УДК 620.17 : 519.234

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ КРИВОЙ МАЛОЦИКЛОВОЙ УСТАЛОСТИ

Сызранцев В.Н., Сызранцева К.В., Ильиных В.Н.

ФГБОУ ВПО «Тюменский государственный нефтегазовый университет», Тюмень, e-mail: Kv.Syzr@gmail.com

Для прогнозирования долговечности деталей с заданной вероятностью неразрушения, подвергающихся в условиях эксплуатации малоцикловому циклическому деформированию, использована разработанная в кинетической теории усталости математическая модель, на основе которой выполняется обработка результатов усталостных испытаний образцов. Показано, что два параметра модели: предел прочности и число циклов до верхней точки перегиба кривой малоцикловой усталости, связанное с пределом прочности нелинейной зависимостью, – являются величинами случайными, в общем случае с неизвестными законами распределения. В результате левые границы доверительных интервалов кривой малоцикловой усталости, соответствующие заданной вероятности (1–5%) неразрушения образцов и используемые для прогнозирования их долговечности, рассчитать возможным не представляется. В работе предложен оригинальный алгоритм определения параметров модели кривой усталости, проходящей через любую экспериментальную точку; с использованием алгоритма который в процессе компьютерного моделирования рассчитывается серия кривых усталости длиной, равной общему числу экспериментальных точек. Установленная серия кривых усталости позволяет для любого фиксированного уровня действующих напряжений сформировать выборку случайной величины, – числа циклов до разрушения образцов, необходимую для расчета ее квантильных оценок при построении границы доверительного интервала. Для восстановления неизвестной функции плотности распределения этой случайной величины в работе использован математический аппарат непараметрической статистики, обеспечивающий решение задачи независимо от сложности закона распределения исследуемой случайной величины. Результаты работы проиллюстрированы на примере определения границ доверительных интервалов данных малоцикловых испытаний образцов из гибких труб.

Ключевые слова: циклическое деформирование, малоцикловая усталость, предел прочности, вероятность разрушения образцов, методы непараметрической статистики, границы доверительных интервалов

ALGORITHM FOR CONFIDENCE INTERVALS CALCULATION OF LOW-CYCLE FATIGUE CURVE

Syzrantsev V.N., Syzrantseva K.V., Ilinykh V.N.

Tyumen State Oil and Gas University, Tyumen, e-mail: Kv.Syzr@gmail.com

For forecasting of stress-cycled machine parts lifetime with specified probability of non-destruction authors used developed in kinetic theory of fatigue mathematical model. The results processing of samples fatigue tests is carrying out on a base of this model. Paper illustrates, that two parameters of these model: tensile strength and number of cycles before upper inflection point of low-cycle fatigue curve, related with tensile strength by nonlinear dependence, are random values with unknown distribution laws. In that way left limits of confidence intervals of low-cycle fatigue curve, corresponding to specified probability (1–5%) of samples non-destruction used for forecasting of its lifetime are impossible to calculate. Authors propose the original algorithm for model parameters determination of fatigue curve passing through any experimental point. Using this algorithm it is possible to calculate during computer modeling the set of fatigue curves. Obtained set of fatigue curves allows to generate the random sample – the number of cycles before destruction, for any fixed level of actual stress. This random sample is necessary for calculation of its quantile estimation at plotting of limits of confidence intervals. For regeneration of unknown density function of distribution this random value authors use mathematical apparatus of nonparametric statistics ensuring the task decision independently of complexity distribution law of researched random value. The results of developed algorithm realization are illustrated on example of limits of confidence intervals determination for results of low-cycle fatigue test of flexible pipes samples.

Keywords: cyclic deforming, low-cycle fatigue, tensile strength, probability of samples destruction, methods of nonparametric statistics, limits of confidence intervals

Основой решения задач прогнозирования долговечности работы деталей и конструкций машин, оценки их прочностной надежности является кривая усталости (кривая Велера) [2], связывающая число циклов деформирования (N) с уровнем действующего в опасном месте детали напряжения (σ). Среди математических моделей, используемых для описания кривых усталости, наиболее перспективной является полуэмпирическая модель, разработанная в рамках кинетической теории механической усталости [1, 6], учитывающая процессы накопления усталостных повреждений в материале при циклическом деформировании деталей. В частности, для кривой усталости в малоцикловой области математическая модель имеет следующий вид [1, 6]:

$$\sigma = \sigma_B + \vartheta \cdot \lg\left(\frac{N}{H} + 1\right), \qquad (1)$$

