УДК 004.932.2

ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СИГНАЛОВ В ГАРТМАНОВСКОМ ДАТЧИКЕ НА ФОНЕ ПУАССОНОВСКИХ ШУМОВ

[1]Безуглов Д.А., [2]Решнтникова И.В., [3]Юхнов В.И., [3]Енгибарян И.А.

[1]Ростовский филиал Российской таможенной академии, Ростов-на-Дону, e-mail: bezuglovda@mail.ru;

[2]ФГБОУ ВПО «Ростовский государственный университет путей сообщения», Ростов-на-Дону, e-mail: bezuglovda@mail.ru;

[3]СКФ Московского технического университета связи и информатики, Ростов-на-Дону, e-mail: bezuglovda@mail.ru

В рамках кумулянтного подхода к описанию статистических свойств пуассоновских сигналов и шумов проведен строгий анализ процесса фотодетектирования в датчике Гартмана. Получены аналитические выражения для характеристической функции и плотности распределения случайной величины, описывающей процессы, протекающие в системе. Вычислено отношение правдоподобия, а также получены оптимальные оценки величины локальных наклонов фазового фронта. Исследованы свойства полученных плотностей распределения. Следует подчеркнуть, что предложенный подход является оптимальным только в случае регистрации фотоприемниками слабых сигналов, когда смесь сигнала и шума хорошо аппроксимируется распределением Пуассона. В случае отличия плотности распределения смеси сигнала и шума от пуассоновского возможно получение аналогичных выражений для оптимальных оценок на базе предложенного подхода анализа кумулянтов соответствующих величин и процессов.

Ключевые слова: адаптивная оптическая система фазового сопряжения, датчик Гартмана

OPTIMAL ESTIMATION OF SIGNALS IN HARTMANN SENSOR ON POISSON BACKGROUND NOISE

[1]Bezuglov D.A., [2]Reshetnikova I.V., [3]Yuhnov V.I., [3]Engibaryan I.A.

[1]Rostovsky branch of the Russian Customs Academy, Rostov-on-Don, e-mail: bezuglovda@mail.ru;

[2]FGBOU VPO Rostov state University of transport communications, Rostov-on-Don, e-mail: bezuglovda@mail.ru;

[3]SKF Moscow technical University of communications and Informatics, Rostov-on-Don, e-mail: bezuglovda@mail.ru

As part of the cumulant approach to the description of the statistical properties of Poisson noise signals and a rigorous analysis of the photodetection in Hartmann sensor. The analytical expression for the characteristic function and distribution density of the random variable describing the processes occurring in the system. Calculated the likelihood ratio, as well as obtain optimal estimates of the local slopes of the phase front. The properties of the density distribution. It should be emphasized that the proposed approach is optimal only in the case of registration of photodetectors weak signals, when the mixture of signal and noise is well approximated by the Poisson distribution. In case of differences between the distribution density of the mixture of signal and noise from the Poisson possible to obtain similar expressions for the optimal estimates on the basis of the proposed approach cumulants analysis of relevant variables and processes.

Keywords: adaptive optical phase conjugation system, the Hartmann sensor

Одним из основных элементов адаптивной оптической системы фазового сопряжения является датчик Гартмана. Проводя суммарно-разностную обработку сигналов с выхода квадрантных фотоприемников датчика, получают сигналы, пропорциональные локальным наклонам фазового фронта вида:

$$V = \frac{\partial S(x,y)}{\partial x},\ U = \frac{\partial S(x,y)}{\partial y}, \qquad (1)$$

где $S(x, y)$ – распределение фазы на апертуре оптической системы.

В данной работе на базе математического аппарата кумулянтного анализа получены выражения для плотности распределения и характеристической функции исследуемых случайных величин. Получено выражение для оптимальной оценки величин U^ и V^ на фоне пуассоновских шумов [6, 7, 8, 9].

Пусть на квадрантный фотоприемник одного канала датчика Гартмана падает сфокусированный линзой световой поток малой интенсивности. При наличии наклона фазового фронта для вычисления его величины предполагается суммарно-разностная обработка сигналов:

$$U = (u_1 + m_1 + u_2 + m_2) - (u_3 + m_3 + u_4 + m_4),$$

$$V = (u_1 + m_1 + u_3 + m_3) - \\ -(u_2 + m_2 + u_4 + m_4), \qquad (2)$$

где m_i – аддитивные пуассоновские шумы; u_i – полезный пуассоновский сигнал, соответствующий i-му квадранту фотоприемника.

