

УДК 519.7(045)

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В СЛОЕ ЖИДКОСТИ, ПОКРЫТОЙ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНОЙ, НАХОДЯЩЕЙСЯ НА ПОРИСТОМ ОСНОВАНИИ

Лемясева Н.А.

ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный педагогический институт имени М.Е. Евсевьева»,
Саранск, e-mail: nadegdalem@mail.ru

На наш взгляд, эта тема очень важна для современной науки. Идея статьи заключается в построении модели распространения поверхностных волн в слое жидкости, покрытой тонкой упругой пластиной, на пористом основании. Первым, что необходимо рассмотреть, является пористая среда, ограниченная снизу твердой непроницаемой стенкой и насыщенная этой же жидкостью целиком. На поверхности жидкости находится тонкая упругая пластина. Согласно этому построена математическая модель распространения поверхностных волн в слое жидкости, покрытой тонкой упругой пластиной, находящейся на пористом основании. В статье представлен вывод дисперсионного уравнения распространения волн из решения соответствующей однородной системы линейных уравнений, полученной из граничных условий. Основными характеристиками распространения поверхностных волн являются частота и декремент затухания. Построены графики изменения декремента затухания и частоты в зависимости от толщины слоя жидкости и пористого основания, сделаны выводы. Из этого всего следует, что эта тема очень интересна для исследования.

Ключевые слова: поверхностные волны, тонкая упругая пластина, декремент затухания, частота

THE PROPAGATION OF SURFACE WAVES IN THE FLUID LAYER, COVERED BY A THIN ELASTIC PLATE, LOCATED ON THE POROUS BASE

Lemyaseva N.A.

Mordovian State Pedagogical Institute named after M.E. Evsevev, Saransk, e-mail: nadegdalem@mail.ru

To my mind of thinking this theme is very important for modern science. The idea of my article is considers the wave propagation in the surface layer of heavy incompressible homogeneous fluid in a rigid porous base. The first thing to be consider is Porous medium bounded from below by a solid impermeable wall and is saturated with the same fluid as a whole. On a liquid surface is a thin elastic plate. According to this the dispersion equation of propagation of waves, constructed graphs of damping ratio and frequency depending on the thickness of the fluid layer and porous substrates. Taking everything into account I'd like to say, that this theme very interesting for me. And I'd like to study it in my future.

Keywords: surface waves, thin elastic plate, damping factor, frequency

Система координат выбирается так, что ось z направлена вертикально вверх, а плоскость $z = 0$ совпадает с поверхностью раздела свободной жидкости и пористой среды, насыщенной жидкостью. Толщины плоских слоев пористой среды и свободной жидкости равны h_1 и h_2 соответственно. Величины, относящиеся к насыщенной пористой среде, обозначим индексом 1, а к свободной жидкости – 2.

Уравнения движения жидкости в пористой среде запишем в виде [1, 2]

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} &= -\nabla p_1 + \rho \bar{g} - \frac{\eta}{K} \bar{u}_1; \\ \operatorname{div} \bar{u}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ε – пористость матрицы; ρ , η – плотность и динамическая вязкость жидкости; K – коэффициент проницаемости; $\bar{u}_1$ – макроскопическая скорость фильтрации; p_1 – давление; $\bar{g}$ – ускорение свободного падения.

Потенциал скорости $\varphi(x, y, z, t)$ ($\bar{u}_2 = \nabla \varphi$) в слое свободной жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа [2]

$$\Delta \varphi = 0. \quad (2)$$

Применяя к первому уравнению (1) операцию **rot rot** и проецируя получившееся уравнение на ось z , получим уравнение для вертикальной компоненты скорости u_{1z}

$$\frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_{1z} = -\frac{\eta}{K} \Delta u_{1z}. \quad (3)$$

Граничные условия на поверхностях раздела имеют вид (1), (4)

$$u_{1z} \big|_{z=-h_1} = 0; \quad u_{1z} \big|_{z=0} = u_{2z} \big|_{z=0}; \quad (4)$$

$$p_1 \big|_{z=0} = p_2 \big|_{z=0}.$$

При $z = h_2 + \xi(x, y, t)$:

$$\rho_0 h_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -D \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} - \rho g \xi + p_{2w}. \quad (4')$$

Здесь ξ – смещение точек пластины в вертикальном направлении;
 $D = \frac{h_0^3 E}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость

пластины; ρ_0 – плотность материала пластины; h_0 – толщина пластины; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона.