где $\sigma_{\text{В}}$ – предел прочности материала; ϑ – угол наклона кривой усталости в системе координат $\lg N - \sigma$; N и H соответственно число циклов нагружения и число циклов деформирования до верхней точки перегиба кривой малоцикловой усталости, рассчитываемые по зависимостям

$$N = \frac{Q}{\sigma}\ln\left\{1+\left[\exp\left(\frac{\sigma-\sigma_r}{\sigma_r-\sigma_{rT}}\right)-1\right]^{-1}\right\};$$

$$H = \frac{Q}{\sigma_B}\ln\left\{1+\left[\exp\left(\frac{\sigma_B-\sigma_r}{\sigma_r-\sigma_{rT}}\right)-1\right]^{-1}\right\}, \quad (2)$$

в которых обозначено: Q – коэффициент выносливости; σ_r – предел выносливости детали при коэффициенте асимметрии цикла r; σ_{rT} – циклический предел текучести (ниже его уровня следы пластической деформации даже после нескольких миллионов циклов нагружения отсутствуют).

Алгоритмы и процедуры расчета значений параметров Q, σ_r, σ_{rT}, ϑ модели (1) на основе совокупности данных σ_i, N_i, $i=\overline{1,n}$, полученных в процессе испытаний n образцов на долговечность, рассмотрены в работе [6]. В результате реализации этих алгоритмов определяется кривая усталости в виде регрессионной зависимости $N = N(\sigma)$, соответствующая 50 % вероятности разрушения (неразрушения) образцов. Естественно, что использовать такую зависимость для прогнозирования долговечности деталей не имеет смысла. В связи с изложенным важнейшим практическим приложением результатов обработки данных усталостных испытаний образцов является не сама кривая усталости, а ее левые (нижние) границы доверительных интервалов, соответствующие, например, вероятности разрушения образцов 1 или 5 %. Цель настоящей статьи состоит в разработке методики расчета точек границ доверительного интервала для кривой малоцикловой усталости в виде (1).

Расчет границ доверительного интервала кривой малоцикловой усталости

Расчет границ доверительного интервала кривой усталости требует знания функции плотности распределения $f(N)$ или $f(\lg N)$ при $\sigma = \text{const}$. Традиционно [2] принимают, что эти функции соответствуют нормальному (логнормальному) закону распределения случайных величин. Однако, как показано в работах [3, 4, 5], функции $f(N)$ и $f(\lg N)$ являются существенно более сложными, не описываемыми с помощью законов, исследованных в теории параметрической статистики.

Для решения задачи в настоящей статье реализована идея статистического моделирования, впервые предложенная в работе [4] для получения выборки предела выносливости с целью восстановления его функции плотности распределения методами непараметрической статистики [3, 5].

Из анализа зависимости (1) следует, что она содержит два параметра, природа которых случайная, – это предел прочности ($\sigma_{\text{В}}$) и число циклов до верхней точки перегиба кривой малоцикловой усталости (H), которое относительно $\sigma_{\text{В}}$ описывается нелинейной зависимостью (2). На момент решения рассматриваемой задачи параметры $\sigma_r = \sigma_r^*$, $\sigma_{rT} = \sigma_{rT}^*$, $Q = Q^*$, $\vartheta = \vartheta^*$ известны. Воспользуемся данными разрушения образцов на разрывной машине, на основе которых определим статистические характеристики $\sigma_{\text{В}}$: среднее значение $\overline{\sigma_B}$ и границы его доверительного интервала, например, для вероятности 99 % $\sigma_{B\min}^{0,99}$ и $\sigma_{B\max}^{0,99}$.

Подставляя в выражение (2) $\sigma_B = \overline{\sigma_B}$, $\sigma_B = \sigma_{B\min}^{0,99}$, $\sigma_B = \sigma_{B\max}^{0,99}$, рассчитаем математическое ожидание $\overline{H}$ числа циклов H, а также границы его 99 % доверительного интервала: $H_{\min}^{0,99}$ и $H_{\max}^{0,99}$.

Поставим задачу получения зависимости для кривой усталости, которая проходила через любую экспериментальную точку $\sigma_i = \text{const}$, $N_i = \text{const}$ $i=\overline{1,n}$ и находилась в пределах установленных границ доверительного интервала. Введем безразмерную величину χ, используя которую зададим текущие значения $\sigma_{\text{В}}$ и H:

$$\sigma_B(\chi) = \sigma_{B\min}^{0,99} + \chi\cdot\left(\sigma_{B\max}^{0,99} - \sigma_{B\min}^{0,99}\right);$$

$$H(\chi) = H_{\min}^{0,99} + \chi\cdot\left(H_{\max}^{0,99} - H_{\min}^{0,99}\right). \quad (3)$$

