

УДК 519.8

## ПРИМЕНЕНИЕ СХЕМ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ БИОЛОГИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ НА МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

<sup>1</sup>Никитина А.В., <sup>1</sup>Семенякина А.А., <sup>1</sup>Чистяков А.Е., <sup>2</sup>Проценко Е.А., <sup>2</sup>Яковенко И.В.

<sup>1</sup>Научно-исследовательский институт многопроцессорных вычислительных систем  
имени академика А.В. Каляева, ГОУ ВО «Южный федеральный университет»,  
Таганрог, e-mail: cheese\_05@mail.ru, nikitina.vm@gmail.com, j.a.s.s.y@mail.ru;

<sup>2</sup>Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) ФГБОУ ВО «Ростовский государственный  
экономический университет (РИНХ)», Таганрог, e-mail: eapros@rambler.ru, matan@tgpi.tu

Работа посвящена применению схем повышенного порядка точности для решения задач биологической кинетики. Для решения поставленной задачи были построены и изучены дискретные аналоги операторов конвективного и диффузионного переносов четвертого порядка точности в случае частичной заполненности ячеек. Были проведены численные эксперименты для задачи транспорта веществ на основе схем второго и четвертого порядков точности, которые показали, что для задачи диффузии-конвекции удалось повысить точность в 48,7 раз. Построенные схемы повышенного (четвертого) порядка точности были использованы при решении задач биологической кинетики. Предложен и численно реализован математический алгоритм, предназначенный для восстановления рельефа дна мелководного водоема на основе гидрографической информации (глубины водоема в отдельных точках или изолиний уровня), на основе которого была получена карта рельефа дна Азовского моря. Было установлено, что использование полей течений, рассчитанных по разработанной гидродинамической модели, позволило повысить качество входных данных, а также уменьшить значение погрешности при решении модельных задач биологической кинетики.

**Ключевые слова:** схема повышенного порядка точности, рельеф дна, транспорт веществ, задачи биологической кинетики, многопроцессорная вычислительная система

## THE APPLICATION OF THE SCHEME OF HIGH RESOLUTION FOR SOLVING OF BIOLOGICAL KINETICS'S PROBLEMS ON MULTIPROCESSOR COMPUTER SYSTEMS ON A MULTIPROCESSOR COMPUTER SYSTEM

<sup>1</sup>Nikitina A.V., <sup>1</sup>Semenyakina A.A., <sup>1</sup>Chistyakov A.E., <sup>2</sup>Protsenko E.A., <sup>2</sup>Yakovenko I.V.

<sup>1</sup>Public Educational Institution «Scientific Research Institute of Multiprocessor Computer Systems  
named after Acad. A.V. Kalyaev of Southern Federal University, Taganrog,  
e-mail: nikitina.vm@gmail.com, j.a.s.s.y@mail.ru, cheese\_05@mail.ru;

<sup>2</sup>Taganrog Institute after A.P. Chekhov (branch) of the federal state budgetary educational institution  
of higher education «Rostov State Economic University (RINH)», Taganrog,  
e-mail: eapros@rambler.ru, matan@tgpi.tu

The work is devoted to the application of schemes of high order of accuracy for solving problems of biological kinetics. To solve this problem have been constructed and studied discrete analogs of the operators convective and diffusive transfers of fourth order accuracy in the case of partial occupancy of cells. Numerical experiments were conducted for the problem of transportation of substances on the basis of the schemes of the second and fourth orders of accuracy, which showed that for the problem of diffusion-convection was possible to increase the accuracy in 48,7 times. The constructed circuit high (fourth) order of accuracy have been used in solving problems of biological kinetics. Proposed and numerically implemented a mathematical algorithm designed for the recovery of the bottom topography of shallow reservoir on the basis of hydrographic information (the depth of the reservoir in discrete points or contour level) on the basis of which was obtained map of the bottom relief of the sea of Azov. It was found that the use of fields of the currents calculated by the developed hydrodynamic model has improved the quality of the input data, as well as to decrease the error in the solution of model problems of biological kinetics.

