

УДК 519.633

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТЕФАНА С НЕСКОЛЬКИМИ ГРАНИЦАМИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ МЕТОДОМ ЛОВЛИ ФРОНТА В УЗЕЛ СЕТКИ

<sup>1</sup>Хасанов М.К., <sup>2</sup>Столповский М.В.

<sup>1</sup>*Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,  
Стерлитамак, e-mail: hasanovmk@mail.ru;*

<sup>2</sup>*Уфимский государственный нефтяной технический университет,  
Уфа, e-mail: s\_maxim.pmm@mail.ru*

Представлен алгоритм численного решения задачи Стефана для задачи, в которой фазовые переходы реализуются в протяженной области. Представлено решение задачи об образовании газовых гидратов в пористой среде конечной протяженности при инжекции газа в пласт. Математическая модель процесса тепло-массопереноса сформулирована в терминах «давление-температура», что позволило явно выделить границы фазовых переходов. Необходимость учета массопереноса в указанной задаче приводит к тому, что в отличие от классической задачи Стефана температура фазового перехода зависит от давления. Поскольку рассматриваемая задача определена в областях с неизвестными подвижными границами фазовых переходов, то для их решения использован метод ловли фронтов в узлы пространственной сетки. Для нахождения значений параметров на границах между областями и законов движения этих границ использованы условия баланса массы и энергии на этих границах.

**Ключевые слова:** задача Стефана, фазовые переходы, метод ловли фронта в узел пространственной сетки

## NUMERICAL SOLUTION OF STEFAN PROBLEM WITH MULTIPLE BOUNDARY PHASE TRANSITIONS BY THE METHOD OF CATCHING THE FRONT IN THE GRID NODE

<sup>1</sup>Khasanov M.K., <sup>2</sup>Stolpovskiy M.V.

<sup>1</sup>*Sterlitamak branch of the Bashkir State University, Sterlitamak, e-mail: hasanovmk@mail.ru;*

<sup>2</sup>*Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, e-mail: s\_maxim.pmm@mail.ru*

An algorithm for the numerical solution of the Stefan problem for a problem in which phase transitions are implemented in an extended area. The solution of the problem of the formation of gas hydrates in porous media at a final length of gas injection into the reservoir. A mathematical model of heat and mass transfer process is formulated in terms of «pressure-temperature», allowing to clearly distinguish the boundary of phase transitions. The need to address the problem of mass transport in this leads to the fact that in contrast to the classical Stefan problem the phase transition temperature depends on the pressure. Because the problem in question is defined in regions with unknown moving boundaries of phase transitions, for their solutions used method of fishing in front of the spatial grid nodes. To find the values of the parameters at the boundaries between the regions and the laws of motion of these boundaries used terms of mass and energy balance on these boundaries.

**Keywords:** Stefan problem, phase transitions, method of catching the front node in the spatial grid

Известно, что большинство численных методов решения задач с фазовым переходом (задач Стефана) условно можно разделить на две группы: схемы сквозного счета и схемы с явным выделением фронта. Алгоритмы сквозного счета особенно широко применяются для многомерных задач, однако точность расчета как значения температуры, так и положения границы раздела фаз сильно зависит от параметра сглаживания, определить который часто довольно непросто.

Примером задачи Стефана является задача об образовании газовых гидратов при инжекции газа в пористую среду. Принципиальная особенность математической модели такой задачи состоит не только в учете фазовых переходов, но и массопереноса в пористой среде. Необходимость учитывать фильтрационные процессы (движение

газа в пористой среде) усложняет задачу, поскольку, хотя она и сводится к задаче Стефана, но в отличие от классической задачи Стефана температура фазового перехода зависит от давления. Эта особенность является существенной, поскольку, как показано в работах [3–5], приводит к возникновению ситуации, когда фазовые переходы реализуются в протяженной области.

В данной работе для решения указанной задачи используется метод ловли фронта в узел пространственной сетки [1, 2].

### Постановка задачи и основные уравнения

При описании процесса тепло- и массопереноса в пористых средах, сопровождающихся образованием гидрата при тепловом и депрессионном воздействиях, примем

следующие допущения. Примем однотемпературную модель пористой среды. Будем также считать, что пористость среды постоянна, а ее скелет, гидрат и вода являются несжимаемыми и неподвижными, а газ – калорически совершенным. Гидрат является двухкомпонентной системой с массовой концентрацией газа  $G$ .