Подставляя функции $\sigma_{\text{В}}(\chi)$ и $H(\chi)$ в выражение (1), получим

$$\sigma = \sigma_{B\min}^{0,99} + \chi\cdot\left(\sigma_{B\max}^{0,99} - \sigma_{B\min}^{0,99}\right) + \vartheta^*\cdot\lg\left(\frac{N}{H_{\min}^{0,99} + \chi\cdot\left(H_{\max}^{0,99} - H_{\min}^{0,99}\right)} + 1\right). \quad (4)$$

Входя в это выражение при $\sigma = \sigma_i = \mathrm{const}$ и $N = N_i = \mathrm{const}$, имеем трансцендентное уравнение относительно одной переменной χ:

$$\sigma_i = \sigma_{B\min}^{0,99} + \chi \cdot \left(\sigma_{B\max}^{0,99} - \sigma_{B\min}^{0,99}\right) + \vartheta^* \cdot \lg\left(\frac{N_i}{H_{\min}^{0,99} + \chi \cdot \left(H_{\max}^{0,99} - H_{\min}^{0,99}\right)} + 1\right). \quad (5)$$

Решая данное уравнение любым численным методом для каждой пары значений σ_i, N_i, $i = \overline{1,n}$ экспериментальных данных, определим выборку χ_i, $i = \overline{1,n}$, которая позволяет получить серию длиной n кривых малоцикловой усталости:

$$\sigma = \sigma_{B\min}^{0,99} + \chi_i \cdot \left(\sigma_{B\max}^{0,99} - \sigma_{B\min}^{0,99}\right) + \vartheta^* \cdot \lg\left(\frac{N}{H_{\min}^{0,99} + \chi_i \cdot \left(H_{\max}^{0,99} - H_{\min}^{0,99}\right)} + 1\right). \quad (6)$$

Данная совокупность кривых усталости позволяет сформировать выборку N_i^*, $i = \overline{1,n}$ при $\sigma = \sigma^* = \mathrm{const}$:

$$N_i^* = \left[10^{\frac{\sigma^* - \sigma_{B\min}^{0,99} - \chi_i \cdot \left(\sigma_{B\max}^{0,99} - \sigma_{B\min}^{0,99}\right)}{\vartheta}} - 1\right] \cdot \left[H_{\min}^{0,99} + \chi_i \cdot \left(H_{\max}^{0,99} - H_{\min}^{0,99}\right)\right], \quad (7)$$

необходимую для решения задачи восстановления неизвестной функции плотности распределения случайной величины N или $\lg N$ при $\sigma = \sigma^* = \mathrm{const}$.

Пусть требуется восстановить функцию плотности распределения числа циклов до разрушения $f_N(N)$ при фиксированной величине напряжения $\sigma = \sigma^* = \mathrm{const}$. Поскольку априори закон распределения случайной величины N неизвестен, воспользуемся математическим аппаратом непараметрической статистики [4], успешно применяемым в последнее время для решения подобных задач [3, 4, 5]. Исходной информацией для определения функции $f_N(N)$ является совокупность значений N_i^*, $i = \overline{1,n}$, рассчитанная по зависимости (7).

Для восстановления функции $f_N(N)$ воспользуемся методом Парзена – Розенблатта [3, 4]. Следуя этому методу, неизвестная функция плотности $f_N(N)$ записывается в виде

$$f_N(N) = \frac{1}{n \cdot h_N} \sum_{i=1}^{n} K\left(N\right), \quad (8)$$

где $K(N)$ – ядерная функция (ядро); h_N – параметр «размытости».

На основании работ [3, 4, 5] воспользуемся ядерной функцией с нормальным ядром. В этом случае функция $f_N(N)$ описывается выражением

$$f_N(N) = \frac{1}{n \cdot h_N \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \sum_{i=1}^{n} \exp\left(-\frac{\left(N - N_i^*\right)^2}{h_N}\right). \quad (9)$$

В работе [4] показано, что оптимальное значение $h_N = h_N^*$ рассчитывается по формуле

$$h_N^* = D_N \cdot n^{-\frac{1}{5}}, \quad (10)$$

где $D_N = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(N_i^* - \overline{N_i^*}\right)^2$; $\overline{N_i^*} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} N_i^*$.

