

УДК 532.5.031

**ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
МОДЕЛИ РАСЧЕТА ПРИБРЕЖНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ
НА ОСНОВЕ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ ПО Б.Н. ЧЕТВЕРУШКИНУ
ЯВНЫХ СХЕМ НА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ
С МАССОВЫМ ПАРАЛЛЕЛИЗМОМ**

¹Чистяков А.Е., ¹Хачунц Д.С., ²Тимофеева Е.Ф., ³Фоменко Н.А., ⁴Кузнецова И.Ю.

¹Научно-исследовательский институт многопроцессорных вычислительных систем имени академика А.В. Каляева, ГОУ ВО «Южный федеральный университет», Таганрог, e-mail: cheese_05@mail.ru, diana-hachunts@mail.ru;

²ФГАОУ ВПО «Северо-Кавказский федеральный университет», Ставрополь, e-mail: teflena@mail.ru;

³Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, e-mail: natysik_ice@mail.ru;

⁴Инженерно-технологическая академия, ГОУ ВО «Южный федеральный университет», Таганрог, e-mail: kuznet.i.u@gmail.com

Рассматривается непрерывная математическая модель выхода волны на берег и ее разрушения, учитывающая такие физические параметры, как турбулентный обмен, сложная геометрия дна и береговой линии, трение о дно. Для этой модели построен эффективный алгоритм ее реализации, учитывающий динамическое изменение уровня возвышения жидкости. Разработан метод построения сеток с динамически изменяющейся геометрией расчетной области. Построен алгоритм решения задачи диффузии-конвекции на основе явных регуляризованных схем и выполнена его параллельная реализация. Разработан программный комплекс, предназначенный для визуализации двумерных полей скоростей движения водной среды в случае математического моделирования наката и обрушения волны на берег, а также для прогнозирования волновых процессов в прибрежных акваториях, на основе которого получены поля течений водной среды, согласующиеся с реальным физическим процессом.

Ключевые слова: гидродинамика, математическая модель, волновые гидродинамические процессы, система уравнений Навье – Стокса, рельеф дна, численный эксперимент

**PROGRAM REALIZATION OF DISCRETE MATHEMATICAL MODEL
OF COASTAL WAVE PROCESSES CALCULATION BASED ON EXPLICIT
SCHEMES REGULARIZED BY B.N. CHETVERTUSHKIN IS PERFORMED
ON COMPUTING SYSTEM WITH MASSIVE PARALLELISM**

¹Chistyakov A.E., ¹Khachunts D.S., ²Timofeeva E.F., ³Fomenko N.A., ⁴Kuznetsova I.Y.

¹GOU VO Public Educational Institution «Scientific Research Institute of Multiprocessor Computer Systems named after Acad. A.V. Kalyaev of Southern Federal University, Taganrog, e-mail: cheese_05@mail.ru, diana-hachunts@mail.ru;

²Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Professional Education «North-Caucasian Federal University», Stavropol, e-mail: teflena@mail.ru;

³Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, e-mail: natysik_ice@mail.ru;

⁴GOU VO «Engineering and Technological Academy of the Southern Federal University», Taganrog, e-mail: kuznet.i.u@gmail.com

Continuous mathematical model of calculation of wave exit to the shore and its destruction taking into account such physical parameters as turbulent exchange, complex geometry of the bottom and the coastline, bottom friction is under consideration. An effective algorithm of its realization taking into account a dynamic level change of liquid elevation is constructed. The method of construction of grids with dynamically changing geometry of rated operating conditions is developed. The algorithm of problem solving of diffusion convection on the basis of the explicit regularized schemes is constructed and its parallel realization is performed. Program complex intended for the visualization of two-dimensional velocity field of aquatic environment movement in case of mathematical modeling of wave setup and its breaking-down to the shore, as well as for wave processes forecasting in offshore strip is developed, on the basis of which the fields of aquatic environment course consistent with real physical process is derived.

Keywords: hydrodynamics, mathematical model, hydrodynamic wave processes, the set of equations by Navier – Stokes, bottom contour, numerical experiment

Для прогнозирования возможных ситуаций, связанных с волновыми процессами в прибрежных акваториях, с целью предотвращения строительства сооружений и ис-

пользования конкретного участка береговой линии рассматривается математическая модель процесса наката и обрушения волны на берег. В данной работе для предложенной

математической модели прибрежных волновых процессов приведено описание реализации разработанных алгоритмов.

