

УДК 532.5.031

ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ДВУХФАЗНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ НА ОСНОВЕ УСОВЕРШЕНСТВОВАННОГО ПОПЕРЕМЕННО-ТРЕУГОЛЬНОГО МЕТОДА

¹Сухинов А.И., ²Тимофеева Е.Ф., ²Григорян Л.А., ²Тебуева Ф.Б.,
³Никитина А.В., ³Хачунц Д.С.

¹ФГБОУ ВПО «Донской государственный технический университет»,
Ростов-на-Дону, e-mail: sukhinov@gmail.com;

²ФГАУ ВПО «Северо-Кавказский федеральный университет», Ставрополь,
e-mail: teflena@mail.ru, honey.lusine@mail.ru, fariza.teb@gmail.com;

³ГОУ ВО «Научно-исследовательский институт многопроцессорных вычислительных систем
имени академика А.В. Каляева», Таганрог, e-mail: nikitina.vm@gmail.com, diana-hachunts@mail.ru

Добыча нефти в большинстве случаев происходит при вытеснении ее в поровом пространстве продуктивного пласта водой или газом. Этот процесс применяется при естественных режимах эксплуатации и при искусственных методах поддержания пластового давления нагнетанием воды или газа. Задачи увеличения нефтеотдачи месторождений, имеющие важное практическое значение, приводят к необходимости массового решения задач фильтрации двухфазных несжимаемых жидкостей. Это, в свою очередь, требует при проектировании разработок нефтяных месторождений разрабатывать и применять параллельные алгоритмы, обеспечивающие высокую масштабируемость и возможность эффективного решения на многопроцессорных вычислительных системах. В статье рассматриваются вариант усовершенствованного попеременно-треугольного метода, учитывающий специфику постановок задач двухфазной фильтрации в естественных переменных «давление – водонасыщенность», а также его параллельная реализация на системе с массовым параллелизмом – супервычислительной системе ЮФУ, установленной в Таганроге.

Ключевые слова: моделирование задач двухфазной фильтрации, улучшенный итерационный попеременно-треугольный метод, параллельные алгоритмы

PARALLEL NUMERICAL SOLUTION TWO-PHASE INCOMPRESSIBLE FLUID PENETRATION TASK BASED ON AN IMPROVED ALTERNATING TRIANGULAR METHOD

¹Sukhinov A.I., ²Timofeeva E.F., ²Grigoryan L.A., ²Tebueva F.B.,
³Nikitina A.V., ³Khachunts D.S.

¹Federal State Educational Institution of Higher Professional Education «Don State Technical University», Rostov-on-Don, e-mail: sukhinov@gmail.com;

²Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Professional Education
«North-Caucasian Federal University», Stavropol, e-mail: teflena@mail.ru,
honey.lusine@mail.ru, fariza.teb@gmail.com;

³GOU VO Public Educational Institution «Scientific Research Institute
of Multiprocessor Computer Systems named after Acad. A.V. Kalyaev», Taganrog,
e-mail: nikitina.vm@gmail.com, diana-hachunts@mail.ru

Oil production occurs in most cases by displacing it into the porous space of the productive layers by water or gas. This process is used for oil mining in natural way as well as for artificial maintained value pressure in oil production layers by means of gas or water injection. Problem of increasing oil outcome is of great practical value and leads to numerous solving of such kind of problems. This, in turn, requires for design development of oil fields, to develop and implement parallel algorithms, providing high scalability and efficient solution for parallel computing. In this paper improved variant of the iteration alternating triangular method has been presented; it takes into account the specific features of two-phase flow problem statements in natural variables «pressure-water saturation», as well as its parallel implementation on a high performance computer system, installed in Taganrog in Southern Federal University has been presented.

Keywords: two-phase penetration problem modelling, improved iterative alternating triangular method (improved SSOR method), parallel algorithms

Постановка начально-краевой задачи и разностная схема

Развитию вычислительных методов решения задач фильтрации многофазных жидкостей посвящены работы [3, 15], в том

числе параллельному численному решению данного класса задач – публикации [7]. В случае плоско-параллельного характера фильтрации в пластах сравнительно небольшой мощности, уравнения, описывающие

