УДК 621.865.8

ПОСТРОЕНИЕ ОБРАТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ РОБОТОВ МЕТОДАМИ СТРУКТУРНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ

[1]Рыбак Л.А., [1]Гапоненко Е.В., [2]Чичварин А.В.

[1]*Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова, Белгород, e-mail: rl_bgtu@intbel.ru;*

[2]*Старооскольский технологический институт (филиал) МИСиС, Старый Оскол, e-mail: ch_alexx79@rambler.ru*

В статье рассмотрена обратная модель динамики параллельного робота, позволяющая по заданным траектории движения, скоростям и ускорениям рабочего органа определить силы в приводных кинематических парах. Для получения обратной динамической модели такого робота выделено две подсистемы: подвижная платформа и опоры. Динамика подвижной платформы определяется как функция ее декартовых координат, а динамика опор определяется как функции их обобщенных координат. Для проецирования динамических характеристик платформы в пространство приводных кинематических пар использован транспонированный якобиан механизма, а для проецирования динамических характеристик опор в пространство приводных кинематических пар – якобиан, выражающий связь между этими пространствами. По результатам моделирования проведен расчет динамических характеристик. Построены графики координат *x*, *y* рабочего органа, полученные для заданных ускорений и усилий в шарнирах при траектории, рассчитанной с применением обратной динамической модели.

Ключевые слова: параллельный робот, обратная динамическая модель, кинематический якобиан, математическая модель

THE CONSTRUCTION OF THE INVERSE DYNAMIC MODEL OF PARALLEL ROBOTS STRUCTURAL DECOMPOSITION METHODS

[1]Rybak L.A., [1]Gaponenko E.V., [2]Chichvarin A.V.

[1]*Belgorod State technological university of V.G. Shukhov, Belgorod, e-mail: rl_bgtu@intbel.ru;*

[2]*Stary Oskol Technological Institute (branch) MISiS, Stary Oskol, e-mail: ch_alexx79@rambler.ru*

The article describes the inverse dynamic model of parallel robot, allowing for a given trajectory, the velocities and accelerations of the working body to determine the driving forces in the kinematic pairs. For inverse dynamic model of the robot allocated two subsystems: the mobile platform and supports. The dynamics of the mobile platform is defined as a function of its Cartesian coordinates, and the dynamics of support is determined as a function of the generalized coordinates. To project the dynamic characteristics of the platform in the space of the drive kinematics pairs used transposed Jacobian mechanism and to project the dynamic characteristics of the supports into the space of the drive kinematic pairs – Jacobian, which expresses the relationship between these spaces.. As a result of simulation calculated the dynamic performance. The graghs of *x*, *y* coordinates of the working body, obtained for given accelerations, and effort in the hinges with the trajectory calculated using the inverse dynamic model.

Keywords: parallel robot, inverse dynamic model, kinematic Jacobian, mathematical model

Динамика играет важную роль в управлении роботами. Существуют два типа динамических моделей [5]:

– обратная задача динамики: по заданным траектории движения, скоростям и ускорениям $\mathbf{X}$, $\mathbf{W}$, $\dot{\mathbf{W}}$ рабочего органа определить силы в приводных кинематических парах τ. В общем виде обратная задача динамики формулируется как

$$\mathbf{M}(\mathbf{X})\dot{\mathbf{W}} + \mathbf{C}\big(\mathbf{W}, \mathbf{X}, (\Theta)\big) + \mathbf{G} = \tau,$$

где $\mathbf{M}$ – положительно определенная матрица инерции; $\mathbf{G}$ – гравитационная составляющая; $\mathbf{C}$ – центробежная и кориолисова составляющая. Эта формула полностью аналогична формуле для последовательных роботов;

– прямая задача динамики: по заданным силам/моментам в приводных кинематических парах определить траекторию, скорости и ускорения рабочего органа.

Рассмотрим параллельный робот, основание и подвижная платформа которого соединены посредством 6 опор, присоединенных к основанию посредством универсальных шарниров, а к подвижной платформе – посредством сферических шарниров (рис. 1). Опоры приводятся в движение посредством призматических шарниров.

Для получения обратной динамической модели такого робота разобьем его на две подсистемы: подвижную платформу и опоры.

Динамика подвижной платформы определяется как функция ее декартовых координат (положения, скоростей и ускорений), а динамика опор определяется как функции их обобщенных координат $(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i)$. Усилия в приводных кинематических парах могут быть получены посредством проецирования этой динамической модели на оси приводных кинематических пар.