**Keywords:** scheme of high resolution, bottom topography, transport of substances, the problem of biological kinetics, multiprocessor computer systems

### Постановка задачи

Для реализации моделей биологической кинетики рассмотрим базовую задачу транспорта веществ следующего вида:

$$c'_t + uc'_x + vc'_y = (\mu c'_x)'_x + (\mu c'_y)'_y + f$$

$$w_h = \{t^n = n\tau, x_i = ih_x, y_j = jh_y; n = \overline{0 \dots N_t}, i = \overline{0 \dots N_x}, j = \overline{0 \dots N_y}; N_t\tau = T, N_x h_x = l_x, N_y h_y = l_y\},$$

с граничными условиями

$$c'_n(x, y, t) = \alpha_n c + \beta_n,$$

где  $u, v$  – компоненты вектора скорости;  $\mu$  – коэффициент турбулентного обмена;  $f$  – функция, описывающая интенсивность и распределение источников.

Введем равномерную прямоугольную сетку [12]:

где  $\tau$  – шаг по времени;  $h_x, h_y$  – шаги по пространству;  $N_x, N_y$  – границы по пространству;  $N_t$  – верхняя граница времени.

Проведем дискретизацию операторов конвективного и диффузионного переносов второго порядка погрешности аппроксимации в случае частичной заполненности ячеек следующим образом:

$$(q_0)_{i,j} uc'_x \approx (q_1)_{i,j} u_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{2h_x} + (q_2)_{i,j} u_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{2h_x};$$

$$(q_0)_{i,j} (\mu c'_x)'_x \approx (q_1)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{h_x^2} - (q_2)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{h_x^2} - |(q_1)_{i,j} - (q_2)_{i,j}| \mu_{i,j} \frac{\alpha_x c_{i,j} + \beta_x}{h_x},$$

где  $q_i$  – коэффициенты, описывающие заполненность контрольных областей [11].

**Схемы повышенного порядка точности для операторов конвективного и диффузионного переносов**

Аппроксимация оператора конвективного переноса  $uc'$  разностной схемой, обладающей четвертым порядком точности, имеет следующий вид [3]:

$$(q_0)_i L(c) = -(q_1)_i \frac{u_{i+1/2}}{12h} \frac{(q_1)_{i+1}}{(q_0)_{i+1}} c_{i+2} - \left( -(q_1)_i \frac{u_{i+1/2}}{12h} \left( 2 + \frac{(q_1)_i}{(q_0)_i} \right) + \right.$$

$$\left. + (q_2)_i \frac{u_{i-1/2}}{12h} \frac{(q_1)_i}{(q_0)_i} + (q_1)_i \left( -\frac{u_{i+1/2}}{2h} + k_i^{(1)} + k_i^{(2)} \right) \right) c_{i+1} + \left( -(q_1)_i \frac{u_{i+1/2}}{12h} \left( 2 + \frac{(q_2)_{i+1}}{(q_0)_{i+1}} \right) + \right.$$

$$\left. + (q_2)_i \frac{u_{i-1/2}}{12h} \left( 2 + \frac{(q_1)_{i-1}}{(q_0)_{i-1}} \right) + (q_2)_i \frac{u_{i-1/2}}{2h} - (q_1)_i \frac{u_{i+1/2}}{2h} - ((q_2)_i - (q_1)_i) k_i^{(1)} + ((q_2)_i + (q_1)_i) k_i^{(2)} \right) c_i +$$

$$- \left( -(q_1)_i \frac{u_{i+1/2}}{12h} \frac{(q_2)_i}{(q_0)_i} + (q_2)_i \frac{u_{i-1/2}}{12h} \left( 2 + \frac{(q_2)_i}{(q_0)_i} \right) + (q_2)_i \left( \frac{u_{i-1/2}}{2h} + k_i^{(2)} - k_i^{(1)} \right) \right) c_{i-1} - \left( -(q_2)_i \frac{u_{i-1/2}}{12h} \frac{(q_2)_{i-1}}{(q_0)_{i-1}} \right) c_{i-2},$$