Первое из условий (4) – это условие непротекания на твердой стенке, ограничивающей снизу пористую среду; второе – условие непрерывности расхода на границе раздела жидкость – пористая среда, насыщенная жидкостью; третье – непрерывность давления на этой же границе; четвертое условие является следствием непрерывности давления на свободной возмущенной поверхности слоя жидкости с учетом линейризованного интеграла Кош – Лагранжа [3] и кинематического условия

$$u_{2z} = \frac{\partial \xi}{\partial t},$$

где $\xi(x, y, t)$ – смещение точек свободной поверхности в вертикальном направлении.

Решение уравнений (2), (3) с граничными условиями (4) и (4') ищем в виде

$$u_{1z}(x, y, z, t) = U(z) \exp[-\gamma t + i(k_1 x + k_2 y)]; \quad (5)$$

$$\xi = \xi_0 \exp(-\gamma t + i k x);$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \Phi(z) \exp[-\gamma t + i(k_1 x + k_2 y)];$$

$$\gamma = \text{Re}(\gamma) + i \text{Im}(\gamma); \quad |\text{Im}(\gamma)| = \omega,$$

$$\left(\frac{\eta}{K} - \frac{\rho \gamma}{\varepsilon} \right) c_1 + \left(\frac{\rho \gamma}{\varepsilon} - \frac{\eta}{K} \right) c_2 - \rho \gamma k (c_3 + c_4) = 0;$$

$$c_3 + c_4 \left[\left(\frac{\gamma^2}{gk} + 1 + F \right) \left(\frac{\gamma^2}{gk} - 1 - F \right)^{-1} \right] \cdot \exp(2kh_2) = 0.$$

Приравнявая определитель системы (9) к нулю, находим дисперсионное уравнение для поверхностных волн

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma^3}{g} \left[\rho \left(a_1 - \frac{a_2}{\varepsilon} \right) + k \rho_0 h_0 \left(\frac{a_4}{\varepsilon} - a_2 \right) \right] - \gamma^2 \frac{\eta}{K \rho g} (k \rho_0 h_0 a_4 - \rho a_2) + \\ & + \gamma \frac{k \rho}{g} \left(g + \frac{Dk^4}{\rho} \right) \left(\frac{a_4}{\varepsilon} - a_2 \right) - \frac{\eta k}{Kg} \left(g + \frac{Dk^4}{\rho} \right) a_4 = 0; \\ & a_1 = \exp(2kh_1) + \exp(2kh_2) - \exp(2k(h_1 + h_2)) - 1; \\ & a_2 = \exp(2kh_1) + \exp(2kh_2) + \exp(2k(h_1 + h_2)) + 1; \\ & a_3 = \exp(2kh_1) - \exp(2kh_2) + \exp(2k(h_1 + h_2)) - 1; \\ & a_4 = \exp(2kh_1) - \exp(2kh_2) - \exp(2k(h_1 + h_2)) + 1. \end{aligned} \quad (10)$$

где k_1, k_2 – вещественные волновые числа, характеризующие периодичность волновых решений (5) по направлениям x и y ; ω – частота колебаний; $\text{Re}(\gamma) = \beta$ – декремент затухания колебаний.

Подставляя (5) в (2), (3), находим

$$\Phi'' - k^2 \Phi = 0; \quad (6)$$

$$\left(\gamma - \frac{\eta \varepsilon}{\rho K} \right) (U'' - k^2 U) = 0; \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2,$$

где штрих означает дифференцирование по z .

