УДК 534.01

ИССЛЕДОВАНИЯ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ МОДЕЛИ ВАГОНА

Сафина Г.Ф.

ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет», Нефтекамский филиал, Нефтекамск, e-mail: safinagf@mail.ru

Рассмотрена прямая спектральная задача определения частот свободных колебаний модели вагона. Получено частотное уравнение колебаний модели. По решению прямой задачи исследована зависимость частот колебаний модели вагона от ее жесткостных и массовых параметров. Показано, что увеличение жесткостных параметров ведет к увеличению частот, а увеличение массовых параметров – к уменьшению частот колебаний модели. Поставлена и решена обратная задача диагностирования жесткостных и массовых параметров модели вагона по известным частотам ее свободных колебаний. Рассмотрена задача диагностирования жесткостей рессоры и рельсового основания, задача диагностирования массы вагона и массы колеса. Исследована единственность решения обратных задач, доказаны соответствующие теоремы. Получены аналитические формулы для жесткостных и массовых характеристик. Предложены методы решения задач, использующие две частоты колебаний модели вагона. Даны примеры решений прямой и обратной задач, графики зависимостей.

Ключевые слова: модель вагона, частотное уравнение, частоты колебаний, жесткостные и массовые параметры, диагностирование параметров

RESEARCHES OF DIRECT AND RETURN SPECTRAL PROBLEMS OF FREE FLUCTUATIONS OF MODEL OF THE CAR

Safina G.F.

Bashkir State University, Neftekamsk branch, Neftekamsk, e-mail: safinagf@mail.ru

The direct spectral problem of determination of frequencies of free fluctuations of model of the car is considered. The frequency equation of fluctuations of model is received. According to the solution of a direct task dependence of frequencies of fluctuations of model of the car from her stiffness and mass parameters is investigated. It is shown that the stiffness of parameters conducts increase to increase in frequencies, and increase in mass parameters – to reduction of frequencies of fluctuations of model. The return task of diagnosing the stiffness and mass parameters of model of the car on known frequencies of its free fluctuations is set and solved. The problem of diagnosing of a stiffness spring and the rail basis, a problem of diagnosing of mass of the car and mass of a wheel are considered. Uniqueness of the solution of the return tasks is investigated, the corresponding theorems are proved. Analytical formulas for the stiffness and mass characteristics are received. Methods the solutions of tasks using two frequencies of fluctuations of model of the car are proposed. Examples of solutions of direct and return tasks, tables of dependences are given.

Keywords: car model, frequency equation, frequencies of fluctuations, stiffness and mass parameters, diagnosing of parameters

Решения прямой и обратной спектральных задач колебаний модели вагона связаны с тем, что в ряде случаев колебания мешают нормальной эксплуатации вагона или даже непосредственно угрожают прочности, постепенно подготавливая усталостное разрушение; в таких случаях теория может указать пути для уменьшения вредных колебаний.

В настоящее время широкое развитие имеет направление, возникшее на стыке теории механизмов с акустикой, решающее задачи безразборной диагностики технических конструкций [2, 3, 5–7].

Свободные колебания механических систем, в том числе вагонов, их моделей, находят описание во многих работах по теории колебаний (см., например, [1, 8, 9]). Но в них рассматриваются прямые задачи по определению частот колебаний модели вагона. В представленной работе по прямой задаче исследована зависимость частот колебаний модели вагона от ее жесткостных и массовых параметров. Впервые поставлены и решены обратные задачи диагностирования параметров модели вагона по известным частотам ее свободных колебаний.

Прямая задача определения частот колебаний модели вагона

Рассмотрим собственные колебания модели вагона [9], представленной на рисунке.

Рассматривается консервативная система, которой дано начальное возмущение, переводящее систему в колебательный процесс. Сила инерции массы m_1:

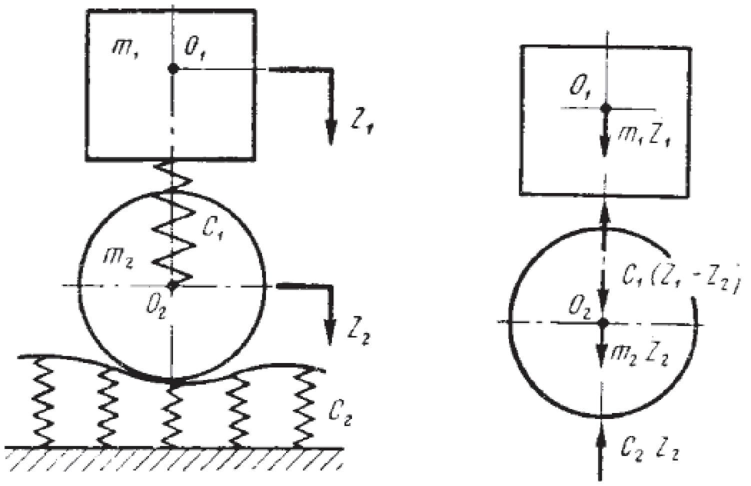
$$I_1 = -m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2},$$