где  $k_i^{(1)} = \frac{(q_1)_i (u_{i+1} - u_i) - (q_2)_i (u_i - u_{i-1})}{8h}; \quad k_i^{(2)} = \frac{(q_1)_i u_{i+1} - u_i}{(q_0)_i 8h} + \frac{(q_2)_i u_i - u_{i-1}}{(q_0)_i 8h}.$

Аппроксимация оператора диффузионного переноса  $(\mu c')'$  разностной схемой, обладающей четвертым порядком точности, имеет следующий вид:

$$(q_0)_i (L(c)) \approx -(q_1)_i \frac{\mu_{i+1}}{12h^2} \frac{(q_1)_{i+1}}{(q_0)_{i+1}} c_{i+2} + \left( (q_1)_i \frac{\mu_{i+1/2}}{h^2} c_{i+1} + (q_1)_i \frac{\mu_{i+1}}{12h^2} \left( \frac{(q_1)_i}{(q_0)_i} + 2 \right) + (q_2)_i \frac{\mu_{i-1}}{12h^2} \frac{(q_1)_i}{(q_0)_i} - \right.$$

$$\left. - (q_1)_i \left( \frac{\mu_{i+1}'' - \mu_i''}{12} + k_i \right) \right) c_{i+1} - \left( (q_1)_i \frac{\mu_{i+1/2}}{h^2} + (q_2)_i \frac{\mu_{i-1/2}}{h^2} + (q_1)_i \frac{\mu_{i+1}}{12h^2} \left( \frac{(q_2)_{i+1}}{(q_0)_{i+1}} + 2 \right) + \right.$$

$$\left. + (q_2)_i \frac{\mu_{i-1}}{12h^2} \left( \frac{(q_1)_{i-1}}{(q_0)_{i-1}} + 2 \right) + (q_2)_i \left( \frac{\mu_i'' - \mu_{i-1}''}{12} - k_i \right) - (q_1)_i \left( \frac{\mu_{i+1}'' - \mu_i''}{12} + k_i \right) \right) c_i + \left( (q_2)_i \frac{\mu_{i-1/2}}{h^2} c_{i-1} + \right.$$

$$\left. + (q_1)_i \frac{\mu_{i+1}}{12h^2} \frac{(q_2)_i}{(q_0)_i} + (q_2)_i \frac{\mu_{i-1}}{12h^2} \left( \frac{(q_2)_i}{(q_0)_i} + 2 \right) + (q_2)_i \left( \frac{\mu_i'' - \mu_{i-1}''}{12} - k_i \right) \right) c_{i-1} - (q_2)_i \frac{\mu_{i-1}}{12h^2} \frac{(q_2)_{i-1}}{(q_0)_{i-1}} c_{i-2},$$

где  $\mu_i'' = \frac{(q_1)_i}{(q_0)_i} c_{i+1} - 2c_i + \frac{(q_2)_i}{(q_0)_i} c_{i-1}; \quad k_i = \frac{(q_1)_i \mu_{i+1} - \mu_i}{(q_0)_i 4h^2} - \frac{(q_2)_i \mu_i - \mu_{i-1}}{(q_0)_i 4h^2}.$

### Сопоставление результатов расчета задачи транспорта веществ на основе схем второго и четвертого порядков точности

Погрешность вычислений рассчитывалась как разность между аналитическим и численным решением задачи транспорта веществ, начальное распределение задавалось функцией

$$C(x, y) = \begin{cases} \sin(\pi(x-10))\cos(\pi(y-10)), & \{x, y\} \in D, D: \{x \in [10, 20], y \in [10, 20]\}; \\ 0, & \{x, y\} \notin D. \end{cases}$$

