

УДК 621.73.01

АЛГОРИТМ ТРЕХМЕРНОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ

Покрас И.Б., Ахмедзянов Э.Р.

ФГБОУ ВПО «Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова», Ижевск, e-mail: era@istu.ru

В настоящей статье рассматривается алгоритм трехмерной триангуляции, адаптированный к моделированию пластического формоизменения процессов обработки металлов давлением. Данный алгоритм базируется на методах исчерпывания и позволяет строить корректную сетку в геометрически сложных участках и местах концентрации высоких градиентов скоростей деформаций. Исходным фронтом триангуляции является трехмерная модель поковки или заготовки, описанная полигональной поверхностью, состоящей из треугольников. Процесс формирования элементов выполняется итерационно, начиная с самых сложных ребер, определяемых исходя из величины двугранного угла и длин примыкающих ребер. При построении рассчитывается локальный шаг триангуляции позволяющий получить элементы с малым искажением и создавать сгущения узлов сетки. Разобраны методы формирования тетраэдральных элементов и сопутствующие им ситуации. Итоговая сетка позволяет решать трехмерные задачи моделирования пластического формоизменения методом конечных элементов.

Ключевые слова: построение трехмерной сетки элементов, триангуляция, метод конечных элементов, горячая объемная штамповка

ALGORITHM OF GENERATION THE THREE-DIMENSIONAL MESH FOR HOT FORGING MODELING

Pokras I.B., Akhmedzyanov E.R.

Izhevsk State Technical University n.a. M.T. Kalashnikov, Izhevsk, e-mail: era@istu.ru

In this paper we propose an algorithm of three-dimensional triangulation adapted to the simulation of the plastic deformation by metal forming. This algorithm is based on the advancing-front technique and allows making the correct mesh in geometrically complex areas and at the high strain rate areas. The original front of the triangulation is a three-dimensional model of forgings and blanks described by polygonal surface consisting of triangles. The process of formation of elements is performed iteratively, starting from the most complex edges, defined by the values of the dihedral angle and the lengths of the adjacent edges. In constructing the calculated local triangulation step allows to obtain elements with small distortion and create concentration of the mesh nodes. Methods of tetrahedral elements forming and related situations are described. The final mesh allows to effectively solve the problem of simulating three-dimensional plastic deformation by the finite element method.

Keywords: three-dimensional mesh generation, triangulation, finite element method, hot forging

При решении задач математического моделирования процессов обработки металлов давлением (ОМД), направленных на совершенствование разрабатываемых технологических процессов, далеко не всегда можно ограничиться рассмотрением плоского случая. Большинство типов поволоков требуют моделирования с использованием трех измерений. Несмотря на то, что многие математические методы, изначально ориентированные на два измерения, относительно легко переносятся на случай трех измерений, это не относится к важной сопутствующей проблеме – дискретизации пространства, необходимой для применения основного инструмента моделирования – метода конечных элементов (МКЭ). Основным способом деления пространства на элементарные объемы является разбиение на тетраэдры, которое по аналогии с двумерным разбиением области на треугольники принято называть триангуляцией. В настоящее время разработано большое количество программных

пакетов моделирования, реализующих построение тетраэдральных сеток. В основном это дорогостоящие коммерческие пакеты, такие как ANSYS, NASTRAN, а в области моделирования пластических деформаций – DEFORM-3D, QForm-3D и другие. Тем не менее, количество алгоритмов и их реализаций для трехмерного случая значительно меньше, чем для двумерного, и работы в данном направлении по-прежнему актуальны.

