УДК 519.6

ПОЛУГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГАУССА

Кобрунов А.И., Бурмистрова О.Н.

ФГБОУ ВПО «Ухтинский государственный технический университет», Ухта, e-mail: chonochka@mail.ru

На основании полугрупповых свойств решения уравнения диффузии по операции свертки в пространственных координатах, где полугрупповым параметром служит время диффузии, выведены полугрупповые свойства для нормального закона распределения при выполнении операции свертки, описываемого Гауссом, в котором полугрупповым параметром служит дисперсия. Выведено соотношение, связывающее время и скорость диффузии с дисперсией нормального распределения. Приложения результата лежат в методах нечеткого моделирования при выборе аппроксимации функции принадлежности для нечетких величин и их отношений. Технология прогноза основана на использовании принципа Мамдани для композиции отношений в форме функций принадлежности. Сформулирована задача нахождения источников информации, порождающих регистрируемое поле рассеяния данных. Определено решение уравнения диффузии, которое соответствует распределению с максимальной энтропией при фиксированной скорости и времени диффузии.

Ключевые слова: уравнение диффузии, дисперсия, распределение Гаусса, полугрупповые свойства

SEMIGROUP PROPERTIES OF THE GAUSSIAN DISTRIBUTION

Kobrunov A.I., Burmistrova O.N.

FGBOU VPO «Ukhta State Technical University», Ukhta, e-mail: chonochka@mail.ru

Based on the properties of the semigroup solutions of the diffusion equation for the convolution in the spatial coordinates, where the semi-group parameter is the diffusion time, derived semigroup property for the normal distribution when the convolution operation described by Gauss, in which the semi-group parameter is the variance. The relations connecting time and the diffusion rate with the variance of the normal distribution. Applications are the result of fuzzy modeling methods in selecting the approximation of the membership function for fuzzy variables and their relationships. Technology forecasting is based on the principle of Mamdani for the composition of relations in the form of membership functions. The problem of finding the sources of generating detectable stray field data. Defined solution of the diffusion equation, which corresponds to the distribution of maximal entropy at a fixed rate and the diffusion time.

Keywords: diffusion equation, dispersion, Gaussian distribution, the semigroup property

При разработке алгоритмов прогнозирования неопределенных параметров по предварительной обучающей выборке на основе принципов нечеткого моделирования [2] возникает задача выбора способа представления исходных данных в виде функции принадлежности для параметров, входящих в обучающую выборку. С этой целью следует каждому измеренному значению связанных параметров из обучающей выборки поставить в соответствие поле распределения информации от отдельного акта измерения – построить аппроксимацию распределения функции принадлежности [3].

Такая же задача возникает и при аппроксимации измеренных данных, по которым ищутся прогнозные значения. Дальнейшая технология прогноза основана на использовании принципа Мамдани для композиции отношений в форме функций принадлежности [4]. Для решения этой задачи необходимо выбрать базисные функции, с помощью которых выполняется заполнение в пространстве значениями информативности от одного отдельно взятого измерения. Естественным выбором в этом вопросе служат два принципа. Во-первых, принимаемое распределение должно иметь максимальную энтропию, что необходимо для того, чтобы не вводить информацию, которой объективно нет. Во-вторых, процесс распространения меры достоверности информации о значении параметра от точки, в которой это значение получено, к точке, в которой эта мера оценивается, должен быть аналогичен диффузии. Это диффузия информации по мере удаления от измеренного объекта. Оказывается, оба эти принципа приводят к одному и тому же результату – выбору аппроксимирующей функции в форме функции Гаусса. Кроме того, между параметрами функции Гаусса, ассоциируемой с дисперсией распределения и параметрами диффузии, существует тесная взаимосвязь, проявляющаяся в совпадении их полугрупповых свойств.

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(x,t)=a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}Q(x,t); \qquad (1)$$

$$a\neq 0;\ -\infty\leq x\ \infty;\ t\geq 0;$$

$$Q(x,0)=Q_0(x);\quad \int_{-\infty}^{\infty}|Q(x,t)|dx<\infty.$$

Его решение имеет вид [4]

$$Q(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}Q_0(\xi)\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]dx. \qquad (2)$$

Отсюда, в частности, следует полугрупповое свойство решения уравнения диффузии в однородном пространстве:

$$Q(x,t+\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}Q(x,t)\frac{1}{2a\sqrt{\pi\tau}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2\tau}\right]dx. \qquad (3)$$

Соотношение (3) представляет собой свертку функций $Q(x,t)$ и $\frac{1}{2a\sqrt{\pi\tau}}\exp\left[-\frac{(x)^2}{4a^2\tau}\right]$ по переменной x.