фильтрацию двухфазной несжимаемой жидкости в отсутствие капиллярных и гравитационных сил и при наличии источников и стоков, имеют вид [7]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{f_1(s)kH}{\mu_1} + \frac{f_2(s)kH}{\mu_2} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{f_1(s)kH}{\mu_1} + \frac{f_2(s)kH}{\mu_2} \right) \frac{\partial p}{\partial y} \right] + q_1 + q_2 = 0; \quad (1)$$

$$mH \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{kH}{\mu_1} f_1(s) + \frac{kH}{\mu_2} f_2(s) \right) \varphi(s) \frac{\partial p}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{kH}{\mu_1} f_1(s) + \frac{kH}{\mu_2} f_2(s) \right) \varphi(s) \frac{\partial p}{\partial y} \right] - q_2 = 0, \quad (2)$$

где $s = s(x, y)$ – водонасыщенность; $p = p(x, y, t)$ – давление; $f_1(s), f_2(s)$ – относительные фазовые проницаемости для нефти и воды соответственно; H – мощность пласта; m – пористость пласта; μ_1, μ_2 – вязкость нефти и воды соответственно; $k(x, y)$ – проницаемость пласта; $\varphi(s)$ – так называемая функция Баклея – Леверетта

$$\varphi(s) = \frac{\mu_0 f_2(s)}{f_1(s) + \mu_0 f_2(s)}; \quad \mu_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad (3)$$

с помощью которой может быть определена доля фазы воды в суммарном потоке. Функции q_1 и q_2 , моделирующие работу скважин будут приведены при описании разностной схемы. Здесь мы отметим следующее: на эксплуатационных скважинах отбор фаз происходит пропорционально их подвижностям, а на нагнетательных – поток нефти равен нулю. Будем считать, что на скважинах задаются либо дебиты, либо забойные давления. В качестве функциональных зависимостей для задания $f_i(s), i = 1, 2$ будем использовать полиномы третьего порядка

$$f_1(s) = \left(\frac{\bar{s} - s}{\bar{s} - \underline{s}} \right)^3; \quad f_2(s) = \left(\frac{s - \underline{s}}{\bar{s} - \underline{s}} \right)^3, \quad (4)$$

а также

$$\begin{aligned} f_1(s) &= a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0, \\ f_2(s) &= b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\bar{s}, \underline{s}$ – постоянные – так называемые предельные значения водонасыщенности, например $\underline{s} = 0,1; \bar{s} = 0,9$; $a_i, b_i, i = 0, 1, 2, 3$ – постоянные коэффициенты. Разностная схема для данной задачи получена методом интегрирования методом [13].

Усовершенствованный алгоритм модифицированного попеременно-треугольного метода

В настоящей статье рассматривается параллельное численное решение системы разностных уравнений усовершенствованным модифицированным попеременно-треугольным методом, имеющим высокую скорость сходимости в случае сильно не-

однородных пластов и применения подробных пространственных сеток [1, 2, 5, 11, 12].

Решение системы (1), (2) сводится к решению задачи, которую можно представить в операторном виде:

$$A \overset{\circ}{y} = f; \quad A \overset{\circ}{y} = - \sum_{\alpha=1}^2 \left(a_{\alpha}^{+1} \overset{\circ}{y}_{x_{\alpha}} \right)_{\bar{x}_{\alpha}} + q \overset{\circ}{y}, \quad x \in \omega;$$

$$\overset{\circ}{y}(x) = 0, \quad x \in \gamma;$$

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{1}{h_1^2} \varphi_1(x) + \frac{1}{h_2^2} \varphi_2(x);$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} a_1(h_1, x_2) \cdot \mu(0, x_2), & x_1 = h_1; \\ 0, & 2h_1 \leq x_1 \leq l_1 - 2h_1; \\ a_1(l_1, x_2) \cdot \mu(l_1, x_2), & x_1 = l_1 - h_1; \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} a_2(x_1, h_2) \cdot \mu(x_1, 0), & x_2 = h_1; \\ 0, & 2h_2 \leq x_2 \leq l_2 - 2h_2; \\ a_2(x_1, l_2) \cdot \mu(x_1, l_2), & x_2 = l_2 - h_2. \end{cases}$$

Схема итерационного двухслойного модифицированного попеременно-треугольного метода имеет вид [4, 6, 10, 14]:

$$(D + \omega R_1) D^{-1} (D + \omega R_2) \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau_{n+1}} + A y^n = f,$$

где

$$R_1 y = \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{a_{\alpha}}{h_{\alpha}} y_{\bar{x}_{\alpha}} + \frac{a_{\alpha x_{\alpha}}}{2h_{\alpha}} y + \frac{1}{4} q y \right);$$

$$R_2 y = - \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{a_{\alpha}^{+1}}{h_{\alpha}} y_{x_{\alpha}} + \frac{a_{\alpha x_{\alpha}}}{2h_{\alpha}} y - \frac{1}{4} q y \right).$$