где $\frac{d^2 z_1}{dt^2}$ – ускорение массы m_1 при ее перемещении z_1. Внешняя сила, действующая на массу m_1, определяется сжатием рессоры, равна $c_1(z_1 - z_2)$ и направлена навстречу силе I_1 (рисунок, б):

$$m_1 z_1'' = -c_1 \left(z_1 - z_2\right).$$

Полагая, что механическая система совершает свободные гармонические колебания, решение системы (1) рассматриваем в виде

$$z_1 = A\sin(\lambda t + \alpha);$$



а б

Модель вагона. Здесь: $m_1 = G_1/g$ – масса кузова; $m_2 = G_2/g$ – масса колеса; G_1 и G_2 – соответственно веса верхнего и нижнего грузов (вагона и колеса); g – ускорение силы тяжести; c_1 – жесткость рессоры; c_2 – жесткость рельсового основания

Внешними силами по отношению к массе m_1 являются сила, передаваемая нижним концом верхней пружины $c_1(z_1 - z_2)$, и сила, вызванная деформацией нижней пружины, – $c_2 z_2$. Значит, для сил, действующих на массу m_2, справедливо уравнение

$$m_2 z_2'' = -c_1 \left(z_1 - z_2\right) - c_2 z_2.$$

В итоге получим следующую систему дифференциальных уравнений, определяющую свободные колебания модели вагона:

$$\begin{cases} z_1'' = -\dfrac{c_1}{m_1}\left(z_1 - z_2\right); \\ z_2'' = -\dfrac{c_1 + c_2}{m_2} z_2 + \dfrac{c_1}{m_2} z_1. \end{cases} \qquad (1)$$

$$z_2 = B\sin(\lambda t + \alpha),$$

где A и B – амплитуды; λ – неизвестная угловая частота собственных колебаний.

Подставив решения z_1 и z_2 в систему (1), получим систему уравнений, решая которую относительно ненулевых амплитуд колебаний A и B, имеем:

$$\begin{vmatrix} c_1 - \lambda^2 m_1 & -c_1 \\ c_1 & -\left(c_1 + c_2 - \lambda^2 m_2\right) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получим частотное уравнение свободных колебаний модели вагона:

$$\lambda^4 - \left(\frac{c_1 + c_2}{m_2} + \frac{c_1}{m_1}\right)\lambda^2 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} = 0. \qquad (2)$$

Решая уравнение (2), получим аналитические формулы для частот колебаний модели:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{c_1 + c_2}{m_2} + \frac{c_1}{m_1}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{c_1 + c_2}{m_2} + \frac{c_1}{m_1}\right)^2 - \frac{4 c_1 c_2}{m_1 m_2}}\right). \qquad (3)$$

Таким образом, по формуле (3) при известных массах вагона и колеса и жесткостях рессоры и рельсового основания можно определять частоты колебаний системы. Решение прямой задачи рассмотрим на конкретном примере.

Пример 1. Определить частоты колебаний модели вагона, для которого известны параметры

$$m_1 = 23000 \text{ кг};$$

$$m_2 = 4000 \text{ кг};$$

$$c_1 = 7800 \text{ Н/м};$$

$$c_2 = 2890 \text{ Н/м}. \qquad (4)$$

Решение

Частотное уравнение (2) после подстановки в него заданных параметров (4) принимает вид

$$-\lambda^4 + 3{,}0116\lambda^2 - 0{,}245 = 0.$$

Решение, найденное с помощью ЭВМ:

$$-1{,}7111; \quad -0{,}2892; \quad 1{,}7111; \quad 0{,}2892.$$

Следовательно, частоты колебаний модели вагона: $\lambda_1 = 0{,}2892$ с$^{-1}$, $\lambda_2 = 1{,}7111$ с$^{-1}$. Эти же частоты колебаний получим, подставляя заданные физические параметры в формулы (3).

Исследуем влияние жесткостных параметров модели вагона на частоты ее колебаний. Рассмотрим физические параметры (4) и будем менять, например, жесткость рессоры при неизменных остальных параметрах модели. Результаты решений прямой задачи (табл. 1) показывают что увеличение коэффициента жесткости рессоры ведет к увеличению частот колебаний модели вагона.