Отсюда и из уравнения (1) следует, что если

$$Q(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{(x)^2}{4a^2t}\right], \qquad (4)$$

то

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t+\tau}}\exp\left[-\frac{(x)^2}{4a^2(t+\tau)}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{(\xi)^2}{4a^2t}\right]\frac{1}{2a\sqrt{\pi\tau}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2\tau}\right]dx. \qquad (5)$$

Что сокращенно можно записать

$$Q(x,t+\tau)=Q(x,t)\cdot Q(x,\tau). \qquad (6)$$

Эти результаты обобщаются на двухмерный и трехмерный случай задачи (1):

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(x,t)=a^2\Delta Q(x,t);\quad x=\{x,y,z\};\ \text{либо}\ x=\{x,y\};\quad a\neq 0;\ -\infty\leq x\ \infty;\ t\geq 0; \qquad (7)$$

$$Q(x,0)=Q_0(x);\quad \int_{-\infty}^{\infty}|Q(x,t)|dx<\infty.$$

Δ – оператор Лапласа.

$$Q(x,t)=\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}\int_{-\infty}^{\infty}Q_0(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]dx=Q_0(x)^*=\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}\exp\left[-\frac{(x)^2}{4a^2t}\right]. \qquad (8)$$

Здесь N – размерность пространства векторов **x**. Свертка в (8) понимается в пространстве N измерений.

Полагая, что

$$Q(x,t)=\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^N}\exp\left[-\frac{(x)^2}{4a^2t}\right], \qquad (9)$$

получаем аналог (5) и (6)

$$\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t+\tau}\right)^N}\exp\left[-\frac{(x)^2}{4a^2(t+\tau)}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^N}\exp\left[-\frac{(\xi)^2}{4a^2t}\right]\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi\tau}\right)^N}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2\tau}\right]d\xi; \qquad (10)$$

$$Q(x,t+\tau)=Q(x,t)\cdot Q(x,\tau).$$

Это равенство может быть записано в форме

$$\varphi(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^N}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]d\xi; \qquad (11)$$

$$\varphi(x,t+\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,t)\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi\tau}\right)^N}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2\tau}\right]d\xi;$$

$$\varphi(x,t+\tau)=\varphi(x,t)\cdot\varphi(x,\tau).$$

Рассмотрим теперь частный случай соотношения (5).
Запишем

$$Q(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{(x)^2}{4a^2t}\right]$$

в форме

$$Q(x,t)=Q(x,\sigma(t))=\frac{1}{\sigma(t)\sqrt{\pi}}\exp\left[-\frac{(x)^2}{\sigma(t)}\right],$$

где $\sigma(t)=2a\sqrt{t}$.

Тогда, пользуясь соотношением (5), получим

$$\frac{1}{\sigma(t+\tau)\sqrt{\pi}}\exp\left[-\frac{(x)^2}{4\sigma^2(t+\tau)}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma(t)}\exp\left[-\frac{(\xi)^2}{4\sigma^2(t)}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma(\tau)}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\sigma^2(\tau)}\right]dx. \quad (12)$$

Причем $\sigma(t+\tau)=\sqrt{\sigma^2(t)+\sigma^2(\tau)}$.

В краткой записи в виде свертки уравнение (12) перепишется:

$$Q\left(x,\sqrt{\sigma^2(t)+\sigma^2(\tau)}\right)=Q\left(x,\sigma(t)\right)\cdot Q\left(x,\sigma(\tau)\right). \quad (13)$$

Принимая во внимание представление (2) получим обобщение (13) на произвольную функцию $\varphi(x)$: $\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|dx<\infty$:

$$\varphi(x,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(\xi)\frac{1}{\sigma(\tau)}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\sigma^2(\tau)}\right]d\xi; \quad (14)$$

$$\varphi\left(x,\sqrt{\sigma^2+\sigma'^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi,\sigma)\frac{1}{\sigma'}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\sigma'^2}\right]d\xi.$$