Параллельная реализация попеременно-треугольного метода и результаты численных экспериментов

Для решения задачи фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости использован адаптивный МПТМ минимальных поправок. При параллельной реализации использованы методы декомпозиции сеточных областей для вычислительно

трудоемких задач диффузии-конвекции, учитывающие архитектуру и параметры многопроцессорной вычислительной системы ЮФУ, в г. Таганроге. Пиковая производительность MBC составляет 18.8 TFlops. В качестве вычислительных узлов используется 128 однотипных 16-ядерных Blade-серверов HP ProLiant BL685c, каждый из которых оснащен четырьмя 4-ядерными процессорами AMD Opteron 8356 2.3 GHz и оперативной памятью в объеме 32ГБ.

Для параллельной реализации усовершенствованного МПТМ использованы методы декомпозиции области по одному направлению [8, 9]. Результаты использования многопроцессорных технологий для расчета полей течений приведены в таблице.

Количество ядер	Время, с	Ускорение	Эффективность
1	1447,415	1	1
2	734,728	1,97	0,985
4	387,009	3,74	0,935
8	199,643	7,25	0,906
16	109,653	13,2	0,825
32	62,659	23,1	0,722
64	36,643	39,5	0,617

Получены теоретические оценки ускорения и эффективности параллельного алгоритма, зависящие от времени выполнения арифметической операции, времени передачи данных и латентности, согласующиеся с приведенными выше экспериментальными данными (таблица).

На рис. 1–4 представлены результаты численного моделирования фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости. На рис. 1–2 приведена функция, описывающая распределение давления в начальный момент времени и через 750 суток после начала работы нагнетательных скважин.

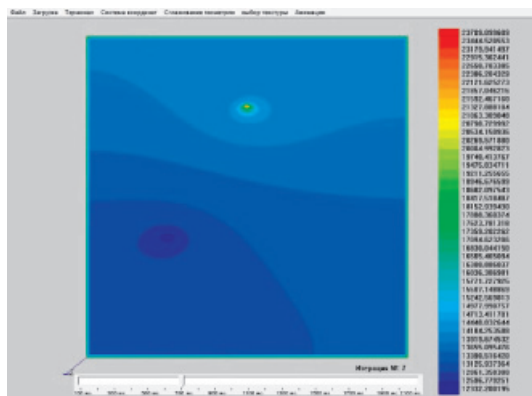


Рис. 1. Функция распределения давления в начальный момент времени

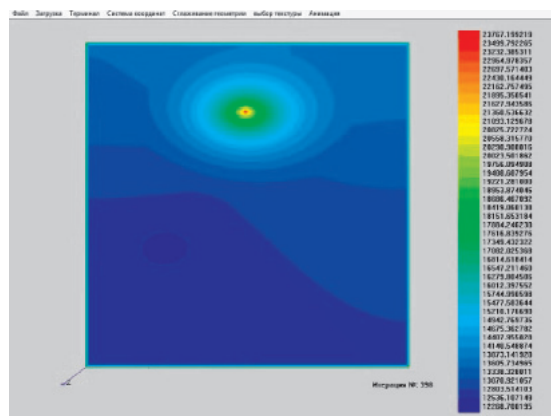


Рис. 2. Функция распределения давления через 750 суток

На рис. 3–4 приведена функция, описывающая распределение функции водонасыщенности в начальный момент времени и через 750 суток после начала работы нагнетательных скважин.

