

**ОБ УДОВЛЕТВОРЕНИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ОБОЛОЧЕК
ВРАЩЕНИЯ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ
МЕТОДОМ БУБНОВА-ГАЛЕРКИНА**

Кротов Е.А., Терентьев А.В.

*СПбГМТУ «Санкт-Петербургский государственный морской технический университет»,
Санкт-Петербург, e-mail: ekrotov@mail.ru, pptalex@mail.ru*

Проведен анализ различных форм тонких осесимметричных оболочек вращения при разных граничных условиях с целью нахождения функций перемещений, удовлетворяющих условиям закрепления. Учитывалась нелинейная взаимосвязь между перемещениями и деформациями, соответствующая нелинейной теории. Построены базисные функции, удовлетворяющие граничным условиям как для перемещений и усилий, так и для их линейных комбинаций. Рассмотрены замкнутая и незамкнутая в вершине оболочки вращения. Полученные базисные функции представляют полиномиальную зависимость от координат. Базисные функции не ортогональны, но обладают свойством полноты и построены в виде, который позволяет производить не только численное, но и аналитическое интегрирование, то есть можно рекомендовать эти функции для решения задач теории оболочек с использованием метода Бубнова-Галеркина.

Ключевые слова: базисные функции, нелинейная теория, метод Бубнова-Галёркина, замкнутая и незамкнутая в вершине оболочка вращения

**ON SATISFYING OF BOUNDARY CONDITIONS FOR SOLUTION
OF AXISYMMETRICAL PROBLEMS OF ROTATION SHELLS
IN GEOMETRICALLY NONLINEAR STATEMENT
BY BUBNOV-GALERKIN METHOD**

Krotov E.A., Terentev A.V.

*Saint-Petersburg State Marine Technical University, Saint-Petersburg,
e-mail: ekrotov@mail.ru, pptalex@mail.ru*

Analysis of different types of shells satisfying different boundary conditions is performed with the purpose to find displacement functions which satisfy restrictive conditions. Nonlinear relation between displacements and stresses was considered corresponding to nonlinear theory. Base functions have been constructed satisfying boundary conditions both for displacements and forces and its linear combinations. Two variants of shells of rotation are considered: closed and open shell at its top. Basis functions present polynomial dependence upon coordinates. Not orthogonal basis functions have fullness property and constructed as to allow numerical and analytical integration, i.e. these functions may be recommended for shell theory problems with usage of Bubnov-Galerkin method.

Keywords: basis functions, nonlinear theory, Bubnov-Galerkin method, closed and open rotation shell at its top

Основным требованием, предъявляемым к численному методу исследования конкретной конструкции, является оптимальное сочетание ее простоты (наглядности, простоты реализации и т.п.) и эффективности (достижения хорошей точности при возможно меньших затратах вычислительного времени). То есть везде, где это возможно, надо использовать более простой метод [1].

Оболочки вращения, используемые в машиностроении, обладают той особенностью, что в основном образующая их имеет плавные очертания, и они подвержены действию плавной нагрузки. В этих условиях может быть эффективен метод Бубнова-Галеркина, который описан в [4] и используется для анализа деформации ряда конкретных оболочек.

Основным препятствием для применения метода Бубнова-Галеркина в геометрически нелинейных задачах теории тонких

оболочек [2] является необходимость подбора базисных функций, удовлетворяющих нелинейным граничным условиям.

Остановимся на формулировке возможных типов граничных условий для оболочек вращения, которые первоначально были представлены в [1]. Поскольку система уравнений в неизвестных перемещениях w и $t = R_1 \theta_1 = u - w'$, (здесь u и w – тангенциальное и нормальное перемещения соответственно, R_1 – радиус кривизны, θ_1 – угол поворота) имеет шестой порядок, то необходимо иметь шесть граничных условий.

