

УДК 621.644.07

**ОСОБЕННОСТИ ЗАДАНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ТРЕТЬЕГО РОДА  
НА ПОВЕРХНОСТИ МНОГОЛЕТНЕМЕРЗЛОГО ГРУНТА  
ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ЕГО ТЕПЛОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ  
С «ГОРЯЧИМ» ТРУБОПРОВОДОМ В ПРОГРАММЕ  
COMSOL MULTIPHYSICS 4.3B**

**Марков Е.В., Пульников С.А., Казакова Н.В.**

*ФГБОУ ВО «Тюменский государственный нефтегазовый университет»,  
Тюмень, e-mail: markov.ev@mail.ru, spulnikov@mail.ru*

Создана математическая модель взаимодействия многолетнемерзлого грунта и трубопровода в программном комплексе Comsol Multiphysics 4.3b. Проведен анализ исходных данных для моделирования. Сделано заключение о том, что граничные условия третьего рода на поверхности грунта зависят от времени. Обозначены основные требования, предъявляемые к регрессионной модели, описывающей граничные условия на поверхности грунта. Разработана методика аппроксимации исходных данных рядами Фурье. Определено оптимальное число слагаемых в ряду Фурье, обеспечивающее плавное изменение аппроксимируемой величины при переходе от одного месяца к другому. При помощи инструментов пакета Matlab с интегрированным языком символьного исчисления MuPad сформировано выражение, задающее граничные условия в Comsol Multiphysics 4.3b. Выполнена проверка соответствия использованных символьных обозначений функций и переменных смысловому содержанию тех же символьных обозначений в интерпретируемом языке Comsol Multiphysics 4.3b.

**Ключевые слова:** горячий трубопровод, многолетнемерзлый грунт, ореол оттаивания, переменные граничные условия, климатические параметры, солнечная радиация, граничные условия третьего рода

**FEATURES OF DEFINING BOUNDARY CONDITION OF THIRD KIND  
ON THE PERMAFROST SURFACE IN THE MATHEMATICAL MODELLING ITS  
HEAT INTERACTION WITH «HOT» PIPELINE IN COMSOL MULTIPHYSICS 4.3B**

**Markov E.V., Pulnikov S.A., Kazakova N.V.**

*Tyumen State Oil and Gas University, Tyumen, e-mail: markov.ev@mail.ru, spulnikov@mail.ru*

Mathematical model of permafrost and underground pipeline heat interaction has been created in Comsol Multiphysics 4.3b. Initial data analysis has been done. Time-dependence of third kind boundary conditions has been indicated. The main requirement for regression model of the boundary condition on the permafrost surface has been denoted. The procedure of initial data approximation by Fourier series has been devised. Optimal number of summands in the Fourier series, providing a smooth change of approximated value from month to month, has been defined. With the help of Matlab symbolic math toolbox the boundary conditions expression for Comsol Multiphysics 4.3b has been written. The conformity checking Fourier function symbolic designation with semantic content of the same symbolic designation in Comsol Multiphysics 4.3b has been done.

**Keywords:** hot pipeline, permafrost, aureole thawing, time-dependent boundary condition, climatic parameters, sun radiation, boundary condition of third kind

При проектировании трубопроводных систем, перекачивающих горячие продукты в условиях сплошной или островной многолетней мерзлоты, особенно важным является правильный выбор способа прокладки и обоснование толщины теплоизоляционного покрытия. При подземном способе прокладки определяющий фактор – это допустимая величина просадки оттаявшего многолетнемерзлого грунта (ММГ), зависящая от глубины его оттаивания и жесткости трубопровода [1; 3–7; 9–15].

**Цель работы** – разработать наиболее рациональную методику задания периодических граничных условий третьего рода на поверхности моделируемого грунтового массива, воспроизводящую среднестатистические значения основных климатиче-

ских параметров в районе проектируемого трубопровода.

**Задачи:**

– выполнить анализ исходных данных задачи о моделировании теплового взаимодействия трубопроводов с ММГ;

– определить основные возможности программного комплекса Comsol Multiphysics 4.3b в части задания граничных условий третьего рода;

– разработать математическую формулировку граничных условий третьего рода, позволяющую использовать ее в Comsol Multiphysics 4.3b.

Для создания модели трубопровода и грунта в программе Comsol Multiphysics 4.3b необходимо выбрать физический режим Heat Transfer with Radiation in Participating

Media, позволяющий моделировать теплопроводность в средах, испытывающих фазовые переходы типа «плавление – затвердевание» на основании нелинейного дифференциального уравнения теплопроводности [2]:

$$(T)c_p(T)\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (K(T)\nabla T) = G, \quad (1)$$

где  $\rho(T)$  – плотность грунта;  $T$  – температура;  $c_p(T)$  – теплоемкость грунта;  $t$  – время;  $K(T)$  – теплопроводность грунта;  $G$  – внутренние объемные источники тепла.

Среди решателей необходимо выбрать Time Dependent, позволяющий решать задачи с нестационарным теплообменом. Во вкладке Geometry необходимо создать геометрическую модель исходной задачи (рис. 1).