В пространстве двух измерений на основании (8):

$$\varphi(x,\sigma)=\frac{1}{\pi}\int\int_{E_0}\varphi_0(\xi)\frac{1}{\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\sigma^2}\right]d\xi; \quad (15)$$

$$\varphi\left(x,\sqrt{\sigma^2+\sigma'^2}\right)=\frac{1}{\pi}\int\int_{E_0}\varphi(\xi,\sigma)\frac{1}{\sigma'}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\sigma'^2}\right]d\xi;$$

$$E_0=-\infty\le\xi=\{\xi_1,\xi_2\}\le\infty.$$

Рассмотрим в N-мерном фазовом пространстве X параметров $\mathbf{x}=\{x_i,\ i=1...N\}$ экспериментально измеренные значения $\mathbf{x}^j\in S$; $j=1...M$, образующие в нем подмножество $\mathfrak{A}\in X$. Для поля рассеяния $\mathfrak{A}^\varepsilon(\mathbf{x})$ в фазовом пространстве, такого, что для каждой подобласти ΔX из разбиения X:

$$\max_{\Delta X\in X}\left|\mathfrak{A}^\varepsilon(\mathbf{x})\Delta X-\mathfrak{A}(\Delta X)\right|\le\varepsilon, \quad (16)$$

где $\mathfrak{A}(\Delta X)$ – число значений из $\mathfrak{A}\in X$, целиком лежащее в ΔX, определим функцию принадлежности $\mu_{\mathfrak{A}}(\mathbf{x})$ для измеренных значений параметров $\mathbf{x}\in X$ как нечетких величин, правилом:

$$\mu_{\mathfrak{A}}(\mathbf{x})=\frac{\mathfrak{A}^\varepsilon(\mathbf{x})}{\max_X\left[\mathfrak{A}^\varepsilon(\mathbf{x})\right]}.$$

На основании (15) может быть сформулирована задача нахождения распределения источников $\mu(\mathbf{x}, \sigma)$ информации для $\mu_{\mathfrak{A}}(\mathbf{x})$ как обратной задачи для интегрального уравнения:

$$\mu_{\mathfrak{A}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi}\int\int_{E_0}\mu(\xi,\sigma)\frac{1}{\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\sigma^2}\right]d\xi. \quad (17)$$

Решение этого интегрального уравнения требует использования методов решения некорректных задач и позволит проанализировать меру рассеяния источников информации в процессе ее движения по измерительному каналу, в котором она подвергалась диффузии.

Выводы

1. Решение уравнения диффузии в однородном бесконечном пространстве с импульсным источником в начальный момент времени для любого другого большего времени совпадает с нормальным законом распределения вероятностей, стандартное уклонение которого возрастает по мере увеличения времени диффузии по правилу $\sigma(t) = a\sqrt{2\pi t}$.

2. Решение уравнения диффузии соответствует распределению с максимальной энтропией при фиксированной скорости и времени диффузии [5], что следует из его совпадения с нормальным законом распределения.

3. Нормальный закон распределения обладает полугрупповыми свойствами относительно дисперсии $D(t) = \sigma^2(t)$:

$$Q(x,[D(t)+D(\tau)]) = \\ = Q(x,D(t))\cdot Q(x,D(\tau)). \quad (18)$$

Список литературы

1. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами: справочое пособие. – 1979. – 2 с.
2. Кобрунов А.И. Прямые и обратные задачи рассеяния при прогнозе физико-геологических параметров по геофизическим данным // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 9–6. – С. 1195–1199.
3. Zadeh L.A. Fuzzy sets // Information and Control. – 1965. – Vol. 8, № 3. – P. 338–353.
4. Mamdani, E.H. Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant. Electrical Engineers // Proceedings of the IEE. – 1974. – № 121(12). – P. 1585–1588.
5. Sung Y. Park a, Anil K. Bera Maximum entropy autoregressive conditional heteroskedasticity model // Journal of Econometrics. – 2009. – № 150. – P. 219–230.

References

1. Butkovskij A.G. Harakteristiki sistem s raspredelennymi parametrami: spravochoe posobie. 1979. 2 p.
2. Kobrunov A.I. Prjamye i obratnye zadachi rassejanija pri prognoze fiziko-geologicheskih parametrov po geofizicheskim dannym // Fundamental'nye issledovanija. 2014. no. 9–6. pp. 1195–1199.
3. Zadeh L.A. Fuzzy sets // Information and Control. 1965. Vol. 8, no. 3. pp. 338–353.
4. Mamdani, E.H. Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant. Electrical Engineers // Proceedings of the IEE. 1974. no. 121(12). pp. 1585–1588.
5. Sung Y. Park a, Anil K. Bera Maximum entropy autoregressive conditional heteroskedasticity model // Journal of Econometrics. 2009. no. 150. pp. 219–230.

Рецензенты:

Сушков С.И., д.т.н., профессор кафедры технологии и машин лесозаготовок, ФГБОУ ВПО «Ухтинский государственный технический университет», г. Ухта;

Павлов А.И., д.т.н., профессор кафедры лесных, деревообрабатывающих машин и материаловедения, ФГБОУ ВПО «Ухтинский государственный технический университет», г. Ухта.

Работа поступила в редакцию 10.04.2015.