Существующие методы трехмерной триангуляции по принципу работы в целом повторяют свои двумерные аналоги. Для относительно простых по форме областей могут применяться прямые методы на основе шаблонов и отображений, а для сложных областей используются итерационные методы на основе критерия Делоне и методы исчерпывания (другое название – «фронтальные методы») [1]. При решении задач моделирования пластического формоизменения триангуляции подвергаются объекты различной сложности: заготовки

простейшей формы, поковки на разных стадиях деформации (в том числе с облоем), а также штамповочный инструмент. Сам процесс характеризуется постоянным изменением области моделирования и высокими значениями градиентов скоростей деформации и температур, что ведет к необходимости построения достаточно мелкой сетки с возможностью локального уплотнения, которая постоянно перестраивается при достижении элементами высокой степени искажения. Все это требует от алгоритма триангуляции универсальности и стабильности. В таких условиях возможно применение только итерационных методов. В основу работы авторов был положен алгоритм исчерпывания «от ребра», предложенный И.А. Щегловым [5], в который были внесены необходимые уточнения и корректировки, связанные с особенностями рассматриваемой предметной области.

Одной из таких особенностей является способ получения исходных данных. Для триангуляции нами использовались трехмерные модели, импортированные из САПР КОМПАС-3D встроенной прикладной библиотекой. Структура такой модели повторяет известный формат STL – это совокупность Q_T полигонов (треуголь-

ников) $T = \bigcup_{i=1}^{Q_T} t_i(v_i, n_i)$ с заданными в них вершинами $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, v_{i3})$ и нормальными $n_i = (\bar{n}_{i1}, \bar{n}_{i2}, \bar{n}_{i3})$. На рис. 1, а показан пример импортированной модели, а на рис. 1, б приведена структура полигона. В терминах трехмерной триангуляции полигоны принято называть гранями.

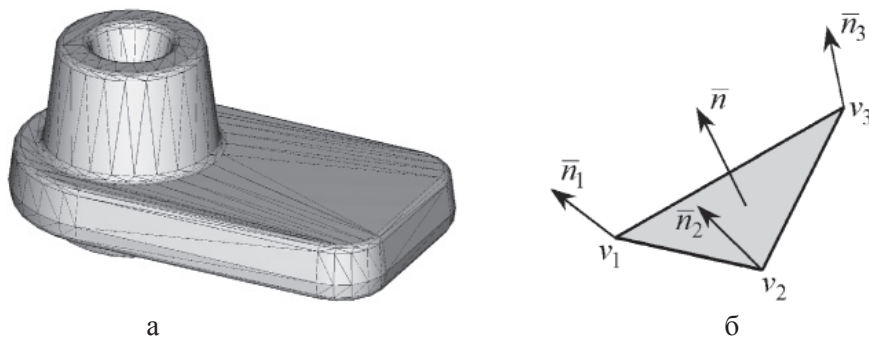


Рис. 1. Модель, импортированная из КОМПАС-3D (а), и структура ее полигона (б)

Рассмотрим основные этапы предлагаемого алгоритма на блок-схеме (рис. 2).

Основным способом управления плотностью сетки является задание количества ее элементов. Но в программной реализации приходится использовать другую величину – среднюю длину ребра тетраэдра,

которую принято называть шагом триангуляции (блок 2). Итерационные методы не позволяют точно спрогнозировать окончательное количество элементов, и для шага триангуляции только возможно рассчитать верхнее значение исходя из заданного количества элементов, объема области моделирования и предпочтительной формы элемента (правильный тетраэдр):

$$h = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot V_3}{\sqrt{2} \cdot Q_E}},$$

где h – шаг триангуляции; V_3 – объем дискретизируемой модели; Q_E – заданное количество элементов.