Рассмотрим горизонтальный пористый пласт протяженности  $L$  ( $0 \leq x \leq L$ ), насыщенный в начальный момент времени водой (с объемным содержанием  $S_l = S_{j0}$ ) и газом, давление  $p_0$  и температура  $T_0$  которых соответствует условию существования их в свободном состоянии, т.е.  $T_s(p_0) < T_0$ , где  $T_s(p_0)$  – равновесная температура, соответствующая исходному давлению  $p_0$ . Пусть через левую границу пористого пласта ( $x = 0$ ) начинает закачиваться холодный газ (метан) с температурой  $T_e$  ( $T_e < T_0$ ) и давлением  $p_e$ , причем  $T_e < T_s(p_e)$ , где  $T_s(p_e)$  – равновесная температура, соответствующая давлению  $p_e$ . Будем полагать, что в пласте образуются три области, в которых газ, гидрат и вода находятся в различных состояниях. Так в первой (ближней) области, примыкающей к левой границе пласта, вода полностью перешла в гидратное состояние, поэтому в порах присутствуют только газ и гидрат. Примыкающая к правой границе пласта третья (дальняя) область насыщена газом и водой, а промежуточная область, разделяющая между собой вышеуказанные области, содержит газ, гидрат и воду в состоянии термодинамического равновесия. При этом возникают две подвижные границы  $x = x_{(i)}$  ( $i = n, d$ ), разделяющие между собой указанные области, причем граница  $x = x_{(n)}$  разделяет между собой ближнюю и промежуточную, а граница  $x = x_{(d)}$  – дальнюю и промежуточную области.

Система уравнений тепло-и массопереноса, включающая в себя уравнения сохранения масс (воды и газа) и энергии, закон Дарси и уравнение состояния идеального газа, может быть представлена в виде [3–5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(mS_g \rho_g) + \frac{\partial}{\partial x}(mS_g v_g \rho_g) &= -mG \rho_h \frac{\partial S_h}{\partial t}; \\ \frac{\partial}{\partial t}(mS_g \rho_g) &= -m(1-G) \rho_h \frac{\partial S_h}{\partial t}; \\ \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + c_g \rho_g m S_g v_g \frac{\partial T}{\partial x} &= \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + m \rho_h L_h \frac{\partial S_h}{\partial t}; \\ m S_g v_g &= -\frac{k_g}{\mu_g} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad p = \rho_g R_g T. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и далее нижние индексы  $j = sk, h, l, g$  относятся к параметрам скелета, гидрата, воды и газа соответственно;  $t$  – время;  $m$  – пористость;  $S_j$  и  $\rho_j$  ( $j = sk, h, l, g$ ) – насыщенности пор и истинные плотности  $j$ -й фазой ( $\sum_j S_j = 1$ );  $p$  – давление;  $T$  – температура;  $v_g$  – скорость газовой фазы, величины;  $R_g$  – приведенная газовая постоянная  $\rho c$  и  $\lambda$  представляют собой удельную объемную теплоемкость и коэффициент теплопроводности системы «пористая среда – газогидрат»;  $L_h$  – удельная теплота гидратообразования;  $p_{s0}$  – равновесное давление, соответствующее исходной температуре,  $T_*$  – эмпирический параметр, зависящий от вида гидрата;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости газа;  $k_g$  – коэффициент проницаемости для газа, зависящий от текущей газонасыщенности на основе формулы Козени:

$$k_g = k_0 S_g^3,$$

где  $k_0$  – абсолютная проницаемость пласта.

Кроме того, рассмотренные уравнения необходимо дополнить соотношениями на поверхностях разрыва между областями, в которых газ, гидрат и вода находятся в различных состояниях. На них терпят разрыв насыщенности фаз, а также потоки масс и тепла, выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \left[ m(\rho_l S_l (v_l - \dot{x}_{(i)}) - \rho_h S_h (1-G) \dot{x}_{(i)}) \right] &= 0; \\ \left[ m(\rho_g S_g (v_g - \dot{x}_{(i)}) - \rho_h S_h G \dot{x}_{(i)}) \right] &= 0; \quad (2) \\ \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right] &= [m \rho_h L_h S_h \dot{x}_{(i)}]. \end{aligned}$$

Здесь  $[\psi] = \psi^+ - \psi^-$  – скачок параметра  $\psi$ ;  $\dot{x}_{(i)}$  – скорость движения границы  $x = x_{(i)}$  ( $i = n, d$ ); верхние знаки «плюс» и «минус» относятся к параметрам перед и за фронтом соответственно. Давление и температуру на обеих границах фазового перехода будем считать непрерывными величинами.