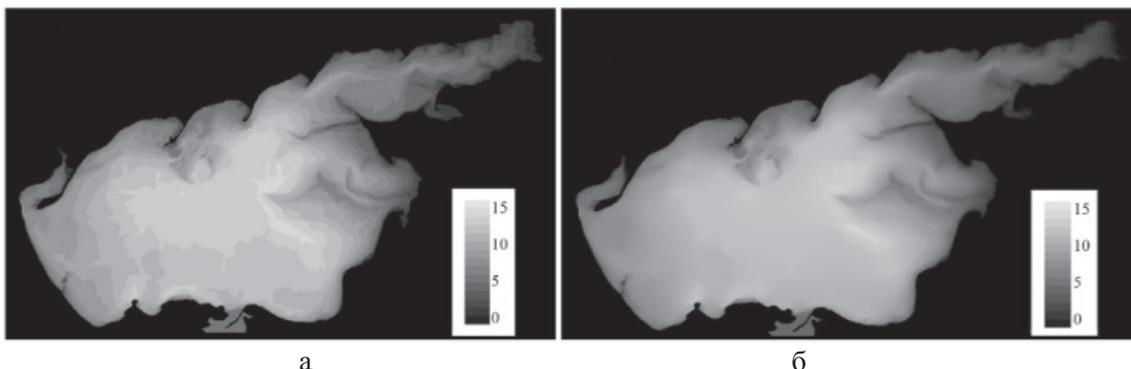


Рис. 1. Исходная (а) и восстановленная (б) геометрия дна Азовского моря

Для моделирования использовались последовательно сгущающиеся сетки. На сетке размерами  $100 \times 100$  расчетных узлов  $l_x = 100$  м,  $l_y = 100$  м,  $h = 0,001$  с; временной интервал равен 100 с, горизонтальная составляющая равна 4 м/с, вертикальная – 3 м/с, коэффициент турбулентного обмена равен  $2 \text{ м}^2/\text{с}$ .

Из сопоставления результатов численных экспериментов на основе схем второго и четвертого порядков точности следует, что для задачи диффузии-конвекции удалось повысить точность в 48,7 раз [10].

#### Применение схем повышенного порядка точности для решения задач биологической кинетики для восстановления донной поверхности мелководного водоема

Работа с картографическими данными, обработка гидрографической информации являются достаточно актуальными задачами, возникающими при математическом моделировании гидродинамики мелководных водоемов [7]. Как показано на рис. 1, а, глубина водоема задается в отдельных точках или изолиниями уровня.

Использование подобных карт для построения расчетных сеток нежелательно, т.к. появляются погрешности вычислений, связанные с «грубым» заданием геометрии расчетной области. Для того чтобы повысить точности расчетов гидродинамиче-

ских процессов, необходимо приблизить функцию двух переменных, описывающую рельеф дна водоема, более гладкими функциями. Для восстановления рельефа дна акватории Азовского моря использовался алгоритм, описанный в работе [13]. На основе разработанного программного комплекса получена карта рельефа дна Азовского моря (рис. 1, б).

#### Применение схем повышенного порядка точности для решения задач биологической кинетики

Методика восстановления донной поверхности и расчета полей течений водного потока в Азовском море была использована при решении модельных задач биологической кинетики. Рассчитанные поля течений использовались в качестве входной информации для моделей биологической кинетики [1] на примере задач: модель взаимодействия фито- и зоопланктона [4]; модель динамики промысловой рыбы пеленгас [2].

Использование разработанной модели гидродинамики с использованием схем повышенного порядка точности, разработанной методики восстановления донной поверхности мелководного водоема при решении вышеперечисленных задач привело к значительному уменьшению погрешности расчетов при численной реализации задач биологической кинетики.