Очевидно, что исходная поверхностная модель совершенно не подходит для построения качественной, адаптированной для последующего моделирования триангуляции. Поэтому она подвергается перестроению с учетом рассчитанного шага триангуляции, которое более подробно описано в работе [2]. В ходе адаптации полигоны объединяются в группы на основе плоскостей и участков кривых поверхностей, а затем переразбиваются с использованием метода двумерной триангуляции, описанного в [3]. Полученная таким образом полигональная поверхность становится исходным фронтом трехмерной триангуляции (блок 3). На основе множеств вершин и граней этой поверхности формируются множества узлов

$N = \bigcup_{i=1}^{Q_N} N_i(x_i, y_i, z_i)$, которые являются недублированными вершинами полигонов,

и ребер $R = \bigcup_{i=1}^{Q_R} r_i(N_{i1}, N_{i2})$ – недублированных сторон полигонов (Q_N и Q_R – количество узлов и ребер). Такой способ хранения фронта (узлы, ребра, грани) является наиболее распространенным при построении трехмерной триангуляции.

В основном цикле алгоритма (блоки с 4 по 14) производится последовательное исключение тетраэдральных элементов из области, ограниченной фронтом, вплоть до ее полного исчерпания. Построение начинается с выбора наиболее сложного участка фронта (блок 4). С этой целью в каждом ребре $r \in R$ фронта производится расчет сложности C_r :

$$C_r = \frac{l_{cp}}{l_r} + \frac{K_\alpha \cdot \pi}{\alpha_r},$$

$$h_r = \min \left(h; K_L \cdot l_{cp t_m}; K_L \cdot l_{cp t_n}; h \cdot \left(I^c + (1 - I^c) \cdot \frac{2 \cdot d_r^c}{D^c} \right) \Big|_{d_r^c < D^c/2} \right),$$

где l_{cp} – средняя длина ребер фронта; l_r – длина ребра r (рис. 3); $K_\alpha = 3$ – коэффициент значимости угловой составляющей сложности; α_r – двугранный угол между треугольниками $t_m, t_n \in T$, образующими данное ребро. Согласно этой формуле большую сложность имеют ребра с малыми длиной и двугранным углом.

Для учета размеров граней и ребер выбранного участка фронта, а также возможности уплотнения сетки рассчитывается локальный шаг триангуляции (блок 5):

где $K_L = 1,3$ – коэффициент максимального удлинения стороны элемента, позволяющий получать элементы с незначительным искажением; $l_{cp t_m}, l_{cp t_n}$ – средние длины сторон треугольников фронта t_m, t_n , образующих ребро; I^c – интенсивность сгущения сетки ($0,2 \leq I^c < 1$); D^c – диаметр области сгущения; d_r^c – расстояние от центра ребра до точки сгущения. Последний компонент рассматривается только при вхождении ребра r в область сгущения. Применение локального шага триангуляции, рассчитанного в текущем месте построения, вместо постоянного глобального шага, позволяет формировать сетки со сгущениями в местах со сложной формой (закругления, облойная канавка и т.д.) и участках области, где присутствуют высокие градиенты интенсивностей скоростей деформации.