Таблица 1

Зависимость частот λ_i от жесткости c_1 рессоры при параметрах (4) модели вагона

c_1, Н/м	λ_1, с$^{-1}$	λ_2, с$^{-1}$
7800	0,2892	1,7111
8500	0,2919	1,7696
9000	0,2936	1,8103

Подобные зависимости устанавливаются и при увеличении коэффициента жесткости рельсового основания или одновременном увеличении жесткостных параметров модели, что подтверждают, например, табл. 2 и 3.

Таблица 2

Зависимость частот λ_i от жесткости c_2 рельсового основания при параметрах (4) модели вагона

c_2, Н/м	λ_1, с$^{-1}$	λ_2, с$^{-1}$
2890	0,2892	1,7111
3500	0,3110	1,7513
4300	0,3348	1,8033

Таблица 3

Зависимость частот λ_i от коэффициентов жесткостей c_1, c_2 при параметрах (4) модели вагона

c_1, Н/м	c_2, Н/м	λ_1, с$^{-1}$	λ_2, с$^{-1}$
2890	2890	0,2892	1,7111
8500	3500	0,3144	1,7520
9000	4300	0,3418	1,8102

Аналогичные исследования проведены по влиянию массовых параметров модели вагона на частоты ее колебаний, и получено, что увеличение масс ведет, наоборот, к уменьшению частот колебаний. Например, в табл. 4 и 5 приведены зависимости частот колебаний от массы вагона и массы колеса вагона.

Таблица 4

Зависимость частот λ_i от массы m_1 вагона при параметрах (4) модели вагона

m_1, кг	λ_1, с$^{-1}$	λ_2, с$^{-1}$
23000	0,2892	1,7111
24500	0,281	1,7064
28000	0,2643	1,6974

Таблица 5

Зависимость частот λ_i от массы m_2 колеса при параметрах (4) модели вагона

m_2, кг	λ_1, с$^{-1}$	λ_2, с$^{-1}$
4000	0,2892	1,7111
5500	0,2844	1,4838
6500	0,2813	1,3800

Проведенные исследования по влиянию физических параметров модели вагона на частоты ее свободных колебаний важны при решении проблемы сохранения безопасных частот колебаний механической системы при изменениях ее параметров. Последнюю проблему можно будет решить с помощью метода решения обратной спектральной задачи.

Обратная задача диагностирования параметров модели вагона

Поставим к прямой спектральной задаче обратную – задачу диагностирования жесткостных и массовых параметров модели вагона по известным частотам ее колебаний. Рассмотрим вначале задачу диагностирования жесткостных параметров модели.

Обратная задача. Известны частоты колебаний модели вагона и массовые параметры. Неизвестны жесткостные параметры: коэффициенты рессоры и рельсового основания.

Исследуем вопрос о единственности решения поставленной обратной задачи [6]. При решении прямой задачи было получено уравнение (3), которое преобразуем к виду

$$\Delta(\lambda) = c_1c_2 - f_1(\lambda)c_1 + f_2(\lambda)c_2 + f_3(\lambda) = 0, \quad (5)$$

где функции $f_i(\lambda)$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ выражаются через частоту колебаний и массовые параметры:

$$f_1(\lambda) = (m_1 + m_2)\lambda^2;$$

$$f_2(\lambda) = m_1\lambda^2;$$

$$f_3(\lambda) = m_1m_2\lambda^4.$$

Введем обозначения: задачу с частотным уравнением (5) и жесткостями c_1 и c_2 рессоры и рельсового основания обозначим через L, а задачу с такими же массовыми параметрами модели, но с другими жесткостями c_1' и c_2' рессоры и рельсового основания обозначим через L'. Частотное уравнение задачи L' будет иметь вид

$$\Delta'(\lambda) = c_1'c_2' - f_1(\lambda)c_1' + f_2(\lambda)c_2' + f_3(\lambda) = 0. \quad (6)$$

Справедлива теорема.

Теорема 1. *Если собственные частоты задач L и L′ с характеристическими определителями* $\Delta(\lambda)$ *и* $\Delta'(\lambda)$ *совпадают с учетом их кратностей, то* $c_1 = c_1'$ *и* $c_2 = c_2'$.

Доказательство. Собственные частоты задачи L являются корнями целой функции [4] – частотного уравнения (5), а собственные частоты задачи L' – корнями уравнения (6). Причем функции $f_i(\lambda)$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ не зависят от коэффициентов жесткостей c_1 и c_2 и образуют систему линейно независимых функций.