Так как в исходном состоянии пласт находится под давлением  $p_0$  и температурой  $T_0$  с водонасыщенностью  $S_{j0}$ , то начальные условия можно записать в виде

$$p = p_0; \quad T = T_0; \quad S_l = S_{j0} \quad (0 \leq x \leq L, t = 0). \quad (3)$$

Условия на левой границе ( $x = 0$ ) можно представить в виде

$$p = p_e; \quad T = T_e; \quad (x = 0, t > 0). \quad (4)$$

На правой границе пласта ( $x = L$ ) поставим условия, моделирующие отсутствие

через нее потока тепла и давление, равное начальному:

$$p = p_0; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (x = L, \quad t > 0). \quad (5)$$

Границу, на которой справедливы условия (5), будем называть открытой для потока газа.

#### Алгоритм численного решения задачи

Поскольку рассматриваемые задачи определены в областях с неизвестными подвижными границами фазовых переходов, то для их решения используется метод ловли фронтов в узлы пространственной сетки [1, 2]. Введем на отрезке равномерную пространственную сетку с шагом  $h$ :  $x_i = ih$ ,  $i = \overline{0, p}$ ;  $x_0 = 0$ ,  $x_p = L$ . На сегменте  $[0, t_*]$  введем неравномерную сетку:  $t_{j+1} = t_j + \tau_{j+1}$ ,  $j = \overline{1, j_0}$ ;  $t_{j_0} = t_*$ ,  $\tau_j > 0$ , где  $t_*$  – конечный момент времени.

Алгоритм решения заключается в том, что неизвестный временной шаг  $\tau_{j+1}$  выбирается таким образом, чтобы ближний фронт фазового перехода перемещался по координате  $x$  ровно на один шаг, т.е.

$$x_{(n)}(t_{j+1}) - x_{(n)}(t_j) = h.$$

При этом положение дальней подвижной поверхности  $x = x_{(d)}$  также будем относить к некоторому узлу пространственной сетки, которое будет определяться уже в ходе решения задачи. Будем обозначать через  $n$  – узел пространственной сетки, соответствующий ближней границе  $x = x_{(n)}$ , а через  $d$  – узел, соответствующий границе  $x = x_{(d)}$ .

Уравнения пьезо- и теплопроводности, а также уравнение для определения гидратонасыщенности, совместно с начальными и граничными условиями (1)–(5), представляются в виде неявных конечно-разностных соотношений [4]. При этом их решение на каждом временном слое осуществляется методом итераций, суть которого заключается в следующем. Пусть известны распределения основных параметров пласта на  $j$ -м временном слое. Для нахождения их значений на  $(j + 1)$ -м временном слое поступаем следующим образом. Задаем счетчику итераций значение  $s = 0$ , а также значения давления, температуры и временного шага на новом  $(j + 1)$ -м временном слое:  $(p_i)^s$ ,  $(T_i)^s$ ,  $(\tau_i)^s$ . Увеличиваем счетчик итераций на единицу. При этом сначала из дискретного аналога системы уравнений (2) определяется «новое» значение гидратонасыщенности на ближней границе  $(S_{h(n)})^{s+1}$ , а на основании (1) – «новые» значения гидратона-

сыщенности в промежуточной области. При этом очередное положение границы отнесем к узлу, в котором для значения гидратонасыщенности выполняется соотношение:  $(S_{h,d})^{s+1} \leq \varepsilon_{sh}$ , где  $\varepsilon_{sh} \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Затем методом прогонки относительно  $(p_i)^{s+1}$  решается записанная в конечно-разностном виде система уравнений для давления (1) с учетом условий на границах фазовых переходов (2). Далее по найденным на «новой» итерации значениям гидратонасыщенности и давления методом прогонки решаются уравнения теплопроводности. Очередное приближение временного шага находим как среднее геометрическое

$$(\tau_{j+1})^{s+1} = \sqrt{\tau_1 \tau_2},$$

где  $\tau_1$  и  $\tau_2$  определяются из балансовых соотношений (2) на границе  $x = x_{(n)}$ . Процесс итераций на каждом временном слое продолжается до достижения заданной точности как по давлению, температуре, так и гидратонасыщенности, после чего переходим к рассмотрению очередного временного слоя.