С учетом того, что как m_i так и u_i являются пуассоновскими, в дальнейшем целесообразно рассмотреть выражение (2), представленное в виде

$$n_x = (n_1 + n_2) - (n_3 + n_4),$$

$$n_y = (n_1 + n_3) - (n_2 + n_4), \qquad (3)$$

где $n_i = m_i + u_i$ – пуассоновская случайная величина. Примем следующие обозначения:

$$(n_1 + n_2) = N_1 \cdot (n_3 + n_4) = N_3,$$

$$(n_1 + n_3) = N_2 \cdot (n_2 + n_4) = N_4, \qquad (4)$$

где N_i – пуассоновская случайная величина с параметром λ.

При этом было учтено, что при отсутствии локального наклона на субапертуре гартмановского датчика интенсивность оптического поля на всех квадрантах фотоприемника одного канала будет равна [1, 2, 3, 4, 5]. Математические ожидания величин n_x и n_y будут равны:

$$M[n_x] = M[N_1 - N_2] = M[N_1] - M[N_2] = 0,$$

$$M[n_y] = M[N_3 - N_4] =$$

$$= M[N_3] - M[N_4] = 0, \qquad (5)$$

где M – символ математического ожидания.

Начальные моменты после несложных преобразований с учетом соотношения (5) запишутся в следующем виде:

$$M[n_x, n_y] = M[(N_1 - N_2)(N_3 - N_4)] = 0,$$

$$M[n_x, n_y] = M[(N_1 - N_2)(N_1 - N_2)] =$$

$$= 4\lambda - k_1, \qquad (6)$$

где k_1 – коэффициент корреляции случайных величин N_i.

Учитывая природу пуассоновских шумов, коэффициент корреляции необходимо положить равным 0. При дальнейшем рассмотрении нижний индекс случайных величин n_x, n_y опустим и будем рассматривать случайную величину n.

Моменты случайной величины n порядка k запишутся в следующем виде:

$$M[(N_1 - N_2)^k] = M[n^k] =$$

$$= M\left[\sum_{p=0}^{k} C_k^p (-1)^p N_1^{k-p} N_2^p\right] =$$

$$= \sum_{p=0}^{k} C_k^p (-1) m_{k-p,p}^{1,2}, \qquad (7)$$

где $m_{k-p,p}^{1,2}$ – совместные моменты случайных величин N_1 и N_2 порядка $k–p$, p.

Здесь и в дальнейшем при обозначении порядка моментов и кумулянтов случайных величин нижние индексы будут соответствовать их порядку, а верхние обозначать соответствующую случайную величину.

Из (7) видно, что все нечетные моменты $m_{2p-1}^{1,2}$ случайной величины n равны нулю. Значения совместных моментов случайных величин N_1 и N_2 $m_{k-p,p}^{1,2}$, входящие в состав выражения (7), для четных $m_{2n}^{1,2}$ не могут быть определены в общем случае как нулевые.

В случае независимости двух случайных величин N_1 и N_2 все их совместные кумулянты будут равны нулю, чего нельзя сказать однозначно о соответствующих совместных моментах. Именно такой случай имеется в рассматриваемой физической задаче. В силу того что регистрация потока фотоэлектронов осуществляется различными фотоприемниками, величины N_1 и N_2 можно считать независимыми. Поэтому в дальнейшем целесообразно перейти к рассмотрению системы кумулянтов случайной величины n. Они могут быть найдены на основе свойства линейности и инвариантности [3] из выражения (7):

$$x_k^n = \sum_{p=0}^{k} C_k^p (-1)^p x_{k-p,p}^{1,2}, \ \ n = 0, 2..., \qquad (8)$$

где x_k^n – кумулянты порядка k случайной величины n, $x_{k-p,p}^{1,2}$ – совместные кумулянты случайных величин N_1 и N_2.