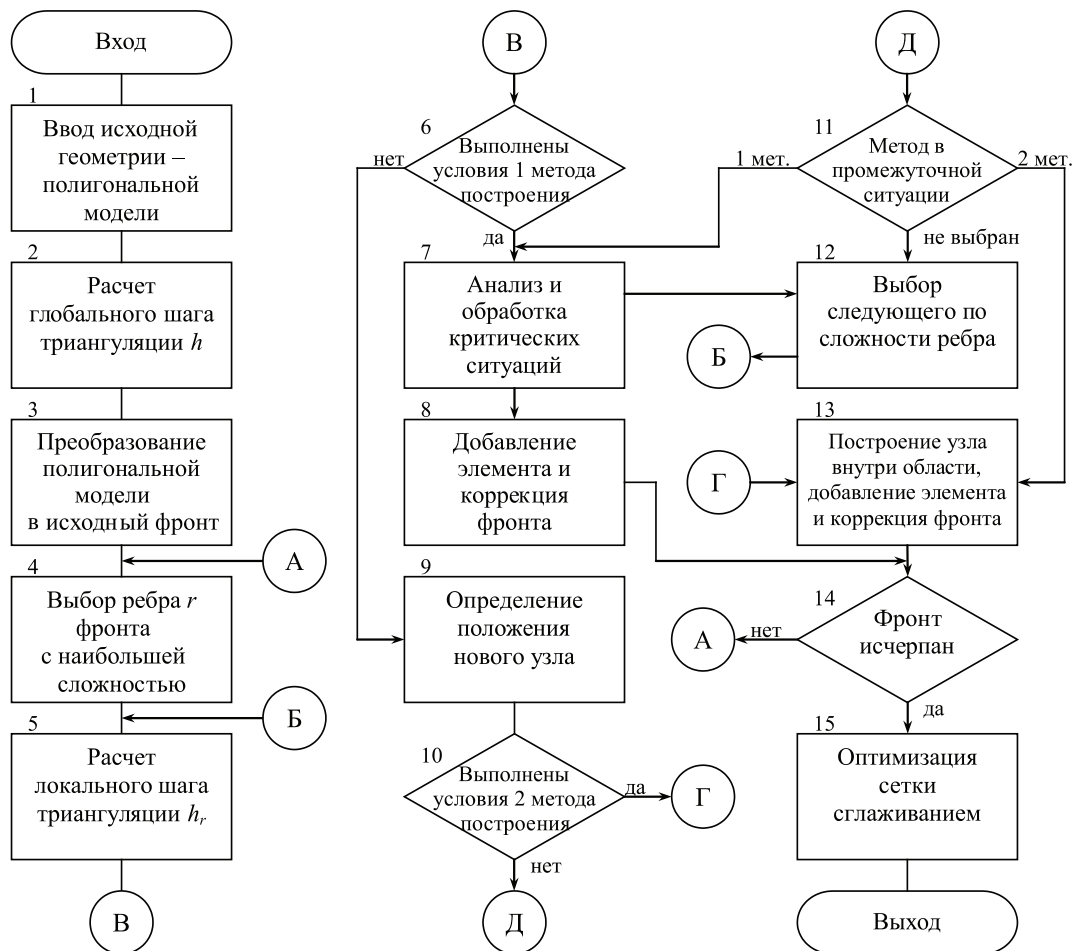


Рис. 2. Блок-схема алгоритма трехмерной триангуляции методом исчерпания

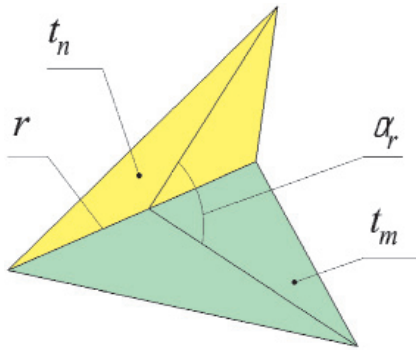


Рис. 3. Участок фронта с ребром r

Далее производится выбор метода построения тетраэдра на выбранном по сложности ребра фрагменте фронта (блоки 6, 10, 11). Рассматриваются два возможных варианта:

1) тетраэдр формируется без добавления нового узла путем соединения третьих точек граней, образующих ребро;

2) тетраэдр формируется путем создания нового узла внутри фронта и соединения его ребрами с меньшей из граней выбранного ребра.

Рассмотрим подробнее процесс выбора метода построения. Приоритет созданию тетраэдра без образования нового узла (рис. 4, а) отдается в следующих случаях (блок 6):

а) двугранный угол имеет значение меньше, чем в правильном тетраэдре: $\alpha_r < \alpha_{np} = 70^\circ 53'$;

б) значение двугранного угла находится в интервале $70^\circ 53' < \alpha_r < 100^\circ$, и длина нового ребра (N_k, N_l) не превосходит h_r ;

в) ребро (N_k, N_l) уже существует в результате предыдущих построений.