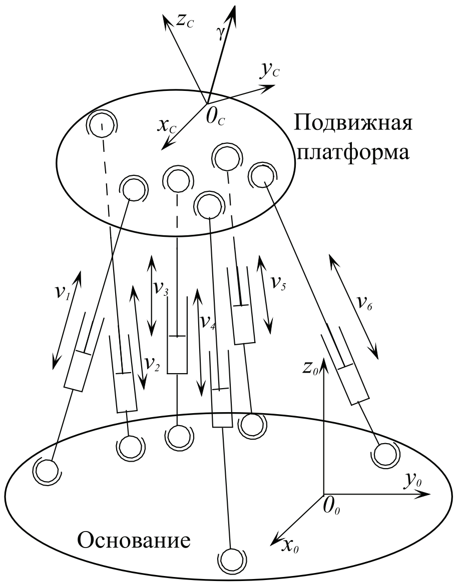

Рис. 1. Схема параллельного робота

Для проецирования динамических характеристик платформы в пространство приводных кинематических пар умножим их на транспонированный якобиан механизма, а для проецирования динамических характеристик опор в пространство приводных кинематических пар используем якобиан, выражающий связь между этими пространствами. Тогда динамическая модель механизма параллельной структуры будет описываться следующим уравнением:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{J}_p^{\mathrm{T}} \mathbf{F}_p + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_a} \right)^{\mathrm{T}} \mathbf{H}_i, \qquad (1)$$

где $\mathbf{F}_p$ – вектор обобщенных сил и моментов, приложенных к платформе; $\mathbf{J}_p$ – якобиан механизма размерностью $6 \times n$, выражающий зависимость поступательных и угловых скоростей платформы от скоростей движения приводных кинематических пар,

$$\mathbf{V}_p = \mathbf{J}_p \dot{\mathbf{q}}_a; \qquad (2)$$

$\mathbf{H}_i$ – обратная динамическая модель опоры i, представленная в виде функции от $(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i)$. Она может быть получена в терминах положений, скоростей и ускорений платформы из обратной кинематической модели опор.

Если число степеней свободы механизма меньше 6, вектор $\mathbf{V}_p$ может быть редуцирован до вектора $\mathbf{V}_r$, соответствующего n независимых степеней свободы механизма. Тогда $\mathbf{V}_p$ может быть выражен через $\mathbf{V}_r$ как

$$\mathbf{V}_p = \mathbf{S}\mathbf{V}_r, \qquad (3)$$

где

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{J}_r \dot{\mathbf{q}}_a, \qquad (4)$$

и выражение (3) может быть переписано в виде

$$\mathbf{V}_p = \mathbf{S}\mathbf{J}_r \dot{\mathbf{q}}_a, \qquad (5)$$

где $\mathbf{J}_r$ – редуцированный кинематический якобиан механизма размерностью $n \times n$. Заметим, что при $n = 6$ матрица $\mathbf{S}$ представляет собой единичную матрицу размерностью 6×6. Для вычисления $\mathbf{J}_r$ следует инвертировать $\mathbf{J}_r^{-1}$.

В общем случае, когда платформа имеет 6 6 степеней свободы, $\mathbf{F}_p$ вычисляется посредством уравнения Ньютона – Эйлера [2]:

$$\mathbf{F}_p = \mathbf{I}_s \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_p - \mathbf{g} \\ \dot{\omega}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_p \times (\omega_p \times \mathbf{MS}_p) \\ \omega_p \times (\mathbf{I}_p \omega_p) \end{bmatrix}, \qquad (6)$$

где $\mathbf{V}_p = \left[\mathbf{v}_p^{\mathrm{T}} \ \omega_p^{\mathrm{T}} \right]^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{v}_p$ – линейные скорости центра системы координат XYZ_p, связанной с платформой; ω_p – угловые скорости системы координат XYZ_p; $\dot{\mathbf{V}}_p$ – ускорение платформы, получаемое путем дифференцирования (5)

$$\dot{\mathbf{V}}_p = \dot{\mathbf{S}}\, \mathbf{V}_r + \mathbf{S}\dot{\mathbf{V}}_r, \qquad (7)$$

где $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения, разложенное по осям системы координат XYZ_p; $\mathbf{I}_p$ – матрица инерции платформы относительно центра системы координат XYZ_p; $\mathbf{MS}_p$ – вектор начальных моментов платформы относительно системы координат XYZ_p:

$$\mathbf{MS}_p = \left[MX_p \quad MY_p \quad MZ_p \right]^{\mathrm{T}}; \qquad (8)$$

$\mathbf{I}_s$ – пространственная матрица инерции платформы:

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} M_p \mathbf{E}_3 & -\hat{\mathbf{MS}}_p \\ \hat{\mathbf{MS}}_p & \mathbf{I}_p \end{bmatrix}; \qquad (9)$$