Основываясь на вышеизложенном относительно значений совместных кумулянтов, нетрудно прийти к выводу, что случайная величина n описывается системой только четных кумулянтов:

$$x_k^n = 2\lambda, \ \ n = 0, 2.... \qquad (9)$$

Запишем выражение для характеристической функции искомого распределения плотности вероятности:

$$\theta(iv) = \exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^n}{k!}(i\upsilon)^k\right]. \qquad (10)$$

С учетом (9) выражение (10) запишется в следующем виде:

$$\theta(iv) = \exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda}{k!}(i\upsilon)^k\right]. \qquad (11)$$

Суммируя ряд в квадратных скобках, получим

$$\theta(iv) = \exp[2\lambda(ch(i\upsilon) - 1] =$$

$$= \exp[2\lambda(\cos(\upsilon) - 1]. \qquad (12)$$

Для получений аналитического выражения плотности распределения преобразуем по Фурье характеристическую функцию (12):

$$P(x_n) = \int \exp\left[2\lambda(\cos(\upsilon) - 1) - i\upsilon x_n\right] \cdot d\upsilon\,. \quad (13)$$

С учетом известного выражения для разложения показательной функции в ряд

$$\exp(\pm iz\sin(\upsilon)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(z)\exp(\pm ik\upsilon)\,, \quad (14)$$

где $J_k(z)$ – функция Бесселя *k-го* порядка, после несложных преобразований получим

$$P(x_n) = \exp\left[-2\lambda\right] \sum_{k=-\infty}^{\infty} l_k(2\lambda)\delta\left[x_n - k\right], \quad (15)$$

где $l_n(2\lambda)$ – модифицированные функции Бесселя *k*-го порядка, δ – дельта-функция.

Так как случайная величина *n* принимает только дискретные значения ± *n*, окончательное выражение для искомой плотности запишется в следующем виде:

$$P(k) = \exp\left[-2\lambda\right] l_k(2\lambda)\,. \quad (16)$$

Легко видеть, что полученная плотность (16) нормирована с весом 1. Просуммировав выражение (16) по всем индексам *k*, получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left[-2\lambda\right] \cdot l_k(2\lambda) = 1\,. \quad (17)$$

Очевидно, что в случае наличия наклона фазового фронта кружок Эйри на квадрантном фотоприемнике будет смещен, при этом параметры пуассоновских распределений, соответствующих случайным величинам N_1 и N_2, не равны

$$\lambda \neq \mu\,, \quad (18)$$

где λ – параметр распределения случайной величины N_1, μ – параметр распределения случайной величины N_2. В этом случае

$$M\left[n\right] = M\left[N_1 - N_2\right] =$$
$$= M\left[N_1\right] - M\left[N_2\right] = \lambda - \mu. \quad (19)$$

Для системы кумулянтов случайной величины *n* в общем случае будет верно выражение (8). Все совместные кумулянты в силу независимости оптических сигналов в каналах датчика Гартмана равны нулю. Нечетные кумулянты x_{2k-1} равны λ – μ, четные кумулянты x_{2n} равны λ + μ. Это связано с тем, что $(-1)^k$ при четных *k* и выражении (8) дает только положительные члены, а при нечетных *k* – знакочередующиеся. С учетом этого характеристическая функция такого распределения запишется в следующем виде:

$$\Theta(i\upsilon) = \exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda - \mu)}{2k!}(i\upsilon)^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda + \mu)}{(2k-1)!}(i\upsilon)^{2k-1}\right]. \quad (20)$$

С учетом разложения функций cos u и sin u в степенной ряд запишем

$$\Theta(i\upsilon) = \exp\left[(\lambda + \mu)(\cos(\upsilon) - 1) + (\lambda - \mu)\sin(\upsilon)\right]. \quad (21)$$

Используя известные соотношения для функций Бесселя [4], будем иметь

$$\Theta(i\upsilon) = \exp\left[-(\lambda + \mu)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} l_m(\lambda + \mu) j_n(\lambda - \mu)\exp(i(n - m)\upsilon)\right]. \quad (22)$$

Для нахождения аналитического выражения для плотности распределения случайной величины *n* преобразуем по Фурье полученную характеристическую функцию (22):

$$P(x) = \exp\left[-(\lambda + \mu)\right]\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} l_m(\lambda + \mu) j_n(\lambda - \mu)\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i(p - m)\upsilon - i\upsilon x)dx\,. \quad (23)$$

В результате интегрирования этого выражения получим

$$P(x) = \exp\left[-(\lambda + \mu)\right]\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} l_m(\lambda + \mu) j_n(\lambda - \mu)\delta\left[x(p - m)\right]. \quad (24)$$

Для фиксированных значений случайной величины *n*, а именно этот случай нас интересует в конечном итоге, исходя из физической постановки задачи при *p* – *m* = *k*, имеем

$$P(x) = \exp\left[-(\lambda + \mu)\right]\sum_{p=-\infty}^{\infty} l_p(\lambda + \mu) j_{p-k}(\lambda - \mu)\,. \quad (25)$$