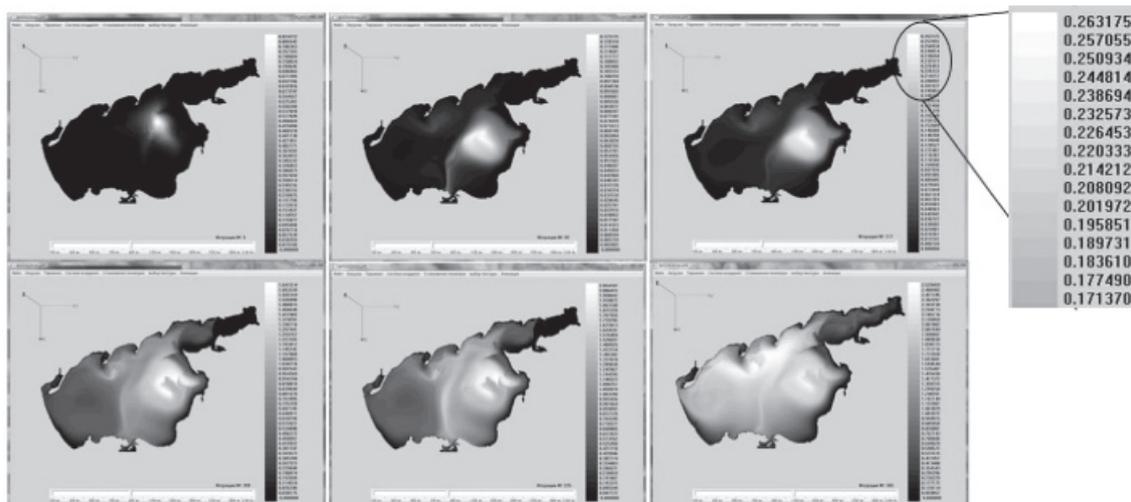


Рис. 2. Динамика изменения концентрации зеленой водоросли для временных интервалов  $T = 2, 27, 39, 70, 85, 122$  дня (после начала вегетационного периода фитопланктона (март – сентябрь))

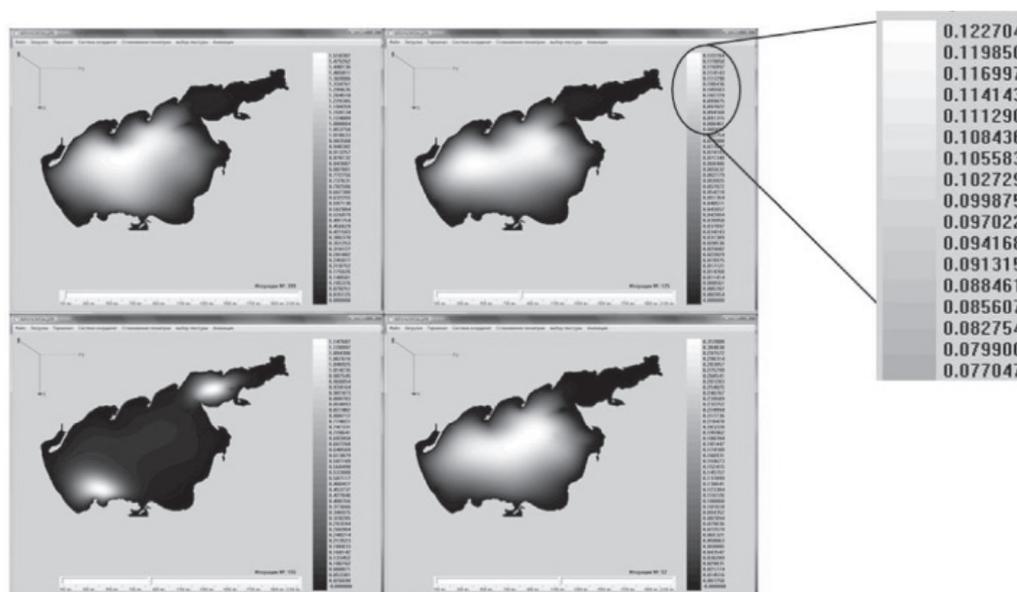


Рис. 3. Распределение концентраций пеленгаса, временной интервал  $T = 56, 126, 155, 400$  дней. Начальное распределение полей течений в Азовском море для северного ветра