#### Результаты расчетов

На рис. 1 для плоскоодномерного случая представлены распределения температуры и гидратонасыщенности при продувке пласта длины  $L = 2$  м газом под давлением  $p_e = 7$  МПа температурой  $T_e = 276$  К. Начальные давление  $p_0 = 3$  МПа, температура  $T_0 = 280$  К и водонасыщенность  $S_{i0} = 0,2$ . Для остальных параметров, характеризующих систему, приняты следующие значения:

$$m = 0,1, \quad G = 0,12,$$

$$T_* = 10 \text{ К}, \quad p_{s0} = 5,5 \text{ МПа},$$

$$k_0 = 10^{-13} \text{ м}^2, \quad R_g = 520 \text{ Дж}/(\text{К} \cdot \text{кг}),$$

$$\rho_h = 900 \text{ кг}/\text{м}^3, \quad \rho_l = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3,$$

$$c_g = 1560 \text{ Дж}/(\text{К} \cdot \text{кг}),$$

$$\rho c = 2,5 \cdot 10^6 \text{ Дж}/(\text{К} \cdot \text{м}^3),$$

$$\lambda = 2 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}), \quad \mu_g = 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с},$$

удельная теплота гидратообразования  $L_h = 5 \cdot 10^5$  Дж/кг. При таких параметрах нагнетаемого газа образование гидрата в начальный момент времени происходит в протяженной области. Из рисунка следует, что с течением времени дальняя граница  $x = x_{(d)}$

движется назад, навстречу ближней границе  $x = x_{(n)}$ . Действительно, в момент времени  $t = 1,2$  ч координата дальней подвижной границы была равна  $x_{(d)1} \approx 1$  м, а в момент времени  $t = 4,4$  ч  $x_{(d)2} \approx 0,8$  м. При этом наблюдается падение значения гидратонасыщенности в этой области. Таким образом, в зоне трехфазного равновесия происходит частичное разложение ранее образовавшегося гидрата. Это обусловлено конвективным сносом нагретого газа за счет образования гидрата на границе  $x = x_{(n)}$  и его течения в объемной области. В момент времени  $t = 15,3$  ч процесс гидратообразования происходит уже на фронтальной поверхности  $x = x_{(n)}$ .

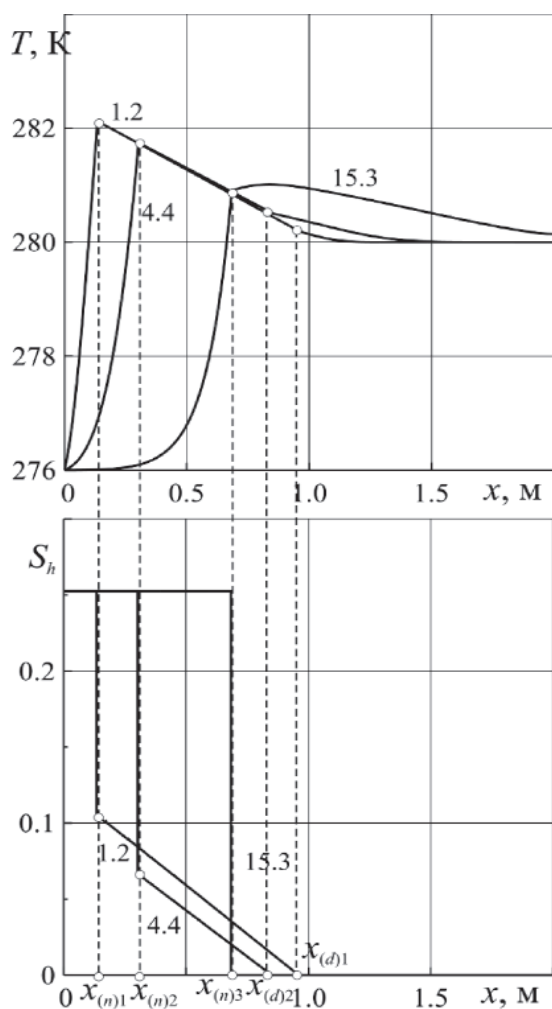


Рис. 1. Распределение температуры и гидратонасыщенности.  
Числа на кривых – время в часах

На рис. 2 представлена зависимость значения координат границ фазовых переходов от времени при продувке пласта газом. Сплошная линия соответствует параметрам на ближней границе  $x = x_{(n)}$ , а пунктирная – на дальней границе  $x = x_{(d)}$ . Из данного рисунка можно сделать вывод,

что образование гидрата в режиме продувки происходит в три этапа. На первом, быстром по времени, автомодельном этапе, когда влияние правой границы пласта незначительно, в общем случае образуются три области, где газ, гидрат и вода находятся в различных состояниях. Здесь происходит движение вглубь пласта обеих границ фазовых переходов, при этом значения температуры и гидратонасыщенности на них остаются постоянными. На втором этапе происходит вырождение протяженной области во фронтальную поверхность, связанное с движением влево границы фазового перехода  $x = x_{(d)}$ . Это обусловлено конвективным сносом выделившегося тепла на границе  $x = x_{(n)}$  и диссоциацией гидрата, образовавшегося на первом этапе. При таком перемещении влево границы  $x = x_{(d)}$  процесс образования гидрата начинает стремиться к фронтальному, чем и обусловлено падение значений гидратонасыщенности на границе  $x = x_{(n)}$ . На третьем этапе процесс гидратообразования происходит лишь на фронтальной поверхности.