Для получения оптимальной оценки величины λ – μ необходимо вычислить логарифм отношения правдоподобия. Для этого преобразуем полученную плотность (25) в соответствии с теоремой умножения функций Бесселя:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^l (y^2-1)^l (z/2)^l}{k!} l_{l+k}(z) = \frac{j_k(yz)}{y^k}. \quad (26)$$

Положим, $y = i(\lambda/\mu)^{0,5}$, $z = 2\mu$, тогда

$$P(k) = \exp\left[-(\lambda+\mu)\right]\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\lambda+\mu)^l}{l!} j_{l+k}(2\mu) =$$

$$= \exp\left[-(\lambda+\mu)\right]\frac{j_k\left[i\cdot 2(\lambda\mu)^{0,5}\right]}{\left[i(\lambda/\mu)^{0,5}\right]^k} =$$

$$= \exp\left[-(\lambda+\mu)\right]\frac{I_k\left[2(\lambda\mu)^{0,5}\right]}{\left[(\lambda/\mu)^{0,5}\right]^k}. \quad (27)$$

Для определения отношения-правдоподобия разобьем интервал регистрации сигнала на выходе датчика Гартмана τ на ряд элементарных подинтервалов длительностью τ_i, $i = 1,\ldots r$. Процесс появления фотоэлектронов на отдельных подинтервалах является статистически независимым. Совместное распределение на всем интервале τ можно представить в виде произведения соответствующих одномерных плотностей распределения. Многомерную плотность распределения запишем в следующем виде [10, 11, 12]:

$$P(k_1,\ldots..k_r) = \prod_{i=1}^{r} =$$

$$= \exp\left[-(\lambda+\mu)\right]\frac{I_k\left[2(\lambda\mu)^{0,5}\right]}{\left[(\lambda/\mu)^{0,5}\right]^{k(i)}}. \quad (28)$$

Оптимальную оценку λ + μ получим из решения уравнения вида

$$\frac{\partial \ln\Lambda(k_1,\ldots..k_r)}{\partial\mu} = 0, \quad (29)$$

где

$$\Lambda(k_1,\ldots..k_r) = \frac{\prod_{i=1}^{r} = \exp\left[-(\lambda+\mu)\right]\frac{I_{k(i)}\left[2(\lambda\mu)^{0.5}\right]}{\left[(\lambda/\mu)^{0.5}\right]^{k(i)}}}{\prod_{i=1}^{r} = \exp\left[-(2\lambda)\right] I_{k(i)}\left[2\lambda\right]}.$$

При λ, μ < 0 функции Бесселя можно представить в виде:

$$I_k(z) = \frac{(z/2)^k}{k!}. \quad (30)$$

Тогда, подставив (28), (30) в выражение (29), после несложных преобразований получим

$$\widehat{\lambda - \mu} = \sum_{i=1}^{r}\frac{\ln\mu - \ln\lambda}{r} k_i, \quad (31)$$

где k_i – отсчеты фотоэлектронов в i-й момент времени на выходе датчика Гартмана.

Вместо λ и μ можно использовать их оценки. Так как λ и μ по определению являются пуассоновскими величинами, то их оценки могут быть получены известными методами.

Выводы

В результате проделанных аналитических выкладок получено выражение (31) для оптимальной в статистическом смысле оценки сигналов на выходе датчика Гартмана адаптивной оптической системы фазового сопряжения. Плотность распределения сигнала на выходе датчика Гартмана в случае отсутствия наклона фазового фронта является симметричной и унимодальной. Однако при этом она существенно отличается от гауссовой вследствие неравенства нулю высших кумулянтов. При регистрации в обоих каналах сигналов различной интенсивности плотность распределения остается унимодальной, однако смещается по оси абсцисс, и оптимальная оценка сигнала на выходе системы должна находиться в виде (31).

Список литературы

1. Безуглов Д.А. Фотодетектирование пуассоновских сигналов в лазерных дифференциальных доплеровских системах // Оптика и спектроскопия. 1996. – Т. 80, № 6. – С. 995–1000.

2. Безуглов Д.А. Кумулянтный метод оценки эффективности сегментированного зеркала адаптивной оптической системы // Оптика атмосферы и океана. – 1996. – № 1. – С. 78.

3. Безуглов Д.А. Оценка эффективности градиентного алгоритма стохастической аппроксимации в условиях воздействия шумов //Автоматика и вычислительная техника. – 1996. – № 4. – С. 15–23.