Постановка задачи. При описании задачи волновой динамики жидкости исходными уравнениями являются:

– уравнения Навье – Стокса:

$$u'_t + uu'_x + vv'_y = -\rho^{-1}P'_x + (\mu u'_x)'_x + (\eta u'_y)'_y; \quad (1)$$

$$v'_t + uv'_x + vv'_y = -\rho^{-1}P'_y + (\mu v'_x)'_x + (\eta v'_y)'_y + g; \quad (2)$$

– уравнение неразрывности:

$$p'_t + (\rho u)'_x + (\rho v)'_y = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) в случае несжимаемой жидкости примет вид

$$u'_x + v'_y = 0. \quad (4)$$

Уравнения (1)–(4) рассматриваются при следующих граничных условиях:

– на дне области:

$$P'_n(x, y, t) = 0; \quad \rho \eta u'_y(x, y, t) = -\tau_x(t);$$

$$\rho \mu v'_x(x, y, t) = -\tau_y(t); \quad (5)$$

– на поверхности жидкости:

$$u'_n(x, y, t) = 0; \quad v'_n(x, y, t) = 0;$$

$$v(x, y, t) = P'_t / g \rho; \quad P'_n(x, y, t) = 0; \quad (6)$$

– на боковой границе:

$$u'_n(x, y, t) = 0; \quad v'_n(x, y, t) = 0;$$

$$P'_n(x, y, t) = \rho \Pi / \tau L, \quad (7)$$

где $V = \{u, v\}$ – вектор скорости движения водной среды; P – давление; μ, η – коэффициенты турбулентного обмена по горизонтальному и вертикальному направлениям соответственно; g – ускорение свободного падения; ρ – плотность жидкости; τ_x, τ_y – составляющие тангенциального напряжения на дне жидкости; Π – поток вектора скорости через боковую поверхность; L – расстояние от поверхности жидкости до дна (глубина жидкости с учетом возвышения уровня) на боковой границе.

Дискретная модель

Расчетная область представляет собой прямоугольник. Для численной реализации дискретной математической модели поставленной задачи волновой гидродинамики вводится равномерная сетка [2, 3]:

$$w_h = \{t^n = n\tau, x_i = ih_x, y_j = jh_y; n = \overline{0 \dots N_t}, i = \overline{0 \dots N_x}, j = \overline{0 \dots N_y}; N_t \tau = T, N_x h_x = l_x, N_y h_y = l_y\},$$

где τ – шаг по времени; h_x, h_y – шаги по пространству; N_t – верхняя граница по времени; N_x, N_y – границы по пространству.

Применяется непосредственная аппроксимация. В результате аппроксимации уравнений (1), (2) по временной переменной, вводя промежуточный слой $n + \sigma$ согласно МАС-методу и расщепляя уравнения по физическим процессам, уравнения приводятся к следующему виду [1, 5, 9]:

$$\frac{u^{n+\sigma} - u^n}{\tau} + uu'_x + vv'_y = (\mu u'_x)'_x + (\eta u'_y)'_y;$$

$$\frac{v^{n+\sigma} - v^n}{\tau} + uv'_x + vv'_y = (\mu v'_x)'_x + (\eta v'_y)'_y + g; \quad (8)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\sigma}}{\tau} = -\frac{P'_x}{\rho}; \quad \frac{v^{n+1} - v^{n+\sigma}}{\tau} = -\frac{P'_y}{\rho}. \quad (9)$$

Продифференцировав уравнения (9) и преобразовав с учетом уравнения неразрывности (4), получим

$$P''_{xx} + P''_{yy} = \frac{\rho}{\tau} \left((u^{n+\sigma})'_x + (v^{n+\sigma})'_y \right). \quad (10)$$

Расчет задач гидродинамики по данному методу «поправок к давлению» осуществляется в три этапа. На первом этапе на основе уравнений (8) считается поле скоростей. На втором этапе рассчитывается давление по уравнению (10). На третьем этапе из соотношений (9) уточняется поле скоростей по давлению.