Граничные условия (4) и (4') для амплитуд $U(x), \Phi(z)$ имеют вид

$$U(z) = 0 \quad (z = -h_1); \quad U(z) = \Phi'(z) \quad (z = 0); \quad (7)$$

$$\left(\frac{\rho \gamma}{\varepsilon} - \frac{\eta}{K} \right) U'(z) - \rho \gamma \Phi'(z) = 0 \quad (z = 0);$$

$$\frac{\gamma^2}{g} \Phi(z) + \left[1 + \frac{\rho_0 h_0 \gamma^2}{\rho g} + \frac{Dk^4}{\rho g} \right] \Phi'(z) = 0 \quad (z = h_2).$$

Решением системы дифференциальных уравнений (6) являются функции

$$U(z) = c_1 \exp(-kz) + c_2 \exp(kz); \quad (8)$$

$$\Phi(z) = c_3 \exp(-kz) + c_4 \exp(kz).$$

Граничные условия (7) с учетом (8) приводят к однородной системе алгебраических уравнений

$$c_1 \exp(2kh_1) + c_2 = 0;$$

$$c_1 + c_2 + k(c_3 - c_4) = 0; \quad (9)$$

Уравнение (10) кубическое относительно γ с действительными коэффициентами, которое может быть приведено к «неполному» кубическому уравнению [5]. Запишем для этого уравнение (10) в виде

$$\gamma^3 + a\gamma^2 + b\gamma + c = 0, \quad (11)$$

где коэффициенты a, b, c – действительные числа, причем

$$\begin{aligned} a &= \frac{\eta}{K\rho}(\rho a_2 - k\rho_0 h_0 a_4) \left[\rho \left(a_1 - \frac{a_2}{\varepsilon} \right) + k\rho_0 h_0 \left(\frac{a_4}{\varepsilon} - a_2 \right) \right]^{-1}; \\ b &= k\rho \left(g + \frac{Dk^4}{\rho} \right) \left(\frac{a_4}{\varepsilon} - a_2 \right) \left[\rho \left(a_1 - \frac{a_2}{\varepsilon} \right) + k\rho_0 h_0 \left(\frac{a_4}{\varepsilon} - a_2 \right) \right]^{-1}; \\ c &= -\frac{\eta k}{K} \left(g + \frac{Dk^4}{\rho} \right) a_4 \left[\rho \left(a_1 - \frac{a_2}{\varepsilon} \right) + k\rho_0 h_0 \left(\frac{a_4}{\varepsilon} - a_2 \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Величину γ представим в виде $\gamma = y - \frac{a}{3}$. Тогда получим уравнение относительно неизвестного y , которое не содержит квадрата этого неизвестного:

$$y^3 + py + q = 0, \quad (13)$$

$$\text{где } p = -\frac{a^2}{3} + b; \quad q = 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c.$$

Выражение

$$D = -108 \left[\left(\frac{p}{3} \right)^3 + \left(\frac{q}{2} \right)^2 \right] \quad (14)$$

называется дискриминантом уравнения (13). При условии $D < 0$ в формуле Кардано [5] под знаком каждого из кубичных ра-

дикалов оказывается действительное число. Кубический корень из действительного числа имеет одно действительное и два комплексно-сопряженных числа. В этом случае существует колебательное движение жидкости.

При условии $D \geq 0$ комплексно-сопряженных корней нет, т.е. в этом случае колебательное движение отсутствует, поэтому этот случай не рассматривается при решении уравнения (13), т.к. при этом волны отсутствуют.

На рис. 1 приведены графики рассчитанных зависимостей декремента затухания β от волнового числа k при фиксированной толщине пористого слоя $h_1 = 10$ см и толщине тонкой упругой пластины $h_0 = 0,1$ см для различных значений толщины свободной жидкости $h_2 = 5, 10, 25, 50$.

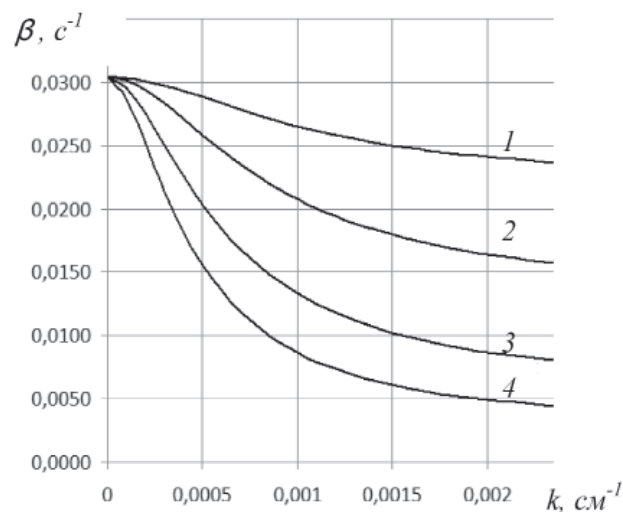


Рис. 1. Зависимость β от k при $h_1 = 10$ см, $h_0 = 0,1$ см и различных значениях толщины свободной жидкости: 1 – $h_2 = 5$ см; 2 – $h_2 = 10$ см; 3 – $h_2 = 25$ см; 4 – $h_2 = 50$ см