4. Безуглов Д.А., Мищенко Е.Н., Мищенко С.Е. Адаптивные оптические системы. Методы восстановления фазового фронта // Оптика атмосферы и океана. – 1996. – Т. 9, № 3. – С. 44.

5. Безуглов Д.А., Сахаров И.А., Решетникова И.В. Метод оптимизации топологии датчика фазового фронта // Оптика атмосферы и океана. – 2008. – Т. 21, № 11. – С. 998–1003.

6. Безуглов Д.А., Сахаров И.А., Решетникова И.В. Оптимизации топологии датчика волнового фронта // Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2008. – № 3(80). – С.140–149.

7. Безуглов Д.А., Скляров А.В. Оценка точностных характеристик датчика Гартмана при регистрации пуассоновских сигналов // Измерительная техника. – 1999. – № 9. – С. 38.

8. Безуглов Д.А., Скляров А.В., Забродин Р.А., Решетникова И.В. Алгоритмы оценивания негауссовских процессов на основе математического аппарата сглаживающих

B-сплайнов // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2005. – № 4. – С. 99–106.

9. Безуглов Д.А., Скляров А.В., Забродин Р.А., Решетникова И.В. Субоптимальный алгоритм оценивания на основе аппарата сглаживающих B-сплайнов // Измерительная техника. – 2006. – № 10. – С. 14–17.

10. Безуглов Д.А., Цугурян Н.О. Дифференцирование результатов измерений сглаживающими кубическими B-сплайнами // Современные информационные технологии. – 2005. – № 1 (1). – С. 73–78.

11. Безуглов Д.А., Швидченко С.А. Информационная технология вейвлет-дифференцирования результатов измерений на фоне шума // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2011. – № 6 (84). – С . 42–45.

12. Калиенко И.В., Безуглов Д.А., Решетникова И.В. Численно-аналитический метод моделирования систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2006. – № 3. – С. 10–14.

References

1 Bezuglov D.A. Optika i spektroskopija, 1996, T. 80, no. 6, pp. 995–1000.

2. Bezuglov D.A. Optika atmosfery i okeana, 1996, no. 1, pp. 78.

3. Bezuglov D.A. Avtomatika i vychislitel’naja tehnika, 1996, no. 4, pp. 15–23.

4. Bezuglov D.A., Mishhenko E.N., Mishhenko S.E. Optika atmosfery i okeana, 1996, T. 9, no. 3, pp. 44.

5. Bezuglov D.A., Saharov I.A., Reshetnikova I.V. Optika atmosfery i okeana, 2008, T. 21, no.11, pp. 998–1003.

6. Bezuglov D.A., Saharov I.A., Reshetnikova I.V. Izvestija Juzhnogo federalnogo universiteta. Tehnicheskie nauki, 2008, no. 3(80), pp. 140–149.

7. Bezuglov D.A., Skljarov A.V. Izmeritelnaja tehnika, 1999, no. 9, pp. 38.

8. Bezuglov D.A., Skljarov A.V., Zabrodin R.A., Reshetnikova I.V. Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Severo-Kavkazskij region. Serija: Estestvennye nauki, 2005, no. 4, pp. 99–106.

9. Bezuglov D.A., Skljarov A.V., Zabrodin R.A., Reshetnikova I.V. Izmeritelnaja tehnika, 2006, no. 10, pp.14–17.

10. Bezuglov D.A., Cugurjan N.O. Sovremennye informacionnye tehnologii, 2005, no. 1 (1), pp. 73–78.

11. Bezuglov D.A., Shvidchenko S.A. Vestnik kompjuternyh i informacionnyh tehnologij, 2011, no. 6 (84), pp. 42–45.

12. Kalienko I.V., Bezuglov D.A., Reshetnikova I.V. Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Severo-Kavkazskij region. Serija: Estestvennye nauki, 2006, no. 3, pp. 10–14.

Рецензенты:

Звездина М.Ю., д.ф.-м.н., доцент, заведующая кафедрой «Радиоэлектроника», Минобрнауки России, ФГБОУ ВПО «Донской государственный технический университет», г. Ростов-на-Дону;

Габриэльян Д.Д., д.т.н., профессор, заместитель начальника научно-технического комплекса «Антенные системы» по науке, Федеральный научно-производственный центр ФГУП «РНИИРС», г. Ростов-на-Дону.

Работа поступила в редакцию 15.04.2015.