Программная реализация

Для демонстрации визуализации процесса выхода и обрушения волны на берег с учетом особенностей рельефа дна прибрежной акватории и суши было разработано экспериментальное программное обеспечение «Waves» на базе ЭВМ. Программа «Waves» предназначена для построения двумерных полей скоростей движения водной среды в случае математического моделирования наката и обрушения волны на берег, а также для прогнозирования возможных ситуаций, связанных с волновыми процессами в прибрежных акваториях, с целью определения строительства сооружений и использования конкретного участка береговой линии. Разработанное экспериментальное программное обеспечение на базе ЭВМ предназначено для математического моделирования и демонстрации визуализации процесса выхода и обрушения волны на берег с учетом особенностей рельефа дна прибрежной акватории и суши.

Программный компонент «Waves» включает в себя следующие блоки: управляющий блок (в данном блоке содержится цикл по временной координате и вызываются функции: расчет поля скорости без учета давления, расчет давления, расчет двумерного поля скорости, расчет заполненности ячеек водной средой и функции ввода-вывода данных); блок ввода начальных данных для расчета течений и давления (задаются начальные распределения поля скорости и давления, а также маски граничных условий и начальные значения заполненности ячеек); блок построения сеточных уравнений для поля скорости без учета давления в соответствии с конечно-объемной схемой (считаются и записываются в массив коэффициенты и правая часть соответствующего сеточного уравнения, представленного в канонической форме); блок построения сеточных уравнений для поля давления; блок расчета заполненности ячеек [4, 10]; блок расчета поля скорости с учетом давления (результатом работы данного блока является расчет значений поля двумерного вектора скоростей на следующем временном слое); блок расчета пятидиагональных сеточных уравнений адаптивным попеременно-треугольным методом скорейшего спуска; блок вывода значений поля скоростей, давления и заполненности ячеек.

Результаты численных экспериментов

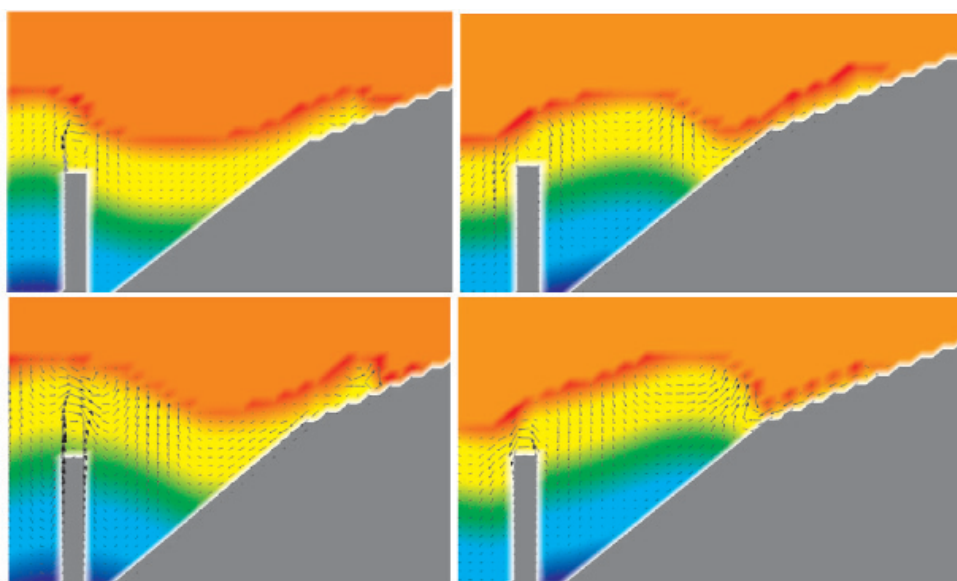
Математическая постановка решаемой задачи может быть сформулирована следующим образом: слой идеальной несжимаемой жидкости подходит к откосу с изломом на урезе, сопряженному с ровным дном. В этом случае откос приурезовой области нельзя считать плоским, откос и берег рас-

положены под разными углами. Предполагается, что в начальный момент времени жидкость находится в состоянии покоя. На некотором расстоянии от берега в точке $x = 0$ задается возмущение. Источником возмущения служит приложенный к боковой границе рассматриваемой области жидкости импульс давления. Требуется определить последующее движение воды.

После разработки программы «Waves» были проведены тестирования ее на соответствие уже имеющимся результатам, которые были получены другими научными работами и опытным путем. Анализ показывает, что приближенная математическая модель выхода волны на берег и ее разрушение в прибрежной зоне водоема с определенной точностью согласуется с существующими данными.