Имея функцию $f_N(N)$, требуемая по условиям обработки данных усталостных испытаний при $\sigma = \sigma^* = \mathrm{const}$ величина квантиля $N_{\min}^{0,99}$ определяется в результате решения относительно $N_{\min}^{0,99}$ численным методом следующего уравнения:

$$\int_0^{N_{\min}^{0,99}} f_N(N)\,dN = 0,01. \quad (11)$$

Установленное в процессе реализации изложенного алгоритма значение $N_{\min}^{0,99}$ при заданной величине напряжения $\sigma^* = \mathrm{const}$ определяет точку границы доверительного интервала кривой усталости (1), соответствующего вероятности разрушения образцов 1 %. Для расчета других точек этого доверительного интервала достаточно повторить рассмотренную процедуру для напряжений $\sigma^* = \mathrm{const}$ в требуемом диапазоне изменения.

Реализация разработанных алгоритмов на примере обработки данных малоцикловых испытаний образцов гибкой трубы HS-80

В работе [6] представлены результаты испытаний на долговечность прямоугольных образцов, вырезанных из гибкой трубы HS-80. Для этих данных осуществим расчет границ доверительных интервалов. На основе обработки данных растяжения образцов на разрывной машине получено

$$\sigma_{B\min}^{0,90} = 591,1 \text{ МПа}; \quad \sigma_{B\max}^{0,90} = 613,1 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{B\min}^{0,95} = 586,8 \text{ МПа}; \quad \sigma_{B\max}^{0,95} = 617,4;$$

$$\sigma_{B\min}^{0,99} = 575,3; \quad \sigma_{B\max}^{0,99} = 628,9 \text{МПа}.$$

По формулам (2) рассчитаем значения

$$H_{\min}^{0,90} = 269,727; \quad H_{\max}^{0,90} = 181,926;$$

$$H_{\min}^{0,95} = 291,365; \quad H_{\max}^{0,95} = 168,479;$$

$$H_{\min}^{0,99} = 358,268; \quad H_{\max}^{0,99} = 137,237.$$

Обратимся к уравнению (5). Решая его численным методом n раз для каждой пары значений σ_i, N_i, определим выборку безразмерной величины χ_i, $i = \overline{1,n}$. После чего для любой фиксированной величины напряжения $\sigma = \sigma^* = \text{const}$ по выражению (7), используя массив χ_i, $i = \overline{1,n}$, рассчитаем выборку N_i^*, $i = \overline{1,n}$. Воспользовавшись математическим аппаратом непараметрической статистики на основе выборки N_i^*, $i = \overline{1,n}$, восстановим неизвестную функцию плотности распределения $f_N(N^*)$, описываемую зависимостью (9). В качестве примера на рис. 1 показана гистограмма распределения N_i^*, $i = \overline{1,40}$ и функция $f_N(N^*)$, – в виде (9), при $\sigma = \sigma^* = 250$ МПа. Для расчета границ доверительных интервалов, например при вероятности разрушения образцов 0,5; 2,5; 5 и 50 %, достаточно для ряда фиксированных величин напряжений реализовать рассмотренную процедуру восстановления $f_N(N^*)$ и рассчитать путем решения интегрального уравнения (11) соответствующие квантильные оценки чисел циклов. Результаты таких выполненных расчетов представлены на рис. 2 в системе координат $\lg N - \sigma$.