На рис. 2 показаны результаты численного эксперимента для задачи взаимодействия фито- и зоопланктона на основе полученных схем повышенного порядка точности для реальной расчетной области сложной формы – Азовского моря. На рис. 3 изображены результаты численного эксперимента на основе построенных схем повышенного порядка точности для задачи динамики промысловой рыбы пеленгас в Азовском море.

#### Заклучение

Построены схемы повышенного (четвертого) порядка точности для операторов

конвективного и диффузионного переносов, учитывающие заполненность ячеек. Выполнено сопоставление результатов расчета задачи транспорта веществ на основе схем второго и четвертого порядков точностей. Из сопоставления результатов численных экспериментов следует, что для задачи диффузии-конвекции удалось повысить точность в 48,7 раз. Предложен математический алгоритм, предназначенный для восстановления рельефа дна акватории мелководного водоема на основе гидрографической информации (глубины водоема в отдельных точках или изолиний уровня).

На основе полученного метода решения задачи получена карта рельефа дна Азовского моря. Следует отметить, что предложенные схемы были так же применены для разработки программного комплекса, предназначенного для расчета трехмерных полей скоростей течений в мелководных водоемах, которые использовались в качестве входных данных при численной реализации задач биологической кинетики [5, 6] и транспорта донных материалов [8, 9].

*Работа выполнена при частичной поддержке Задания №2014/174 в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России, а также при частичной финансовой поддержке РФФИ по проектам № 15-01-08619, № 15-07-08626 и № 15-07-08408.*

### Список литературы

1. Никитина А.В. Исследование моделей биологической кинетики // Известия ТРТУ. – 2005. – № 9(53). – С. 213.
2. Никитина А.В., Лозовская К.А. Численное моделирование процессов взаимодействия планктона и популяции промысловой рыбы пеленгас // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. – № 8. – С. 98–103.
3. Семенякина А.А. Схемы повышенного порядка точности для задач диффузии-конвекции // Информатика, вычислительная техника и инженерное образование. – 2013. – № 4 (15). – С. 18–29.
4. Сухинов А.И., Никитина А.В., Пескова О.Ю. Математическое моделирование процессов распространения загрязнений и эволюции фитопланктона применительно к акватории Таганрогского залива // Известия ТРТУ. – 2001. – № 2(20). – С. 32–36.
5. Сухинов А.И., Никитина А.В., Чистяков А.Е. Моделирование сценария биологической реабилитации Азовского моря // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24. – № 9. – С. 3–21.
6. Сухинов А.И., Никитина А.В., Чистяков А.Е., Семенов И.С. Математическое моделирование условий формирования заморозов в мелководных водоемах на многопроцессорной вычислительной системе // Вычислительные методы и программирование. – 2013. – Т. 14. – С. 103–112.
7. Сухинов А.И., Чистяков А.Е. Параллельная реализация трехмерной модели гидродинамики мелководных водоемов на супервычислительной системе // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. – 2012. – Т. 13. – С. 290–297.
8. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежной зоне мелководных водоемов // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, № 12. – С. 65–82.
9. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежных водных системах на многопроцессорной вычислительной системе // Вычислительные методы и программирование. – 2014. – 15. – С. 610–620.
10. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Семенякина А.А., Никитина А.В. Параллельная реализация задач транспорта веществ и восстановления донной поверхности на основе схем повышенного порядка точности // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2015. – Т. 16, № 2. – С. 256–267.
11. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Тимофеева Е.Ф., Шишениа А.В. Математическая модель расчета прибрежных волновых процессов // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 8. – С. 32–44.
12. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Шишениа А.В. Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, № 11. – С. 53–64.
13. Чистяков А.Е., Семенякина А.А. Применение методов интерполяции для восстановления донной поверхности // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. – № 4. – С. 21.

