoe obrazovanie, problemy istorii i filosofii matematiki. Mezhdunarodnaja nauchnaja konferencija Rossija Tambov, 2008. pp. 39–42.

3. Eleev V.A., Kumykova S.K. O nekotoryh kraevyh zadachah so smeshheniem na harakteristikah dlja smeshannogo uravnenija giperbolo parabolicheskogo tipa. Ukr. mat. zhurnal. 2000, t. 52, no. 5. pp.707–716.

4. Nahushev A.M. Zadachi so smeshheniem dlja uravnenij v chastnyh proizvodnyh. M.: Nauka, 2006. 287 p.

5. Trikomi F. O linejnyh uravnenijah smeshannogo tipa. Gostehizdat, 1947.

Рецензенты:

Хачев М.М., д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой высшей математики, ФГБОУ ВПО «Кабардино-Балкарский государственный аграрный университет им. В.М. Кокова, г. Нальчик;

Аджиев А.Х., д.ф.-м.н., профессор, зав. отделом стихийных явлений, ФГБУ «Волжский гуманитарный институт», г. Волжский.