Формирование тетраэдра с новым узлом N_{Q_N} в качестве вершины происходит в обязательном порядке, если двугранный угол имеет большое значение: $\alpha_r > 120^\circ$

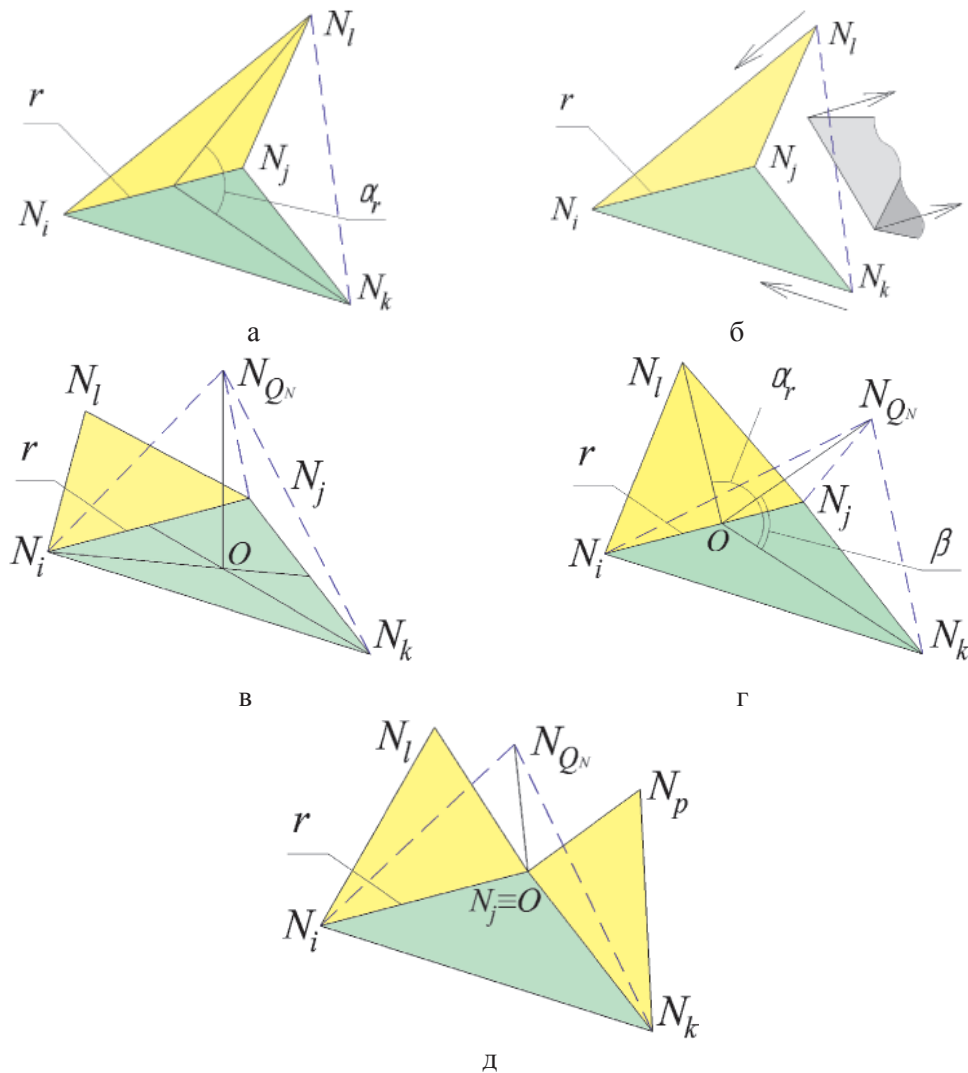


Рис. 4. Создание тетраэдра без нового узла (а, б) и с образованием нового узла (в, г, д)

(рис. 4, в) (блок 10). Во всех остальных случаях выбор одного из двух методов осуществляется на основе оценки качества получаемых тетраэдров, которое рассчитывается как отношение длин самого короткого и самого длинного ребер возможного тетраэдра (блок 11). Практика триангуляции моделей объектов ОМД показала, что первый метод используется в 80–85% процентах тетраэдров, а второй – в оставшихся 15–20%.