Так как функции $\Delta(\lambda)$ и $\Delta'(\lambda)$ являются целыми функциями от λ и не равны тождественно нулю, то они восстанавливаются по своим нулям с точностью до постоянного множителя K. Значит, $\Delta(\lambda) - K\Delta'(\lambda) \equiv 0$. Из линейной независимости функций $f_i(\lambda)$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ и последнего равенства имеем $K = 1$. Значит, $c_1 = c_1'$ и $c_2 = c_2'$. Теорема доказана.

Из теоремы следует, что жесткостные параметры можно восстановить по известным значениям собственных частот колебаний модели вагона.

Построим теперь метод определения жесткостных параметров модели. Пусть известны две собственные частоты λ_1 и λ_2, тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} c_1c_2 - f_1(\lambda_1)c_1 + f_2(\lambda_1)c_2 + f_3(\lambda_1) = 0; \\ c_1c_2 - f_1(\lambda_2)c_1 + f_2(\lambda_2)c_2 + f_3(\lambda_2) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

из которой с учетом функций $f_i(\lambda)$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ получим аналитические выражения для коэффициентов жесткостей рессоры и рельсового основания:

$$c_1 = \frac{\left(\lambda_1^2m_2 + \lambda_2^2m_2\right) + \sqrt{\left(\lambda_1^2m_2 + \lambda_2^2m_2\right)^2 - 4\left(-1 - m_2/m_1\right)\left(-m_1m_2\lambda_2^2\lambda_1^2\right)}}{2(-1 - m_2/m_1)};$$

$$c_2 = m_2\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right) - c_1 - \frac{m_2}{m_1}c_1. \quad (8)$$

Таким образом, если известны две собственные частоты колебаний модели вагона, то жесткостные параметры определяются по формулам (8).

Пример 2. Определить жесткость рессоры и рельсового основания, если для модели вагона известны частоты колебаний

$$\lambda_1 = 0,2892\ \text{с}^{-1},$$

$$\lambda_2 = 1,7111\ \text{с}^{-1}$$

и массовые параметры

$$m_1 = 23000\ \text{кг};$$

$$m_2 = 4000\ \text{кг}.$$

Решение

Подставляя заданные частоты колебаний и массовые параметры в формулы (8), имеем

$$c_1 = 7799,9999;$$

$$c_2 = 2889,9999.$$

Значит, жесткости равны

$$c_1 = 7800\ \text{с}^{-1};$$

$$c_2 = 2890\ \text{с}^{-1}.$$

Заметим, что значения c_1, c_2 определены верно, так как по решению прямой задачи именно этим жесткостям рессоры и рельсового основания соответствуют заданные значения частот модели вагона.

Поставим теперь обратную задачу диагностирования массовых параметров модели вагона.

Обратная задача. *Известны частоты колебаний модели вагона и жесткостные параметры. Неизвестны массовые параметры: масса вагона и масса колеса.*

Частотное уравнение (2) преобразуем к виду

$$\Delta(\lambda) = m_1 m_2 - g_1(\lambda) m_1 + + g_2(\lambda) m_2 + g_4(\lambda) = 0, \tag{9}$$

в котором функции $g_i(\lambda)$ ($i = 1, 2, 3$) имеют вид

$$g_1(\lambda) = \frac{c_1 + c_2}{\lambda^2};$$

$$g_2(\lambda) = \frac{c_1}{\lambda^2};$$

$$g_3(\lambda) = \frac{c_1 c_2}{\lambda^4}.$$

Так же, как и при решении обратной задачи диагностирования жесткостных параметров, исследована единственность решения поставленной задачи. При этом рассмотрены: V – задача с массами m_1, m_2 и частотным уравнением (9), V' – задача с массами m_1', m_2' и частотным уравнением

$$\Delta(\lambda) = m_1' m_2' - g_1(\lambda) m_1' + + g_2(\lambda) m_2' + g_4(\lambda) = 0.$$

Доказана теорема.