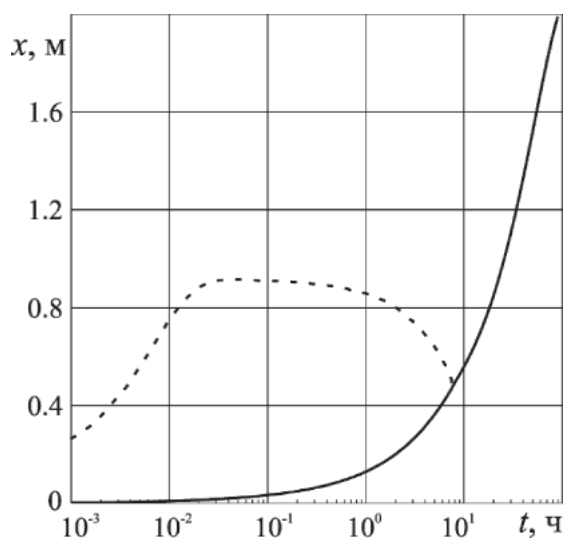


Рис. 2. Зависимость значений координат  $x = x_{(n)}$  (сплошная линия) и  $x = x_{(d)}$  (пунктирная линия) границ фазовых переходов при нагнетании газа

### Выводы

Методом ловли фронта в узел сетки получено численное решение задачи об образовании гидрата в пористой среде. Установлено, что протяженная область фазовых переходов со временем может вырождаться во фронтальную поверхность.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 14-01-31089\_мол-а).

**Список литературы**

1. Васильев В.И., Попов В.В., Тимофеева Т.С. Вычислительные методы в разработке месторождений нефти и газа. – Новосибирск, 2000. – 127 с.

2. Васильев В.И., Максимов А.М., Петров Е.Е., Цыпкин Г.Г. Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. – М.: Наука. Физматлит, 1996. – 224 с.

3. Доровская М.С., Хасанов М.К. Математическая модель фильтрации газа с учетом гидратообразования // Сборник научных трудов Sworld. – 2013. – Т. 4, № 4. – С. 3-4.

4. Доровская М.С., Хасанов М.К. Математическое моделирование образования газогидратов в пористой среде // Ломоносовские чтения на Алтае: сборник научных статей международной молодежной школы семинара. – 2013. – Т. 1. – С. 125–128.

5. Хасанов М.К. Инжекция газа в пористую среду, сопровождающаяся образованием газогидрата // Вестник Самарского государственного университета. – 2008. – № 62. – С. 290–297.

**References**

1. Vasilev V.I., Popov V.V., Timofeeva T.S. Vychislitelnye metody v razrabotke mestorozhdenij nefiti i gaza. Novosibirsk, 2000. 127 p.

2. Vasilev V.I., Maksimov A.M., Petrov E.E., Cypkin G.G. Teplomassoperenos v promerzajushhijh i protaivajushhijh gruntah. M.: Nauka. Fizmatlit, 1996. 224 p.

3. Dorovskaja M.S., Khasanov M.K. Matematicheskaja model filtracii gaza s uchetom gidratoobrazovanija // Sbornik nauchnyh trudov Sworld, 2013, Vol. 4, no. 4, pp. 3-4.

4. Dorovskaja M.S., Khasanov M.K. Matematicheskoe modelirovanie obrazovanija gazogidratov v poristoj srede // Sbornik nauchnyh statej mezhdunarodnoj molodezhnoj shkoly seminara «Lomonosovskie chtenija na Altae», 2013, Vol. 1, pp. 125–128.

5. Khasanov M.K. Inzhekcija gaza v poristuju sredu, soprovozhdajushhajasja obrazovanijem gazogidrata // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta, 2008, no. 62, pp. 290–297.

**Рецензенты:**

Мустафина С.А., д.ф.-м.н., профессор, заведующая кафедрой математического моделирования, Стерлитамакский филиал, Башкирский государственный университет, г. Стерлитамак;

Биккулова Н.Н., д.ф.-м.н., профессор кафедры общей и теоретической физики, Стерлитамакский филиал, Башкирский государственный университет, г. Стерлитамак.