M_p – масса платформы; $\mathbf{E}_3$ – единичная матрица размерностью 3×3; $\hat{\mathbf{MS}}_p$ – кососимметричная матрица размерностью 3×3, соответствующая вектору $\mathbf{MS}_p$

$$\hat{\mathbf{MS}}_p = \begin{bmatrix} 0 & -MZ_p & MY_p \\ MZ_p & 0 & -MX_p \\ -MY_p & MX_p & 0 \end{bmatrix}. \qquad (10)$$

Вычисление $\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_a}$ можно произвести по следующей формуле, вытекающей из параллельной структуры механизма:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_a} = \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}{\partial \mathbf{v}_i} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{V}_p} \frac{\partial \mathbf{V}_p}{\partial \mathbf{V}_r} \frac{\partial \mathbf{V}_r}{\partial \dot{\mathbf{q}}_a}, \qquad (11)$$

где $\mathbf{v}_i$ – вектор линейных скоростей, сообщаемых i-й опорой платформе.

Выражение (11) можно переписать как

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_a} = \mathbf{J}_i^{-1} \mathbf{J}_{vi} \, \mathbf{S} \mathbf{J}_r, \qquad (12)$$

где $\mathbf{J}_i$ – кинематический якобиан опоры i, соответствующий выражению

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{J}_i \dot{\mathbf{q}}_i. \qquad (13)$$

Методы вычисления $\mathbf{J}_i$ широко известны [2], $\mathbf{J}_{vi}$ определяет соотношение между $\mathbf{v}_i$ и $\mathbf{V}_p$,

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{J}_{vi} \, \mathbf{V}_p. \qquad (14)$$

В конечном итоге из (1) и (11) получаем следующую компактную форму обратной модели динамики механизма параллельной структуры:

$$\Gamma = \mathbf{J}_r^{\mathrm{T}} \mathbf{S}^{\mathrm{T}} \left[\mathbf{F}_p + \sum_{i=1}^{m} \mathbf{J}_{vi}^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_i^{-\mathrm{T}} \mathbf{H}_i \right];$$

$$\Gamma = \mathbf{J}_p^{\mathrm{T}} \left[\mathbf{F}_p + \sum_{i=1}^{m} \mathbf{J}_{vi}^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_i^{-\mathrm{T}} \mathbf{H}_i \right]. \qquad (15)$$

Для вычисления $\mathbf{H}_i$ можно использовать множество методов. Для уменьшения вычислительной сложности задачи целесообразным видится применение рекурсивного алгоритма Ньютона – Эйлера [4].

С учетом (12) и того, что активные переменные независимы, выражение обратной модели динамики может быть записано в виде

$$\Gamma = \mathbf{H}^a + \mathbf{J}_p^{\mathrm{T}} \left[\mathbf{F}_p + \sum_{i=1}^{m} \mathbf{J}_{vi}^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_i^{-\mathrm{T}} (:, \mathbf{p}_i) \mathbf{H}_i^p \right], \qquad (16)$$

где $\mathbf{H}^a$ – вектор приводных сил/моментов всех опор, соответствующий компонентам $\mathbf{H}_i$, описывающим приводные шарниры ($i = 1, ..., m$); $\mathbf{p}_i$ – номера столбцов, соответствующих силам/моментам пассивных шарниров опоры i; $\mathbf{H}_i^p$ – вектор сил/моментов в пассивных шарнирах опоры i.

Теперь уравнение (16) может быть переписано в следующей форме:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^a \\ \mathbf{H}_2^a \\ \vdots \\ \mathbf{H}_m^a \end{bmatrix} + \mathbf{J}_p^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{F}_p + \left[\mathbf{J}_{v1}^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_1^{-\mathrm{T}} (:, \mathbf{p}_1) \quad \mathbf{J}_{v2}^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_2^{-\mathrm{T}} (:, \mathbf{p}_2) \quad \ldots \quad \mathbf{J}_{vm}^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_m^{-\mathrm{T}} (:, \mathbf{p}_m) \right] \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^p \\ \mathbf{H}_2^p \\ \vdots \\ \mathbf{H}_m^p \end{bmatrix} \right). \qquad (17)$$

Такая форма существенно упрощает модель, позволяя избежать излишних умножений активных сил/моментов на проективную матрицу $\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_a}$. Кроме того, возникает преимущество в возможности расчета кинематики и динамики опор параллельно на m процессорах.

Расчет обратной динамической модели требует вычисления обратного якобиана опор и кинематического якобиана механизма.