На контурах оболочки должны быть заданы величины u или T_1 (тангенциальное усилие) и w или N_1 (поперечное усилие) и θ_1 или M_1 (изгибающий момент) (если контур один, то используется условие симметричности при равенстве нулю угла поворота касательной к координатной линии $\theta = 0$). Каждый из этих шести параметров должен либо равняться нулю, либо иметь конечное

значение, либо может выражаться через соответствующее перемещение. Поэтому на одном контуре оболочки в общем случае может быть осуществлен один из 27 типов условий:

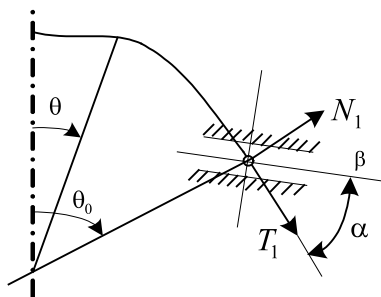
$$u = B \cdot T_1 \quad (B = 0, B, \infty)$$

$$w = A \cdot N_1 \quad (A = 0, A, \infty)$$

$$\theta_1 = \wp \cdot M_1 \quad (\wp = 0, \wp, \infty). \quad (1)$$

При этом первое условие из (1) $A = 0$, $B = 0$, $\wp = 0$ отвечает условию симметричности относительно оси $\theta = 0$ для замкнутой в вершине оболочки вращения.

В общем случае на границе могут быть заданы не сами перемещения u и w , усилия T_1 и N_1 , а их линейные комбинации. Покажем, что в этом случае задача отыскания базисных функций будет также сведена к нахождению их для указанных 27 условий или их комбинаций.



Направления внутренних усилий в точке с координатой θ_0

Допустим, что граничные условия выписаны согласно рисунку для линейных комбинаций усилий и перемещений, т.е. для величин

$$\bar{N} = -T_1 \sin \xi + N_1 \cos \xi,$$

$$\bar{w} = -u \sin \xi + w \cos \xi,$$

$$\bar{T} = T_1 \cos \xi + N_1 \sin \xi,$$

$$\bar{u} = u \cos \xi + w \sin \xi. \quad (2)$$

где $\xi = \xi(\rho)$ – угол между касательной к срединной поверхности оболочки в данной точке и прямой β :

$$\xi(0) = 0, \xi(1) = \alpha, \rho = \frac{\theta}{\theta_0}. \quad (3)$$

Считаем, что функции, удовлетворяющие условиям для функций $\bar{u}, \bar{w}, \bar{N}, \bar{T}$, получены (это условия (1)). Тогда, считая T_1, N_1, u, w за неизвестные функции, найдем их из (2):

$$N_1 = \bar{T} \sin \xi + \bar{N} \cos \xi,$$

$$T_1 = \bar{T} \cos \xi - \bar{N} \sin \xi,$$

$$w = \bar{u} \sin \xi + \bar{w} \cos \xi,$$

$$u = \bar{u} \cos \xi - \bar{w} \sin \xi. \quad (4)$$

Таким образом, отыскание базисных функций для случая, когда граничные условия заданы линейной комбинацией u и w , N_1 и T_1 , сводится к отысканию этих функций для условий (1).

Если получение функции $\xi = \xi(\rho)$, входящей в (4) в качестве аргумента тригонометрической функции, по каким-либо причинам затруднительно, то можно применять:

а) для замкнутой в вершине оболочки вращения следующее выражение:

$$\xi = \alpha \rho, \quad (5)$$

поскольку условия (3) тогда будут выполнены,

б) для незамкнутой в вершине оболочки, имеющей два контура, $\xi(\rho_0) = \alpha_0$

$$\xi(1) = \alpha_1 : \xi = \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{1 - \rho_0} \rho - \frac{\alpha_1 \rho_0 - \alpha_0}{1 - \rho_0}.$$

Итак, для всего многообразия граничных условий достаточно иметь базисные функции для 27 случаев (1) при рассмотрении замкнутой в вершине оболочки, и 351 ($C_{27}^2 = 351$) случаев для незамкнутой в вершине оболочки.

Для решения задачи методом Бубнова-Галеркина функции u, w и t представим в следующем виде:

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} A_i u_i, w = \sum_{i=0}^{\infty} B_i w_i, t = \sum_{i=0}^{\infty} T_i t_i. \quad (6)$$

Дальнейшая цель работы заключается в подборе u_i, w_i, t_i для различных типов закрепления края в случае осесимметричного нагружения оболочки вращения с учётом нелинейной связи между деформациями и перемещениями, предложенной Л.А. Шаповаловым в [5].