### References

1. Nikitina A.V. Issledovanie modelej biologicheskoj kine-tiki // Izvestija TRTU. 2005. no. 9(53). pp. 213.
2. Nikitina A.V., Lozovskaja K.A. Chislennoe modelirovanie processov vzaimodejstviya planktona i populjicii promyslovoj ryby pelengas // Izvestija JuFU. Tehniceskie nauki. 2011. no. 8. pp. 98–103.
3. Semenjajkina A.A. Shemy povyshennogo porjadka tochnosti dlja zadach diffuzii-konvekcii // Informatika, vychislitel'naja tehnika i inzhenernoe obrazovanie. 2013. no. 4 (15). pp. 18–29.
4. Suhinov A.I., Nikitina A.V., Peskova O.Ju. Matematicheskoe modelirovanie processov rasprostraneniya zagraznenij i jevoljucii fitoplanktona primenitelno k akvatorii Taganrogskogo zaliva // Izvestija TRTU. 2001. no. 2(20). pp. 32–36.
5. Suhinov A.I., Nikitina A.V., Chistjakov A.E. Modelirovanie scenarija biologicheskoj rehabilitacii Azovskogo morja // Matematicheskoe modelirovanie, 2012. T. 24. no. 9. pp. 3–21.
6. Suhinov A.I., Nikitina A.V., Chistjakov A.E., Semenov I.S. Matematicheskoe modelirovanie uslovij formirovanija zamorov v melkovodnyh vodoemah na mnogoprocessornoj vychislitel'noj sisteme // Vychislitel'nye metody i programmirovanie. 2013. T. 14. pp. 103–112.
7. Suhinov A.I., Chistjakov A.E. Parallelnaja realizacija trehmernoj modeli gidrodinamiki melkovodnyh vodoemov na supervychislitel'noj sisteme // Vychislitel'nye metody i programmirovanie: Noveye vychislitel'nye tehnologii. 2012. T. 13. pp. 290–297.
8. Suhinov A.I., Chistjakov A.E., Procenko E.A. Matematicheskoe modelirovanie transporta nanosov v pribrezhnoj zone melkovodnyh vodoemov // Matematicheskoe modelirovanie. 2013. T. 25, no. 12. pp. 65–82.
9. Suhinov A.I., Chistjakov A.E., Procenko E.A. Matematicheskoe modelirovanie transporta nanosov v pribrezhnyh vodnyh sistemah na mnogoprocessornoj vychislitel'noj sisteme // Vychislitel'nye metody i programmirovanie. 2014. 15. pp. 610–620.
10. Suhinov A.I., Chistjakov A.E., Semenjajkina A.A., Nikitina A.V. Parallelnaja realizacija zadach transporta veshhestv i vosstanovlenija donnoj poverhnosti na osnove shem povyshennogo porjadka tochnosti // Vychislitel'nye metody i programmirovanie: noveye vychislitel'nye tehnologii. 2015. T. 16, no. 2. pp. 256–267.
11. Suhinov A.I., Chistjakov A.E., Timofeeva E.F., Shishenja A.V. Matematicheskaja model rascheta pribrezhnyh volnovykh processov // Matematicheskoe modelirovanie. 2012. T. 24, no. 8. pp. 32–44.
12. Suhinov A.I., Chistjakov A.E., Shishenja A.V. Ocenka pogreshnosti reshenija uravnenija diffuzii na osnove shem s vesami // Matematicheskoe modelirovanie. 2013. T. 25, no. 11. pp. 53–64.
13. Chistjakov A.E., Semenjajkina A.A. Primenenie metodov interpoljicii dlja vosstanovlenija donnoj poverhnosti // Izvestija JuFU. Tehniceskie nauki. 2013. no. 4. pp. 21.