В связи с этим разработан новый метод расчета обратного кинематического якобиана механизма с использованием обратных якобианов его опор.

Кинематический якобиан механизма представляет собой соотношение между скоростями приводных кинематических пар $\dot{\mathbf{q}}_a$ и пространственными скоростями платформы $\mathbf{V}_r$

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{J}_r \dot{\mathbf{q}}_a. \qquad (18)$$

В общем случае $\mathbf{J}_r$ вычисляется путем инвертирования матрицы обратного якобиана $\mathbf{J}_r^{-1}$, так как ее проще вычислить.

Для вычисления $\mathbf{J}_r^{-1}$ очевидным решением является использование соотношений между скоростями в кинематических парах и скоростями платформы через опору i с учетом перехода от неподвижной системы координат, связанной с основанием, к подвижной системе координат, связанной с платформой [3]:

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{J}_{ci} \dot{\mathbf{q}}_{ci}, \qquad (19)$$

где $\dot{\mathbf{q}}_{ci}$ – вектор скоростей всех (включая пассивные) кинематических пар опоры i, от платформы к звену, соединенному с основанием; $\mathbf{J}_{ci}$ – кинематический якобиан последовательного перехода от неподвижной системы координат, связанной с основанием, к системе координат, связанной с подвижной платформой, через опору i.

Решим (18) относительно скорости приводной кинематической пары опоры i:

$$\dot{\mathbf{q}}_{ai} = \mathbf{L}_{ci} (\mathbf{q}_{ci}) \mathbf{V}_r. \qquad (20)$$

Тогда обратный кинематический якобиан механизма может быть получен путем группировки $\mathbf{L}_{ci}$ для всех опор:

$$\mathbf{J}_r^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{c1} \\ \cdots \\ \mathbf{L}_{cm} \end{bmatrix}. \qquad (21)$$

В соотношении (18) используются данные о пассивных кинематических парах опоры i. С целью упрощения расчетов эти переменные можно исключить, воспользовавшись соотношением между выражениями для скорости в точке соединения опоры с подвижной платформой $\mathbf{v}_i$, выраженной, с одной стороны, в терминах $\mathbf{V}_r$

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{J}_{vi}\,\mathbf{S}\mathbf{V}_r, \qquad (22)$$

и, с другой стороны, в терминах $\dot{\mathbf{q}}_i$

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{J}_i \dot{\mathbf{q}}_i, \qquad (23)$$

где $\dot{\mathbf{q}}_i$ – вектор скоростей в кинематических парах опоры i без учета пассивной кинематической пары, соединяющей опору с основанием; $\mathbf{J}_i$ – кинематический якобиан опоры i от неподвижного основания к точке соединения с платформой; $\mathbf{J}_{vi}$ – якобиан, преобразующий скорость платформы в скорость в точке соединения ее опорой i, связанный исключительно с этой опорой.

Решение уравнения (23) для активной кинематической пары опоры i дает:

$$\dot{\mathbf{q}}_{ai} = \mathbf{L}_i\left(\mathbf{q}_i\right)\mathbf{V}_i. \qquad (24)$$

Затем, с помощью (22) и перегруппировки для всех опор, получаем

$$\dot{\mathbf{q}}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1\,\mathbf{J}_{v1} \\ \cdots \\ \mathbf{L}_m\,\mathbf{J}_{vm} \end{bmatrix} \mathbf{S}\mathbf{V}_r \qquad (25)$$

и, следовательно,

$$\mathbf{J}_r^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1\,\mathbf{J}_{v1} \\ \cdots \\ \mathbf{L}_m\,\mathbf{J}_{vm} \end{bmatrix} \mathbf{S}. \qquad (26)$$

Для робота с шестью степенями подвижности (рис. 1) проведен расчет динамических характеристик [1], исходными данными для которого являются ускорения рабочего органа: $\gamma_x = 1$ см/с^2, $t \in [0, 2]$; $\gamma_x = -1$ см/с^2, $t \in [2, 4]$; $\gamma_y = 5$ см/с^2, $t \in [0, 4]$ другие компоненты вектора ускорений равны нулю.

Начальные линейные и угловые скорости рабочего органа равны нулю, начальное положение [0; 0; 53,3], начальная ориентация [0; 0; 0]. Координаты, x, y рабочего органа представлены на рис. 2, усилия в шарнирах – на рис 3.