Подбор функций u_i, w_i, t_i гораздо проще осуществляется для замкнутой в вершине оболочки вращения (типа купола), имеющей один граничный контур, чем для оболочки незамкнутой с двумя граничными контурами. Это связано с тем, что удовлетворить условиям симметричности (в первом случае) при $\rho = 0$ проще, чем на границе (во втором) при фиксированном конечном значении координаты $\rho = \rho_0$. В связи с этим рассмотрим два случая.

Замкнутая в вершине оболочка вращения

1. Для всех видов закрепления опорного контура такой оболочки базисные функции должны удовлетворять одним и тем же условиям симметричности (при $\rho = 0$):

$$u = 0, t = 0, N_1 = 0. \quad (7)$$

При этом третье из условий (7) в перемещениях принимает вид

$$t'' = 0 \text{ при } \rho = 0. \quad (8)$$

Условие (8) получается после записи выражения для поперечного усилия N_1

$$N_1 = \frac{M_1}{R_1} + (M_1 - M_2) \frac{ctg\theta}{R_1 R_2} - \left(T_1 - \frac{M_2}{R_2} \right) \frac{t}{R_1} \quad (9)$$

и нахождения $\lim_{\rho \rightarrow 0} N_1$ с применением правила Лопиталя, описанного в [3] для неопределённостей $\left[\frac{0}{0} \right]$.

2. Рассмотрим оболочку, имеющую следующее закрепление опорного контура (при $\rho = 1$):

$$u = 0, N_1 = w/A, M_1 = t/\wp R_1, \\ w \neq 0, t \neq 0. \quad (10) \quad \text{где}$$

Третье из условий (10) после подстановки выражения для M_1 и ряда преобразований принимает вид

$$m_1 \theta + m_2 \theta' + m_3 \theta^2 = 0, \quad (11)$$

где

$$m_1 = \nu \lambda \omega ctg\theta_0 - \lambda^2 \frac{R_1'}{R_1} - \frac{1}{\wp CR_1},$$

$$m_2 = \lambda^2, \quad m_3 = -\frac{\nu}{2R_2} \lambda^2,$$

$$\lambda = \frac{h}{2\sqrt{3}R_1}, \quad \omega = \frac{h}{2\sqrt{3}R_2}, \quad C = \frac{Eh}{1-\nu^2}. \quad (12)$$

Здесь h – толщина оболочки; E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Второе условие (10) после подстановки выражений для усилий и несложных преобразований принимает вид

$$a_1 w + a_2 t + a_3 t' + a_4 t'' + a_5 t^2 + a_6 t t' + \\ + a_7 w t + a_8 w' t + a_9 w'' t + a_{10} t^3 = 0, \quad (13)$$

$$a_1 = -\frac{1}{AC}; \quad a_3 = \lambda^2 \left(\frac{ctg\theta_0}{R_2} - 3 \frac{R_1'}{R_1^2} \right); \quad a_4 = \lambda^2 \left(\frac{1}{R_1} \right); \quad a_5 = -\frac{ctg\theta_0}{R_1 R_2} \left(\nu \left(1 + \frac{\lambda^2}{2} \right) - \frac{3}{2} \lambda \omega \right);$$

$$a_6 = -\frac{1}{R_1^2}; \quad a_7 = -\frac{1}{R_1^2} - \frac{\nu}{R_1 R_2}; \quad a_8 = -\frac{\nu ctg\theta_0}{R_1 R_2}; \quad a_9 = -\frac{1}{R_1^2}; \quad a_{10} = -\frac{1}{2R_1^3} (1 + \omega^2);$$

$$a_2 = \lambda^2 \left(-\frac{\nu}{R_2} + 3 \frac{(R_1')^2}{R_1^3} - \frac{R_1''}{R_1^2} - \frac{R_1'}{R_1 R_2} ctg\theta_0 \right) + \omega^2 \left(-\frac{1}{R_1} ctg\theta_0 \right). \quad (14)$$

Будем искать выражения для функций w_i и θ_i в виде

$$w_i = -\frac{1}{1-\beta_i} \left(\frac{\rho^{2i+4}}{2i+4} - \beta_i \frac{\rho^{2i+2}}{2i+2} \right) + \bar{w}; \quad \theta_i = \frac{1}{1-\lambda_i} (\rho^{2i+3} - \lambda_i \rho^{2i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, \quad (15)$$

где $\lambda_i, \beta_i, \bar{w}$ – константы.