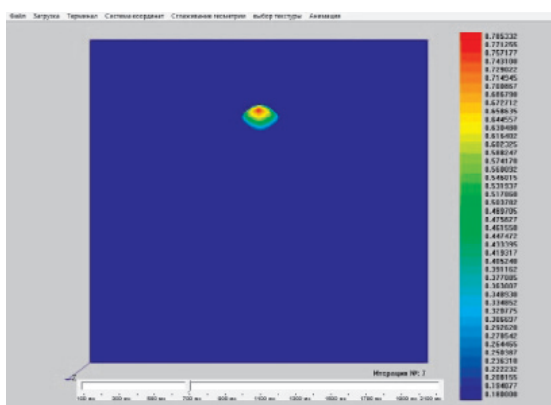


Рис. 3. Функция распределения водонасыщенности в начальный момент времени

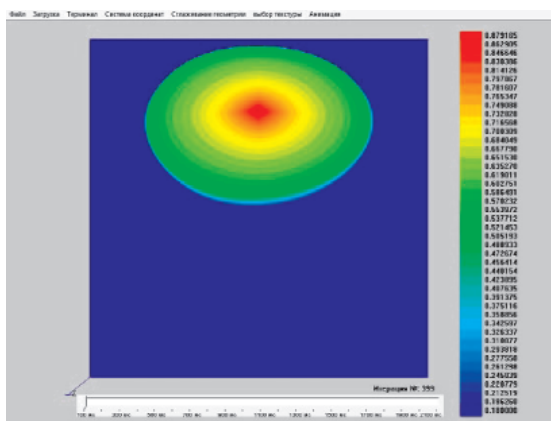


Рис. 4. Функция распределения водонасыщенности через 750 суток

Заключение

В статье для численного решения модельной задачи фильтрации двухфазной жидкости, описывающей процесс вытеснения нефти водой, для вычисления функции давления в пласте построено усовершенствованный модифицированный попеременно-треугольный метод, учитывающий специфику сеточных аппроксимаций задач такого типа – наличие функции источников, имеющей значительные величины в относительно небольшом числе узлов сетки, совпадающих с местоположением скважин. Построена и протестирована параллельная версия данного алгоритма на многопроцессорной системе ЮФУ в г. Таганроге, имеющая приемлемые показатели ускорения и эффективности для числа ядер при их изменении в диапазоне 4–256. Данный метод может найти применение при решении реальных задач проектирования разработок нефтяных месторождений в научно-исследовательских, проектных и технологических организациях нефтегазового профиля, эксплуатирующих относительно недорогие параллельные многоядерные системы с числом ядер до нескольких сотен.

Работа выполнена при частичной поддержке проектов Программы № 43 фундаментальных исследований Президиума РАН по стратегическим направлениям развития науки «Фундаментальные проблемы математического моделирования».

Список литературы

1. Бузало Н.С., Ермаченко П.А., Проценко Е.А., Хачунц Д.С., Чистяков А.Е. Трехмерная математическая модель динамики жидкости и концентрации воздушных пузырьков в карусельном аэротенке // Современные проблемы науки и образования. – 2015. – № 1. – С. 1789.
2. Гущин В.А., Матюшин П.В. Математическое моделирование и визуализация трансформации вихревой структуры течения около сферы при увеличении степени стратификации жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 2. – С. 268–281.
3. Коновалов А.Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. – Новосибирск: Наука, 1988. – 166 с.
4. Коновалов А.Н. Метод скорейшего спуска с адаптивным попеременно-треугольным переобуславливателем // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, № 7. – С. 953.
5. Петров И.Б., Фаворская А.В., Санников А.В., Квасов И.Е. Сеточно-характеристический метод с использованием интерполяции высоких порядков на те-

траэдральных иерархических сетках с кратным шагом по времени // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, № 2. – С. 42–52.

6. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – С. 592.

7. Сухинов А.И. Модифицированный попеременно-треугольный метод для задач теплопроводности и фильтрации // Вычислительные системы и алгоритмы. – 1984. – С. 52–59.

8. Сухинов А.И., Никитина А.В., Чистяков А.Е., Семенов И.С. Математическое моделирование условий формирования заморозов в мелководных водоемах на многопроцессорной вычислительной системе // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2013. – Т. 1, № 1. – С. 103–112.

9. Сухинов А.И., Хачунц Д.С., Чистяков А.Е. Математическая модель распространения примеси в приземном слое атмосферы и ее программная реализация на многопроцессорной вычислительной системе // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. – 2015. – Т. 19, № 1. – С. 213–223.

10. Сухинов А.И., Чистяков А.Е. Адаптивный попеременно-треугольный метод для решения сеточных уравнений с несамосопряженным оператором // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 1. – С. 3–20.

11. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежной зоне мелководных водоемов // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, № 12. – С. 65–82.

12. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Тимофеева Е.Ф., Шишнев А.В. Математическая модель расчета прибрежных волновых процессов // Мат. моделирование. – 2012. – Т. 24, № 8. – С. 32–44.

13. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Фоменко Н.А. Методика построения разностных схем для задачи диффузии-конвекции-реакции, учитывающих степень заполненности контрольных ячеек // Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2013. – № 4 (141). – С. 87–98.

14. Сухинов А.И., Шишнев А.В. Повышение эффективности попеременно-треугольного метода на основе уточненных спектральных оценок // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 11. – С. 10–22.

15. Четверушкин Б.Н., Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Чурбанова Н.Г., Шильников Е.В. Обобщенная схема для решения задач фильтрации // Математическое моделирование. – 2010. – Т. 22, № 4. – С. 99–109.