Теорема 2. *Если собственные частоты задач V и V' с характеристическими определителями $\Delta(\lambda)$ и $\Delta'(\lambda)$ совпадают с учетом их кратностей, то*

$$m_1 = m_1';$$

$$m_2 = m_2'.$$

Приведем метод определения массовых параметров. Если известны значения двух частот колебаний модели вагона, то имеем систему уравнений вида (9), из которой получим аналитическое решение относительно массы вагона и массы колеса:

$$m_1 = \frac{m_2 c_1}{m_2\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right) - (c_1 + c_2)};$$

$$m_2 = \frac{-\left(-m_2 c_1 c_2\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right)\right) - \sqrt{\left(-m_2 c_1 c_2\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right)\right)^2 - 4\left(m_2^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2 c_1\right)\left(c_1 c_2 (c_1 + c_2)\right)}}{2\left(m_2^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2 c_1\right)}. \tag{10}$$

Пример 3. Известны частоты колебаний $\lambda_1 = 0{,}2892$ с$^{-1}$, $\lambda_2 = 1{,}7111$ с$^{-1}$ модели вагона и жесткостные параметры $c_1 = 7800$ Н/м; $c_2 = 2890$ Н/м. Необходимо найти массу вагона и массу колеса.

Решение

Подставляя заданные частоты и жесткостные параметры в формулы (10), находим, что $m_1 = 23000$ кг; $m_2 = 4000$ кг. Заметим снова, что значения масс m_1, m_2 определены верно, что подтверждает решение прямой спектральной задачи при заданных параметрах модели вагона.

Заключение

Исследована прямая задача определения частот свободных колебаний пружинно-массовой модели вагона. Впервые поставлены обратные задачи – задачи диагностирования физических параметров модели вагона по известным частотам ее свободных колебаний. Решены обратные задачи определения жесткостных и массовых характеристик модели вагона. Исследована единственность решения задач, доказаны соответствующие теоремы. Получены аналитические формулы для определения коэффициентов жесткостей рессоры и рельсового основания, а также для масс вагона и колеса. Предложены методы решения задач, использующие значения двух частот колебаний модели вагона. Приведены примеры решений обратных задач.

Методы решений обратных задач можно использовать при решении проблемы сохранения безопасных частот колебаний модели вагона при изменениях ее жесткостных и массовых параметров.

Список литературы

1. Бабаков И.М. Теория колебаний: учебное пособие. – М.: Дрофа, 2004. – 593 с.

2. Биргер И.А. Техническая диагностика. – М.: Машиностроение, 1978. – 239 с.

3. Генкин М.Д., Соколова А.Г. Виброакустическая диагностика машин и механизмов. – М.: Машиностроение, 1987. – 282 с.

4. Ланкастер П. Теория матриц: пер. с англ. – М.: Наука, 1982. – 227 с.

5. Павлов Б.В. Акустическая диагностика механизмов. – М.: Машиностроение, 1971. – 311 с.

6. Сафина Г.Ф. Моделирование в диагностировании закреплений цилиндрических оболочек. – Уфа: БашГУ, 2010. – 164 с.

7. Сафина Г.Ф. Диагностирование характеристик валов: монография. – Уфа: БашГУ, 2011. – 122 с.

8. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Физматгиз, 1959. – 440 с.

9. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. Линейные колебания и волны. – Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, 2011. – 180 с.

References

1. Babakov I.M. Teorija kolebanij: uchebnoe posobie. – M.: Drofa, 2004. – 593 p.

2. Birger I.A. Tehnicheskaja diagnostika. – M.: Mashinostroenie, 1978. – 239 p.

3. Genkin M.D., Sokolova A.G. Vibroakusticheskaja diagnostika mashin i mehanizmov. – M.: Mashinostroenie, 1987. – 282 p.

4. Lankaster P. Teorija matric: per. s angl. – M.: Nauka, 1982. – 227 p.

5. Pavlov B.V. Akusticheskaja diagnostika mehanizmov. – M.: Mashinostroenie, 1971. – 311 p.

6. Safina G.F. Modelirovanie v diagnostirovanii zakreplenij cilindricheskih obolochek. – Ufa: BashGU, 2010. – 164 p.

7. Safina G.F. Diagnostirovanie harakteristik valov: monografija. –Ufa: BashGU, 2011.–122 p.

8. Timoshenko S.P. Kolebanija v inzhenernom dele. – M.: Fizmatgiz, 1959. – 440 p.

9. Trubeckov D.I., Rozhnev A.G. Linejnye kolebanija i volny. – Saratovskij gosudarstvennyj universitet imeni N.G. Chernyshevskogo, 2011. – 180 p.

Рецензенты:

Урманчеев С.Ф., д.ф.-м.н., профессор, директор, ФГБУН «Институт механики им. Р.Р. Мавлютова» Уфимского научного центра РАН, г. Уфа;

Ахтямов А.М., д.ф.-м.н., проф., зав. кафедрой механики сплошных сред, ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет», г. Уфа.

Работа поступила в редакцию 01.04.2015.