Легко убедиться непосредственной подстановкой, что функции (15) удовлетворяют всем условиям симметричности (условие $w|_{\rho=0} \neq 0$ накладывает лишь ограничение на $\bar{w}$: ($\bar{w} \neq 0$), а также граничным условиям $u = 0, t \neq 0$ при $\rho = 1$ (условие $w|_{\rho=1} \neq 0$ накладывает ограничение на $\bar{w}$: $\bar{w} \neq \frac{2}{(1-\beta_i)(2i+2)(2i+4)}$).

Остаётся убедиться, что существуют значения λ_i и β_i , отличные от 1, при которых и условия (11) и (13) были бы удовлетворены. После подстановки (15) в (11) и (13) и преобразований, получаем

$$\lambda_i = \frac{2i+3+(m_1+m_3)/m_2}{2i+1+(m_1+m_3)/m_2} \quad (i=0,1,\dots),$$

$$\beta_i = \frac{\alpha_i + (a_1 + a_7) \left(-\frac{1}{2i+4} + \bar{w} \right) + a_9(2i+3)}{\alpha_i + (a_1 + a_7) \left(-\frac{1}{2i+2} + \bar{w} \right) + a_9(2i+1)} \quad (i=0,1,\dots), \quad (16)$$

где

$$\alpha_0 = a_2 + a_5 + a_8 + a_{10} + (a_3 + a_6) \frac{3-\lambda_0}{1-\lambda_0} + a_4 \frac{6}{1-\lambda_0},$$

$$\alpha_i = a_2 + a_5 + a_8 + a_{10} + (a_3 + a_6) \frac{1}{1-\lambda_i} (2i+3-\lambda_i(2i+1)) +$$

$$+ a_4 \frac{1}{1-\lambda_i} ((2i+3)(2i+2) - \lambda_i(2i+1)(2i)) \quad (i=1,2,\dots). \quad (17)$$

В общем случае, λ_i и β_i отличны от 1, значит, функции (15) удовлетворяют всем граничным условиям и действительно являются искомыми.

3. Рассмотрим ряд важных частных случаев, имеющих предельный для A и $\wp$ характер.

а) $A = 0$. Тогда $a_1 = -1/(AC) \rightarrow \infty$ при $\rho \rightarrow 1$, а

$$\beta_i \rightarrow \frac{a_1 \left(-\frac{1}{2i+4} + \bar{w} \right)}{a_i \left(-\frac{1}{2i+2} + \bar{w} \right)} =$$

$$= \frac{1-\bar{w}(2i+4)}{1-\bar{w}(2i+2)} \cdot \frac{2i+2}{2i+4}. \quad (18)$$

Решение в функциях (15) существует.

б) $A = \infty$. В этом случае $a_1 = 0$. Подставляя a_1 в (17), находим β_i . Решение существует.

в) $\wp = \infty$. Тогда $1/(\wp CR_1) = 0$. Подставляя это выражение в (12), получим m_1 . Решение существует.

г) $\wp = 0$. Тогда $m_1 = \infty$, $\lambda_i \rightarrow \frac{m_1}{m_1} = 1$ при $\rho \rightarrow 1$, а $t_i \rightarrow \infty$. Неприводимый случай. Использовать для него функции (15) нельзя.

4. Рассмотрим ещё два важных случая закрепления граничного контура оболочки, замкнутой в вершине.