References

1. Buzalo N.S., Ermachenko P.A., Procenko E.A., Hachunc D.S., Chistjakov A.E. Trekhmernaja matematicheskaja model dinamiki zhidkosti i koncentracii vozdušnyh puzyrkov v karuselnom ajepotenke // Sovremennye problemy nauki i obrazovanija. 2015. no. 1. pp. 1789.
2. Gushhin V.A., Matjushin P.V. Matematicheskoe modelirovanie i vizualizacija transformacii vihrevoj struktury techenija okolo sfery pri uvelichenii stepeni stratifikacii zhidkosti // Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoy fiziki. 2011. T. 51, no. 2. pp. 268–281.
3. Konovalov A.N. Zadachi filtracii mnogofaznoj neszhimaemoj zhidkosti. Novosibirsk: Nauka, 1988. 166 p.

4. Konovalov A.N. Metod skorejshego spuska s adaptivnym poperemno-treugolnym pereobuslovivatelem // *Differencialnye uravnenija*. 2004. T. 40, no. 7. pp. 953.
5. Petrov I.B., Favorskaja A.V., Sannikov A.V., Kvasov I.E. Setochno-harakteristicheskij metod s ispolzovaniem interpoljacii vysokih porjadkov na tetrajedralnyh ierarhicheskikh setkah s kratnym shagom po vremeni // *Matematicheskoe modelirovanie*. 2013. T. 25, no. 2. pp. 42–52.
6. Samarskij A.A., Nikolaev E.S. *Metody reshenija setochnykh uravnenij*. M.: Nauka, 1978. pp. 592.
7. Suhinov A.I. Modificirovannyj poperemno-treugolnyj metod dlja zadach teploprovodnosti i filtracii // *Vychislitelnye sistemy i algoritmy*. 1984. pp. 52–59.
8. Suhinov A.I., Nikitina A.V., Chistjakov A.E., Semenov I.S. Matematicheskoe modelirovanie uslovij formirovanija zamorov v melkovodnyh vodoemah na mnogo-processornoj vychislitelnoj sisteme // *Vychislitelnye metody i programmirovanie: novye vychislitelnye tehnologii*. 2013. T. 1, no. 1. pp. 103–112.
9. Suhinov A.I., Hachunc D.S., Chistjakov A.E. Matematicheskaja model rasprostranenija primesi v prizemnom sloe atmosfery i ee programmaja realizacija na mnogoprocessornoj vychislitelnoj sisteme // *Vestnik Ufmskogo gosudarstvennogo aviacionnogo tehničeskogo universiteta*. 2015. T. 19, no. 1. pp. 213–223.
10. Suhinov A.I., Chistjakov A.E. Adaptivnyj poperemno-treugolnyj metod dlja reshenija setochnykh uravnenij s nesamosoprijazhennym operatorom // *Matematicheskoe modelirovanie*. 2012. T. 24, no. 1. pp. 3–20.
11. Suhinov A.I., Chistjakov A.E., Procenko E.A. Matematicheskoe modelirovanie transporta nanosov v pribrezhnoj zone melkovodnyh vodoemov // *Matematicheskoe modelirovanie*. 2013. T. 25, no. 12. pp. 65–82.
12. Suhinov A.I., Chistjakov A.E., Timofeeva E.F., Shishenja A.V. Matematicheskaja model rasčeta pribrezhnykh volnovykh processov // *Mat. modelirovanie*. 2012. T. 24, no. 8. pp. 32–44.
13. Suhinov A.I., Chistjakov A.E., Fomenko N.A. Metodika postroenija raznostnykh shem dlja zadachi diffuzii-konvekcii-reakcii, uchityvajushchih stepen zapolnennosti kontrolnykh jacheek // *Izvestija Juzhnogo federalnogo universiteta. Tehničeskije nauki*. 2013. no. 4 (141). pp. 87–98.
14. Suhinov A.I., Shishenja A.V. Povyšenie jeffektivnosti poperemno-treugolnogo metoda na osnove utočnennykh spektralnykh ocenok // *Matematicheskoe modelirovanie*. 2012. T. 24, no. 11. pp. 10–22.
15. Chetverushkin B.N., Morozov D.N., Trapeznikova M.A., Churbanova N.G., Shilnikov E.V. Obodnoj sheme dlja reshenija zadach filtracii // *Matematicheskoe modelirovanie*. 2010. T. 22, no. 4. pp. 99–109.