Применение каждого из методов имеет свои особенности. Добавлению элемента в триангуляцию первым методом предшествует проверка критических ситуаций – ребра и грани фронта не должны пересекать вновь создаваемый тетраэдр. Также необходимо заранее прогнозировать появление тетраэдров и граней фронта с «плохой» узкой формой. Для устранения данной проблемы производится анализ близлежащих объектов фронта и внесение изменений во фронт и триангуляцию до построения тетраэдра (блок 7) путем перемещения узлов по схеме, показанной на рис. 4, б. Порядок действий в ходе добавления тетраэдра первым методом (блок 8) во многом определяется наличием или отсутствием во фронте ребра (N_k, N_l) и боковых граней (N_p, N_k, N_l) , (N_j, N_k, N_l) . При отсутствии ребра и граней (около 65% элементов) в триангуляцию добавляется элемент с узлами N_j, N_p, N_k, N_l , а во фронт вставляются ребро (N_k, N_l) и грани (N_p, N_k, N_l) , (N_j, N_k, N_l) . В очень редко встречающейся ситуации отсутствия боковых граней и существования ребра (N_k, N_l) , помимо описанного выполняется клонирование ребра (N_k, N_l) , т.к. в нем необходимо знать уже два или более двугранных угла.

и примыкающие к нему ребра и грани (16–19% случаев).

В ходе добавления тетраэдра вторым методом (блок 13) во фронт вставляется новый узел, положение которого зависит от величины двугранных углов ребер опорной грани (N_p, N_j, N_k) . Если все углы больше $2 \cdot \alpha_{\text{пр}}$, то он строится на перпендикуляре к центру масс опорной грани (рис. 4, в). Если угол в ребре r меньше $2 \cdot \alpha_{\text{пр}}$ – на перпендикуляре к ребру r с углом $\beta = \alpha_{\text{пр}}/2$ к грани от точки O , полученной усреднением N_j, N_i и проекций узлов N_k, N_l на r (рис. 4, г). Если два угла меньше $2 \cdot \alpha_{\text{пр}}$, узел строится на прямой, образованной пересечением биссекторных плоскостей ребер этих углов (рис. 4, д). Во всех случаях позиция узла подбирается так, чтобы средняя длина новых ребер была равна h_p . Помимо нового узла во фронт добавляются три примыкающих к нему ребра и три грани, а опорная грань удаляется (блок 13). В ряде случаев не удается сформировать корректный тетраэдр ни одним из способов, тогда в качестве текущего берется следующее по сложности ребро (блок 12).

После завершения заполнения элементами области триангуляции производится оптимизация полученной сетки итерационным сглаживанием – каждый внутренний узел переносится в точку центра масс системы тетраэдров, содержащих данный узел (блок 17). Процедура сглаживания продолжается до тех пор, пока невязка перемещения узлов не станет меньше 0,01 мм. Как правило, для этого достаточно нескольких десятков итераций. На рис. 5 представлены результаты работы описанного алгоритма на примере двух поковок.