4.1. Пусть мы имеем абсолютно жёсткую заделку, то есть при $\rho = 1$

$$u = 0, w = 0, t = 0. \quad (19)$$

Можно решать эту задачу, используя следующие базисные функции:

$$w_i = \frac{\rho^{2i+4}}{2i+4} - \frac{\rho^{2i+2}}{2i+2} - \frac{1}{2i+4} + \frac{1}{2i+2};$$

$$t_i = -\frac{2i+2}{2i+3} (\rho^{2i+3} - \rho^{2i+1}), \quad i=0,1,\dots \quad (20)$$

В том, что они удовлетворяют всем граничным условиям, легко убедиться непосредственной подстановкой.

4.2. Пусть мы имеем закрепление типа «скользящей заделки», т.е. при $\rho = 1$

$$w = 0, t = 0, T_1 = 0, u \neq 0. \quad (21)$$

Третье условие (21) эквивалентно следующему:

$$u' + v \frac{R_1}{R_2} u \operatorname{ctg} \theta_0 = 0 \quad \text{при } \rho = 1. \quad (22)$$

Эту задачу можно решать, используя следующие базисные функции:

$$w_i = \frac{1-\gamma_i}{1-\beta_i} \left(\frac{\rho^{2i+4}}{2i+4} - \beta_i \frac{\rho^{2i+2}}{2i+2} + \beta_i \frac{1}{2i+2} - \frac{1}{2i+4} \right);$$

$$t_i = \frac{\gamma_i - \beta_i}{1-\beta_i} (\rho^{2i+3} - \rho^{2i+1}), \quad i=0,1,2,\dots \quad (23)$$

где

$$\gamma_i = \frac{2i+3 + v(R_1/R_2) \operatorname{ctg} \theta_0}{2i+1 + v(R_1/R_2) \operatorname{ctg} \theta_0}, \quad \beta_i = \frac{(2i+5 - \gamma_i)(2i+2)}{(2i+3)(2i+4)} \quad i=0,1,2,\dots$$

Функции (23) удовлетворяют всем условиям (21), (22) и (7), (8).

Незамкнутая в вершине оболочка вращения

Приведём здесь результаты лишь для одного варианта закрепления, а именно: при $\rho = \rho_0 (0 < \rho_0 < 1)$ и $\rho = 1$:

$$w = 0, \quad t = 0, \quad T_1 = 0, \quad u \neq 0. \quad (24)$$

Можно решать эту задачу, используя следующие базисные функции:

$$w_i = \frac{1 - \gamma_i}{1 - \beta_i} \left(\frac{\rho^{2i+4}}{2i+4} - \beta_i \frac{\rho^{2i+2}}{2i+2} - \frac{1}{2i+4} + \beta_i \frac{1}{2i+2} \right) + D_i (\rho - 1)^{2i+2};$$

$$t_i = \frac{\gamma_i + \beta_i}{1 - \beta_i} \rho^{2i+3} - \frac{\gamma_i - \beta_i}{1 - \beta_i} \rho^{2i+1} + (C_i - (2i+2)D_i)(\rho - 1)^{2i+1}, \quad (25)$$

где

$$\gamma_0 = \frac{\xi_0 + 3\rho_0^2 - 3 - 3v \frac{R_1^0}{R_2^0} (\rho_0 - 1) \operatorname{ctg} \theta_0 \rho_0}{\xi_0 - v \frac{R_1^0}{R_2^0} (\rho_0 - 1) \operatorname{ctg} \theta_0 \rho_0},$$

$$\xi_0 = v \frac{R_1^1}{R_2^1} \operatorname{ctg} \theta_0 + v^2 \frac{R_1^1 R_1^0}{R_2^1 R_2^0} \operatorname{ctg} \theta_0 \operatorname{ctg} \theta_0 \rho_0 (\rho_0 - 1) + v \frac{R_1^0}{R_2^0} \rho_0^3,$$

$$\gamma_i = \frac{2i+3 + v \frac{R_1^1}{R_2^1} \operatorname{ctg} \theta_0}{2i+1 + v \frac{R_1^1}{R_2^1} \operatorname{ctg} \theta_0}, \quad i=1,2,\dots, \quad (26)$$