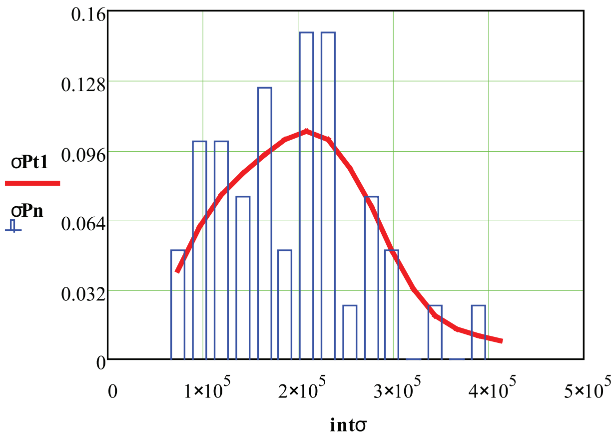

Рис. 1. Функция плотности распределения $f_N(N^*)$

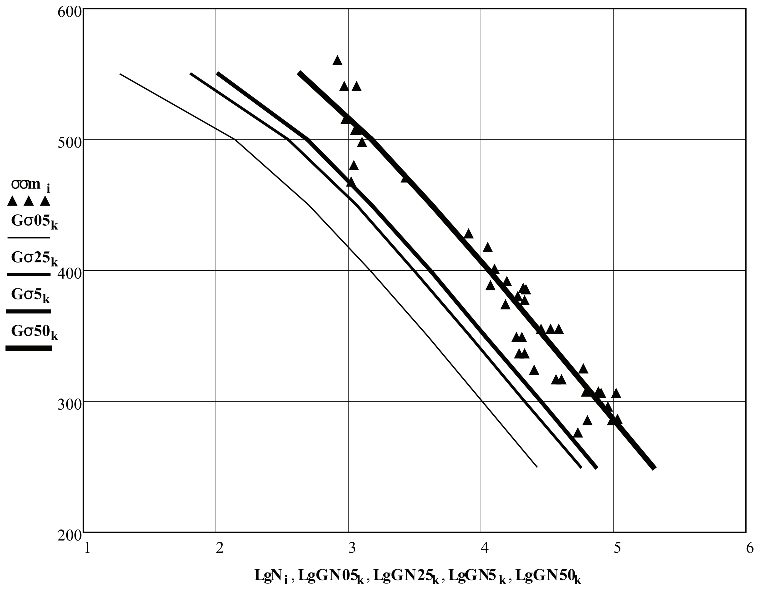

Рис. 2. Границы доверительных интервалов в системе координат $\lg N - \sigma$

Основные результаты работы

1. Предложен оригинальный алгоритм расчета границ доверительных интервалов для кривой малоцикловой усталости, основанный на использовании математического аппарата непараметрической статистики, позволяющий при решении задачи учитывать фактические законы распределения числа циклов до разрушения при фиксированной величине напряжения.

2. Разработанные методики и вычислительные алгоритмы проиллюстрированы на примере обработки данных малоцикловых усталостных испытаний образцов гибких труб HS-80.

Список литературы

1. Почтенный Е.К. Кинетическая теория механической усталости и ее приложения. – Минск: Наука и техника, 1973. – 213 с.

2. Степнов М.Н. Статистические методы обработки результатов механических испытаний: Справочник. – М.: Машиностроение, 1985. – 232 с.

3. Сызранцев В.Н. Оценка безопасности и прочностной надежности магистральных трубопроводов методами непараметрической статистики / В.Н. Сызранцев, В.В. Новоселов, П.М. Созонов, С.Л. Голофаст. – Новосибирск: Наука, 2013 – 172 с.

4. Сызранцев В.Н. Расчет прочностной надежности изделий на основе методов непараметрической статистики / В.Н. Сызранцев, Я.П. Невелев, С.Л. Голофаст. – Новосибирск: Наука, 2008 – 218 с.

5. Сызранцева К.В. Расчет прочностной надежности деталей машин при случайном характере внешних нагрузок. – Тюмень: ТюмГНГУ, 2011. – 88 с.

6. Сызранцев В.Н., Сызранцева К.В., В.Н.Ильиных. Обработка данных малоцикловых испытаний на основе кинетической теории усталости // Фундаментальные исследования. – 2015. – № 3. – С. 139–143.

References

1. Stepnov M.N. Statisticheskie metody obrabotki rezultatov mekhanicheskikh ispytaniy [Statistical methods of mechanical test data processing] Moscow, Mashinostroenie, 1985, 232 p.

2. Pochtenny E.K. Kineticheskaya teoriya mekhanicheskoy ustalosti i ee prilozheniya [Kinetic theory of mechanical fatigue and its application], Minsk, Science and engineering, 1973, 213 p.

3. Syzrantsev V.N., Novoselov V.V., Sozonov P.M., Golofast S.L. Ocenka bezopasnosti i prochnostnoy nadezhnosti magistralnykh truboprovodov metodami neparametricheskoy statistiki [Estimation of safety and durability of trunk pipeline by the methods of nonparametric statistic] Novosibirsk, Nauka, 2013, 172 p.

4. Syzrantsev V.N., Nevelev Ja.P., Golofast S.L. Raschet prochnostnoy nadezhnosti izdeliy na osnove metodov neparametricheskoy statistiki [Durability estimation of production based on methods of nonparametric statistic] Novosibirsk, Nauka, 2008, 218 p.

5. Syzrantseva K.V. Raschet prochnostnoy nadezhnosti detaley mashin pri sluchaynom kharaktere vneshnikh nagruzok [Calculation of machine parts durability at random loading] Tyumen: TyumGNGU, 2011, 88 p.

6. Syzrantsev V. N., Syzrantseva K.V., Ilinykh V.N. Fundamentalnye issledovaniya, 2015, no3, pp. 139–143.

Рецензенты:

Быков И.Ю., д.т.н., профессор кафедры «Машины и оборудование нефтяной и газовой промышленности», ФГОУ ВПО «Ухтинский государственный технический университет», г. Ухта;

Плеханов Ф.И., д.т.н., профессор, директор Глазовского инженерно-экономического института (филиала), ФГОУ ВПО «Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова», г. Глазов.

Работа поступила в редакцию 10.04.2015.