Из рис. 1 видно, что при увеличении волнового числа k при заданном значении h_2 модуль декремента затухания уменьшается, т.е. более длинные волны затухают быстрее коротких.

На рис. 2 приведены графики рассчитанных зависимостей частоты ω от волнового числа k при фиксированной толщине пористого слоя $h_1 = 10$ см и толщине тонкой упругой пластины $h_0 = 0,1$ см для различных значений толщины свободной жидкости $h_2 = 5, 10, 25, 50$.

Из рис. 2 видно, что при увеличении волнового числа k при заданном значении частота увеличивается.

На рис. 3 приведены графики рассчитанных зависимостей декремента затухания

β от волнового числа k при фиксированной толщине пористого слоя $h_2 = 10$ см и толщине тонкой упругой пластины $h_0 = 0,1$ см для различных значений толщины свободной жидкости $h_1 = 5, 10, 25, 50$.

Из рис. 3 видно, что при увеличении волнового числа k при заданном значении h_1 модуль декремента затухания увеличивается, т.е. более короткие волны затухают быстрее длинных.

На рис. 4 приведены графики рассчитанных зависимостей частоты ω от волнового числа k при фиксированной толщине пористого слоя $h_2 = 10$ см и толщине тонкой упругой пластины $h_0 = 0,1$ см для различных значений толщины свободной жидкости $h_1 = 5, 10, 25, 50$.

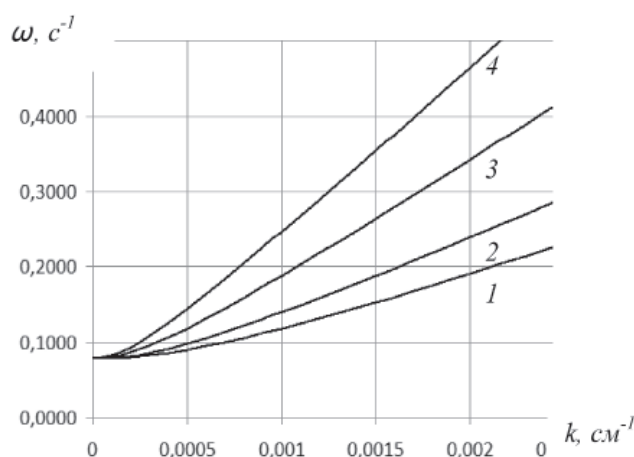


Рис. 2. Зависимость ω от k при $h_1 = 10$ см, $h_0 = 0,1$ см и различных значениях толщины свободной жидкости: 1 – $h_2 = 5$ см; 2 – $h_2 = 10$ см; 3 – $h_2 = 25$ см; 4 – $h_2 = 50$ см

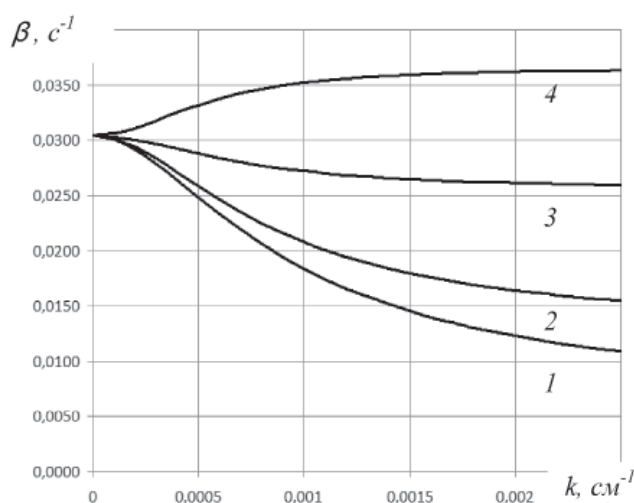


Рис. 3. Зависимость β от k при $h_2 = 10$ см, $h_0 = 0,1$ см и различных значениях толщины свободной жидкости: 1 – $h_1 = 5$ см; 2 – $h_1 = 10$ см; 3 – $h_1 = 25$ см; 4 – $h_1 = 50$ см