$$\beta_i = \frac{\alpha_i + \frac{2i+2}{2i+4} (1 - \gamma_i) (\rho_0^{2i+4} - 1)}{\alpha_i + (1 - \gamma_i) (\rho_0^{2i+2} - 1)},$$

$$\alpha_i = \rho_0^{2i+3} - \gamma_i \rho_0^{2i+1} + C_i (\rho_0 - 1)^{2i+2} - (1 - \gamma_i) (\rho_0 - 1) \rho_0^{2i+3} \quad i=0,1,2,\dots,$$

$$C_0 = \gamma_0 - 3 + v \frac{R_1^1}{R_2^1} (\gamma_0 - 1) \operatorname{ctg} \theta_0,$$

$$C_i = \frac{\left(2i+3 + v \rho_0 \frac{R_1^0}{R_2^0} \operatorname{ctg} \theta_0 \rho_0 \right) \rho_0^{2i+2} - \left(2i+1 - v \rho_0 \frac{R_1^0}{R_2^0} \right) \gamma_i \rho_0^{2i}}{(\rho_0 - 1)^{2i} (\rho_0 + 2i)} \quad i=1,2,\dots,$$

$$D_i = \frac{1}{(\rho_0 - 1)^{2i+2}} \frac{1 - \gamma_i}{1 - \beta_i} \left(\frac{\rho_0^{2i+4}}{2i+4} - \beta_i \frac{\rho_0^{2i+2}}{2i+2} - \frac{1}{2i+4} + \frac{\beta_i}{2i+2} \right) \quad i=0,1,2,\dots,$$

$$R_1^0 = R_1(\rho_0), \quad R_2^0 = R_2(\rho_0), \quad R_1^1 = R_1(1), \quad R_2^1 = R_2(1).$$

Функции (25) удовлетворяют всем граничным условиям (24).

Выводы

Все предложенные базисные функции представляют собой полиномы различных степеней. Система функций обладает свойством полноты, поскольку функции линейно независимы из-за различных степеней полиномов. Функции не ортогональны, но интегралы от них и их произведений не обладают никакими особенностями, просты и легко берутся как аналитически, так и численно. В силу этого можно рекомендовать эти функции для решения задач теории оболочек с использованием метода Бубнова-Галеркина.

Список литературы

1. Ворович И.И., Минакова Н.И. Устойчивость неполого сферического купола // Прикладная математика и механика, 1968. – № 2. – С. 332–338.
2. Жилин П.А. Прикладная механика. Основы теории оболочек. – СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2006. – 167 с.
3. Ивлев В.В. Математический анализ. Функции многих переменных. – М.: Икар, 2013. – 548 с.
4. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина. – М.: Мир, 1988. – 353 с.

5. Шаповалов Л.А. Об одном простейшем варианте уравнений геометрически нелинейной теории тонких оболочек // Механика твердого тела. – 1968. – № 1. – С. 56–62.

References

1. Vorovich I.I., Minakova N.I. Ustoichivost nepologogo sphericheskogo cupola // Prikladnaya matematika i mekhanika, 1968. no. 2. pp. 332–338.
2. Zhilin P.A. Prikladnaya mekhanika. Osnovy teorii obolochek. SPb.: Izdatelstvo Politekhnicheskogo universiteta, 2006. 167 p.
3. Ivlev V.V. Matematicheskiy analiz. Funktsii mnogikh peremennykh. M.: Ikar, 2013. 548 p.
4. Fletcher K. Chislennyye metody na osnove metoda Galerkina. M.: Mir, 1988. 353 p.
5. Shapovalov L.A. Ob odnom prosteyshem variante uravneniy geometricheski nelineynoy teorii tonkikh obolochek // Mekhanika tverdogo tela. 1968. no. 1. pp. 56–62.

Рецензенты:

Картузов Е.И., д.т.н., профессор кафедры теоретической механики Санкт-Петербургского государственного морского технического университета, г. Санкт-Петербург;

Сорокин С.В., д.т.н., профессор кафедры сопротивления материалов Санкт-Петербургского государственного морского технического университета, г. Санкт-Петербург.

Работа поступила в редакцию 01.04.2015.