Результаты численных экспериментов расчета движения водной среды в прибрежной акватории представлены на рисунке, где изображено изменение профиля волны набегающей на берег в различный период времени. При этом программа отражает векторы поля скорости.

Из рисунка видно, что в прибрежной акватории при накате волны на берег происходит ее обрушение, образуется зона заплеска. Первая волна при откате назад «встречается» со следующей волной и «сбивает» ее. Полученные численные результаты процесса наката волн на берег дают возможность провести оценки силового воздействия волн на береговые объекты. Данная математическая модель построена для прогнозирования возможных сценариев развития ситуаций при использовании береговых зон.



Динамика изменения профиля уровня возвышения жидкости в случае наличия искусственного препятствия (волнореза)

Данные о времени счета, ускорении и эффективности

Количество ядер	Время, с	Ускорение	Эффективность
1	1215	1	100
2	623,1	1,95	97,5
4	319,7	3,8	95
8	164,2	7,4	92,5
16	85,6	14,2	88,8
32	46,2	26,3	82,2
64	25	48,6	75,9

Параллельная реализация задачи. Для параллельной реализации поставленной задачи будем использовать регуляризованные по Б.Н. Четверушкину явные схемы [11], при этом уравнение диффузии-конвекции [6–8]

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \text{div}(\varphi_i \vec{v}) = \text{div}(\mu \text{grad}(\varphi_i)) + I_\varphi$$

с учетом слагаемых регуляризаторов запишется в виде [11]:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} + \text{div}(\varphi_i \vec{v}) = \text{div}(\mu \text{grad}(\varphi_i)) + I_\varphi.$$

Следует отметить, что условием устойчивости для задачи диффузии-конвекции является $\Delta t \leq O(h^2)$, а в случае использования слагаемых регуляризаторов данное ограничение запишется в виде

$$\Delta t \leq O(h^{3/2}).$$

Обратим внимание на то, что полученные с учетом ограничения минимальных масштабов дополнительные члены, по сути, не меняют решений, использующих классические постановки. Они выступают лишь в качестве физически обоснованных регуляризаторов, сглаживающих физически необоснованные эффекты, получающиеся при численном решении. В этой связи конкретное значение величин, входящих в виде коэффициентов в регуляризирующие члены, уже не играет особой роли. Важно, чтобы они находились в правильном диапазоне лишь по порядку величины. Этот факт существенно облегчает практическое использование указанного подхода. При параллельной реализации использованы методы декомпозиции сеточных областей для вычислительно трудоемких задач диффузии-конвекции, учитывающие архитектуру и параметры многопроцессорной вычислительной системы РОЦ НИТ ЮФУ. Пико-

вая производительность MBC составляет 18,8 TFlops. В качестве вычислительных узлов используются 128 однотипных 16-ядерных Blade-серверов HP ProLiant BL685c, каждый из которых оснащен четырьмя 4-ядерными процессорами AMD Opteron 8356 2,3 GHz и оперативной памятью в объеме 32 ГБ.

Результаты использования многопроцессорных технологий для решения уравнения диффузии-конвекции на основе явных регуляризованных схем приведены в таблице.

Заключение

В работе дан эффективный алгоритм для решения задач волновой гидродинамики, учитывающий динамическое изменение уровня возвышения жидкости, и методика построения сеток с динамически изменяющейся геометрией расчетной области. Решение задач волной гидродинамики осуществляется с применением адаптивного попеременно-треугольного итерационного метода вариационного типа, который позволяет минимизировать время расчета сеточных уравнений с несамосопряженной матрицей коэффициентов по сравнению с другими итерационными методами.

Разработан алгоритм решения задачи диффузии-конвекции на основе явных регуляризованных схем и выполнена его параллельная реализация. Построен программный комплекс, предназначенный для визуализации двумерных полей скоростей движения водной среды в случае математического моделирования наката и обрушения волны на берег, а также для прогнозирования волновых процессов в прибрежных акваториях, на основе которого получены поля течений водной среды, согласующиеся с реальным физическим процессом.

Работа выполнена при частичной поддержке Задания №2014/174 в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России.