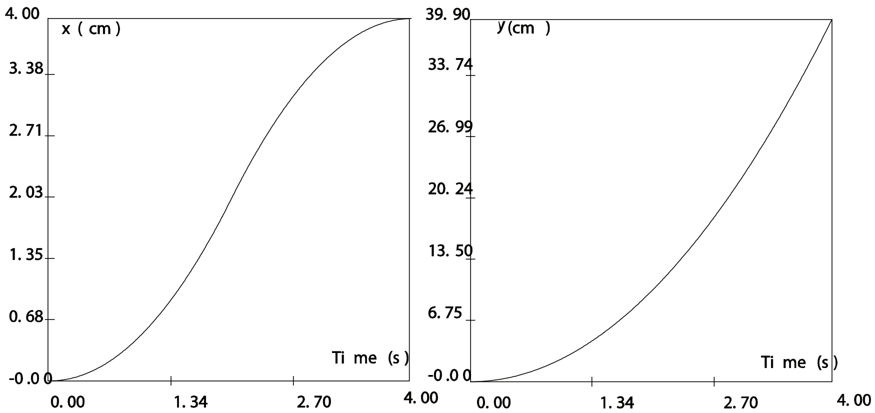

Рис. 2. Координаты x, y рабочего органа, полученные для заданных ускорений

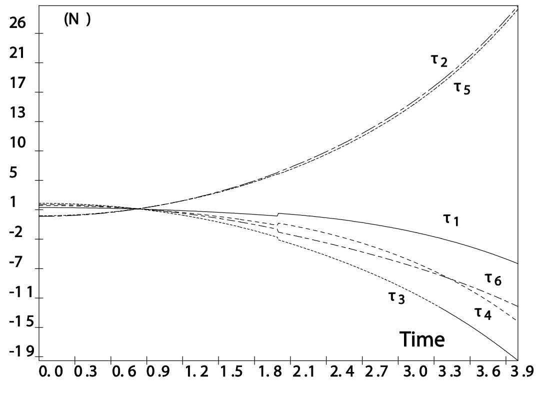

Рис. 3. Усилия в шарнирах при траектории, рассчитанной с применением обратной модели динамики

Предположим, что рабочий орган осуществляет вертикальное перемещение из начального положения. Обратная задача динамики показывает, что в этом случае все линейные приводы должны развивать одинаковое усилие, равное 1,65 65 Н. Однако ошибка в модели одного из приводов приводит к реальным усилиям

$$\tau_1 = 1{,}6665\ \text{Н};\ \tau_i = 1{,}65\ \text{Н};$$

$$\forall i \in [2, 6].$$

Начальные линейные и угловые скорости примем равными нулю, начальное положение рабочего органа (0; 0; 53,3), все углы Эйлера равны нулю.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № № 14-01-00761.

Список литературы

1. Магергут В.З. Подходы к построению дискретных моделей непрерывных технологических процессов для синтеза управляющих автоматов / В.З. Магергут, В.А. Игнатенко, А.Г. Бажанов, В.Г. Шаптала // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. – 2013. – № 2. – С. 100–102.

2. Ait-Ahmed M. Contribution a la modelisation geometrique et dynamique des robots paralleles // Ph.D. Thesis, Universit´e Paul Sabatier, 1993. – P. 192–194.

3. Angeles J. Fundamentals of Robotic Mechanical Systems // Springer-Verlag. – 2002. – P. 445.

4. Bhattacharya S., Hatwal H., and Ghosh A. An on-line estimation scheme for generalized Stewart platform type parallel manipulators // Mechanism and Machine Theory. – 1997. – Vol. 1. – № 32. – P. 79–89.

5. Merlet J.-P. Parallel Robots. – 2nd ed., – Springer Dordrecht, The Netherlands, 2006. – P. 178.

References

1. Magergut V.Z. Podhody k postroeniju diskretnyh modelej nepreryvnyh tehnologicheskih processov dlja sinteza upravljajushhih avtomatov / V.Z. Magergut, V.A. Ignatenko, A.G. Bazhanov, V.G. Shaptala // Vestnik Belgorodskogo gosudarstvennogo tehnologicheskogo universiteta im. V.G. Shuhova. 2013. no. 2. pp. 100–102.

2. Ait-Ahmed M. Contribution a la modelisation geometrique et dynamique des robots paralleles // Ph.D. Thesis, Universit´e Paul Sabatier, 1993. pp. 192–194.

3. Angeles J. Fundamentals of Robotic Mechanical Systems // Springer-Verlag. 2002. pp. 445.

4. Bhattacharya S., Hatwal H., and Ghosh A. An on-line estimation scheme for generalized Stewart platform type parallel manipulators // Mechanism and Machine Theory. 1997. Vol. 1. no. 32. pp. 79–89.

5. Merlet J.-P. Parallel Robots. 2nd ed. Springer Dordrecht, The Netherlands, 2006. pp. 178.