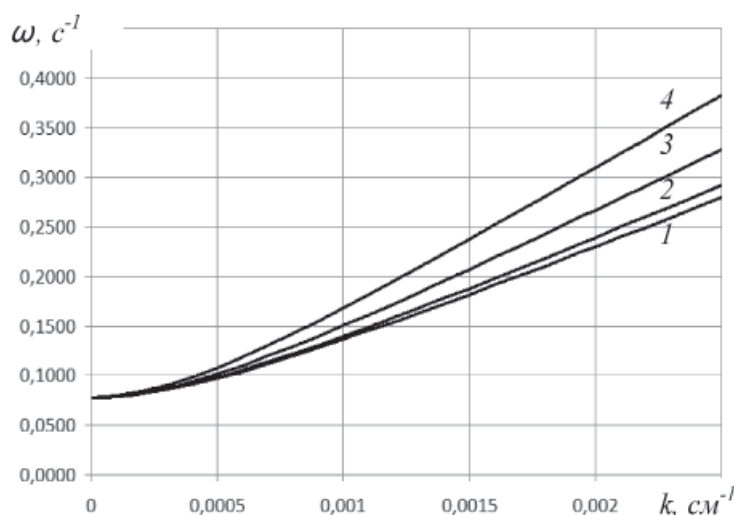


Рис. 4. Зависимость ω от k при $h_2 = 10$ см, $h_0 = 0,1$ см и различных значениях толщины свободной жидкости: 1 – $h_1 = 5$ см; 2 – $h_1 = 10$ см; 3 – $h_1 = 25$ см; 4 – $h_1 = 50$ см

Из рис. 4 видно, что при увеличении волнового числа k при заданном значении h_1 частота увеличивается.

Таким образом, исследовано распространение поверхностных волн в слое жидкости, покрытой тонкой упругой пластиной, находящейся на пористом основании. Получено дисперсионное уравнение распространения волн, построены графики изменения декремента затухания и частоты в зависимости от толщины слоя жидкости и пористого основания.

Работа выполнена в рамках гранта на проведение научно-исследовательских работ по приоритетным направлениям научной деятельности вузов-партнёров по сетевому взаимодействию (ФГБОУ ВПО ЧГПУ и МордГПИ) по теме: «Математическое моделирование поверхностных волн в средах, взаимодействующих с магнитным и электрическим полями».

Список литературы

1. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. – М.: Мир, 1964. – 350 с.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975. – 431 с.
3. Тактаров Н.Г. Конвекция намагничивающихся жидкостей в пористых средах // Магнитная гидродинамика. – 1981. – № 4. – С. 33–35.

4. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1976. – 573 с.

5. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. – М.: Наука, 1977. – 815 с.

References

1. Kollinz R. Tehenija zhidkostej cherez poristye materialy. M.: Mir, 1964. 350 p.
2. Kurosh A.G. Kurs vysshej algebrы. M.: Nauka, 1975. 431 p.
3. Taktarov N.G. Konvekciya namagnichivajushhihsja zhidkostej v poristyh sredah // Magnitnaja gidrodinamika. 1981. no. 4. pp. 33–35.
4. Sedov L.I. Mehanika sploshnoj sredy. M.: Nauka, 1976. – 573 p.
5. Sretenskij L.N. Teorija volnovyh dvizhenij zhidkosti. M.: Nauka, 1977. 815 p.

Рецензенты:

Свешников В.К., д.т.н., профессор кафедры физики и методики обучения физике, ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный педагогический институт имени М.Е. Евсевьева», г. Саранск;

Тактаров Н.Г., д.ф.-м.н., профессор кафедры математики и методики обучения математике, ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный педагогический институт имени М.Е. Евсевьева», г. Саранск.