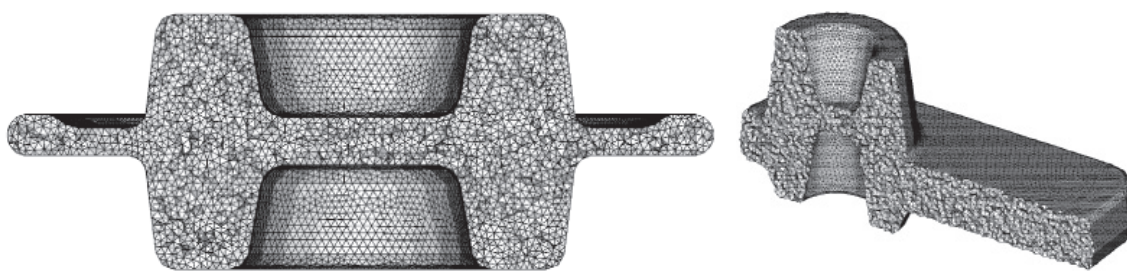


Рис. 5. Примеры триангуляции поковок

Если существуют ребро и обе боковые грани, то производится добавление элемента, а текущий фрагмент фронта с узлами N_p, N_j, N_k, N_l их гранями и ребрами удаляется (0,1% элементов). В случае наличия ребра и одной боковой грани, например (N_p, N_k, N_l) , следует добавить элемент в триангуляцию, вставить во фронт грань (N_j, N_k, N_l) , удалить узел N_i

Заключение

Применение описанного алгоритма для триангуляции моделей типичных заготовок и поковок показало его способность формировать трехмерные сетки из тетраэдров, пригодные для моделирования пластической деформации методом конечных элементов. В качестве недостатка предложенного алгоритма можно назвать его последовательный

характер, что усложняет распараллеливание процесса и интенсификацию расчетов на многоядерных процессорах и кластерах. Тем не менее работы в этом направлении ведутся, один из вариантов решения данной проблемы описан в работе [4].

Список литературы

1. Галанин М.П., Щеглов И.А. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: прямые методы [Электронный ресурс]. – URL: http://www.keldysh.ru/papers/2006/prep10/prep2006_10.html (дата обращения 1.10.2015).
2. Покрас И.Б., Ахмедзянов Э.Р. Адаптация поверхностной триангуляции трехмерных моделей разработанных в САПР к моделированию задач обработки металлов давлением. – Ижевск: Вестник ИжГТУ имени М.Т. Калашникова, 2015. – № 1. – С. 22–25.
3. Покрас И.Б., Ахмедзянов Э.Р. Алгоритм формирования двумерной сетки конечных элементов в задачах моделирования пластического формоизменения // *Фундаментальные исследования*. – 2014. – № 9. – ч. 1. – С. 29–35.
4. Покрас И.Б., Ахмедзянов Э.Р. Распараллеливание как средство повышения эффективности процесса трехмерной триангуляции // *Современные тенденции развития науки и технологий: сборник научных трудов по материалам II Международной научно-практической конферен-*

ции 31 мая 2015 г. – Белгород: ИП Ткачева Е.П., 2015. – Часть II. – С. 126–134.

5. Щеглов И.А. Дискретизация сложных двумерных и трехмерных областей для решения задач математического моделирования: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – М., 2010. – 18 с.

References

1. Galanin M.P., Scheglov I.A. *Razrabotka i realizatsiya algoritmov trekhmernoy triangulyatsii slozhnykh prostranstvennykh oblastei: pryamyte metody* (Development and Implementation of Algorithms for Constrained Volume Triangulations: Direct Methods). Available at: http://www.keldysh.ru/papers/2006/prep10/prep2006_10.html (accessed 1 October 2015).
2. Pokras I.B., Akhmedzyanov E.R. *Vestnik IzhGTU – ISTU herald*, 2015, no. 1, pp. 22–25.
3. Pokras I.B., Akhmedzyanov E.R. *Fundamentalnye issledovaniya – Fundamental research*, 2014, no. 9., vol. 1, pp. 29–35.
4. Pokras I.B., Akhmedzyanov E.R. *Materialy 2 Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii “Sovremennye tendentsii razvitiya nauki i tehnologiy”* (Proc. 2nd Int. Scientific-pract. conference “Modern trends in science and technology”). Belgorod, 2015, vol. 2, pp. 126–134.
5. Scheglov I.A. *Diskretizatsiya slozhnykh dvumernykh i trekhmernykh oblastey dlya resheniya zadach matematicheskogo modelirovaniya* [Discretization of complex two-dimensional and three-dimensional areas for solving tasks of mathematical modeling]. Moscow, 2010. 18 p.