Список литературы

1. Васильев В.С., Сухинов А.И. Прецизионные двумерные модели мелких водоемов // Математическое моделирование. – 2003. – Т. 15, № 10. – С. 17.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
3. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 532 с.
4. Сухинов А.И., Никитина А.В., Чистяков А.Е. Моделирование сценария биологической реабилитации Азовского моря // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 9. – С. 3–21.
5. Сухинов А.И., Никитина А.В., Чистяков А.Е., Семенов И.С. Математическое моделирование условий формирования заморозов в мелководных водоемах на многопроцессорной вычислительной системе // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2013. – Т. 14, № 1. – С. 103–112.
6. Сухинов А.И., Хачунц Д.С., Чистяков А.Е. Математическая модель распространения примеси в приземном слое атмосферы прибрежной зоны и ее программная реализация // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015. – Т. 55, № 7. – С. 1238.
7. Сухинов А.И., Хачунц Д.С., Чистяков А.Е. Параллельные алгоритмы для прогноза состояния воздушной среды рекреационных зон прибрежных систем Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2015. – № 5 (131). – С. 55–60.
8. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежной зоне мелководных водоемов // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, № 12. – С. 65–82.
9. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Тимофеева Е.Ф., Шишенина А.В. Математическая модель расчета прибрежных волновых процессов // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 8. – С. 32–44.
10. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Фоменко Н.А. Методика построения разностных схем для задачи диффузии-конвекции-реакции, учитывающих степень заполненности контрольных ячеек // Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2013. – № 4 (141). – С. 87–98.
11. Четверушкин Б.Н. Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 11. – С. 33–52.

References

1. Vasilev V.S., Suhinov A.I. Precizionnye dvumernye modeli melkih vodoemov // Matematicheskoe modelirovanie. 2003. T. 15, no. 10. pp. 17.
2. Samarskij A.A. Teorija raznostnyh shem. M.: Nauka, 1989. 616 p.
3. Samarskij A.A., Nikolaev E.S. Metody reshenija setochnyh uravnenij. M.: Nauka, 1978. 532 p.
4. Suhinov A.I., Nikitina A.V., Chistjakov A.E. Modelirovanie scenarija biologicheskoy rehabilitacii Azovskogo morja // Matematicheskoe modelirovanie. 2012. T. 24, no. 9. pp. 3–21.
5. Suhinov A.I., Nikitina A.V., Chistjakov A.E., Semenov I.S. Matematicheskoe modelirovanie uslovij formirovanija zamorov v melkovodnyh vodoemah na mnogo-processornoj vychislitelnoj sisteme // Vychislitelnye metody i programmirovaniye: novye vychislitelnye tehnologii. 2013. T. 14, no. 1. pp. 103–112.
6. Suhinov A.I., Hachunc D.S., Chistjakov A.E. Matematicheskaja model rasprostraneniya primesi v prizemnom sloe atmosfery pribrezhnoj zony i ee programmaja realizacija // Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoy fiziki. 2015. T. 55, no. 7. pp. 1238.
7. Suhinov A.I., Hachunc D.S., Chistjakov A.E. Parallelnye algoritmy dlja prognoza sostojanija vozdušnoy sredy rekreacionnyh zon pribrezhnyh sistem Vestnik kompjuternyh i informacionnyh tehnologij. 2015. no. 5 (131). pp. 55–60.
8. Suhinov A.I., Chistjakov A.E., Procenko E.A. Matematicheskoe modelirovanie transporta nanosov v pribrezhnoj zone melkovodnyh vodoemov // Matematicheskoe modelirovanie. 2013. T. 25, no. 12. pp. 65–82.
9. Suhinov A.I., Chistjakov A.E., Timofeeva E.F., Shishenja A.V. Matematicheskaja model rascheta pribrezhnyh volnovyh processov // Matematicheskoe modelirovanie. 2012. T. 24, no. 8. pp. 32–44.
10. Suhinov A.I., Chistjakov A.E., Fomenko N.A. Metodika postroenija raznostnyh shem dlja zadachi diffuzii-konvekcii-reakcii, uchityvajushih stepen zapolnennosti kontrolnyh jacheek // Izvestija Juzhnogo federalnogo universiteta. Tehnicheskie nauki. 2013. no. 4 (141). pp. 87–98.
11. Chetverushkin B.N. Predely detalizacii i formulirovka modelej uravnenij sploshnyh sred // Matematicheskoe modelirovanie. 2012. T. 24, no. 11. pp. 33–52.