Во вкладке Materials, секции Material Contents задаются теплофизические характеристики грунтов, теплоизоляции и материала стенки трубопровода. В секции Geometric Entity Selection производится выбор расчетных областей, к которым принадлежит тот или иной материал.

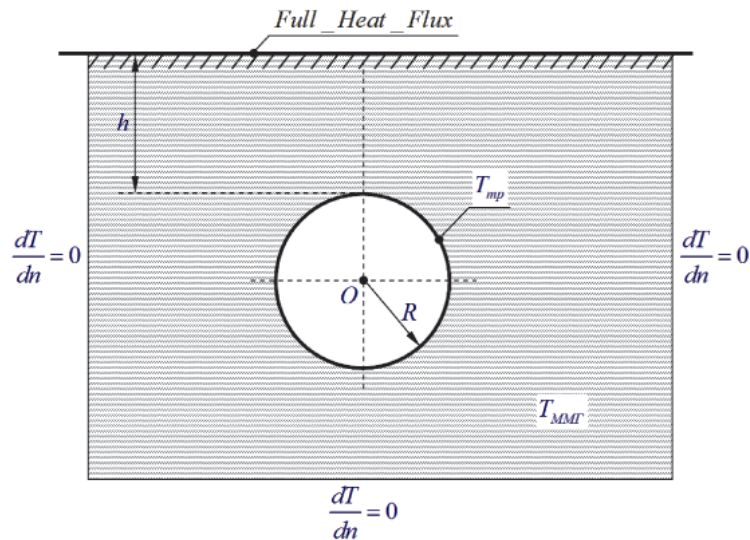


Рис. 1. Геометрическая модель трубопровода в мерзлом грунте с заданными граничными условиями

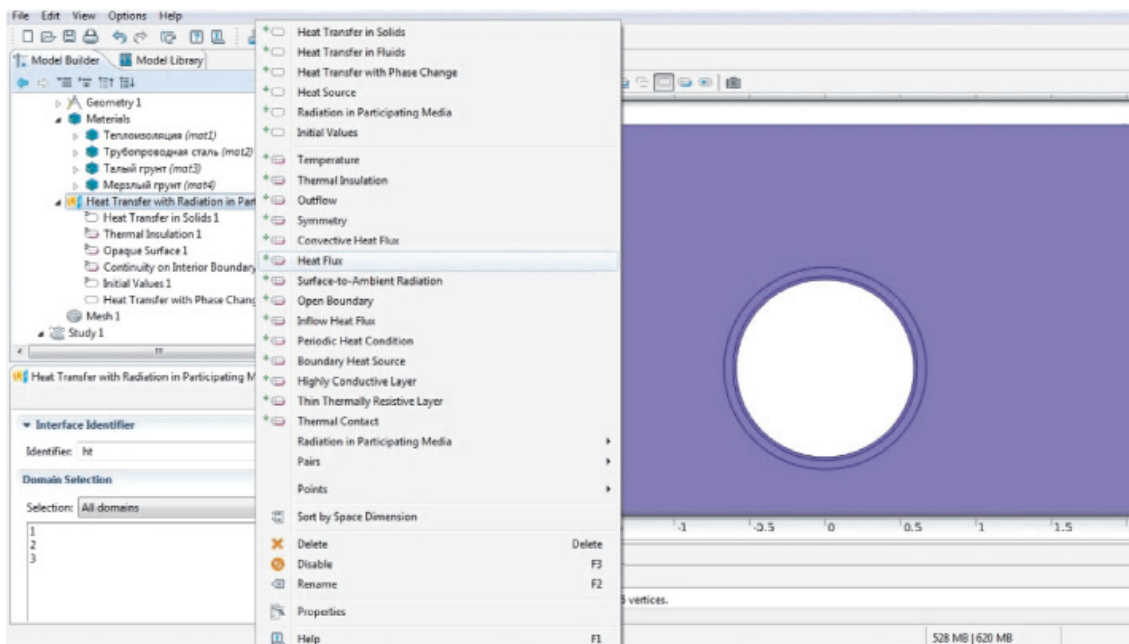


Рис. 2. Добавление граничного условия «Heat Flux». Осуществляется вызовом контекстного меню во вкладке «Heat Transfer with Radiation in Participating Media»

Во вкладке Heat Transfer with Radiation in Participating Media необходимо добавить граничное условие Heat Flux (рис. 2), задающее тепловой поток в общем виде. Затем в секции Heat Flux в строке General inward heat flux вводится имя переменной, которая будет задавать величину теплового потока на поверхности грунта, например «Full\_Heat\_Flux». В секции Boundary Selection необходимо выбрать верхнюю границу расчетной области (рис. 3).

земли;  $T_b$  – температура воздуха;  $\varepsilon$  – степень черноты поверхности земли в длинноволновом диапазоне;  $\sigma_0$  – постоянная Стефана – Больцмана;  $b$  – коэффициент излучения атмосферы [8];  $T$  – температура моделируемого массива грунта.

Каждое слагаемое формулы (2) содержит в себе переменную, зависящую от времени. Рассмотрим переменную  $Q$ , задающую величину теплового потока солнечной радиации к горизонтальной поверхности. Как прави-

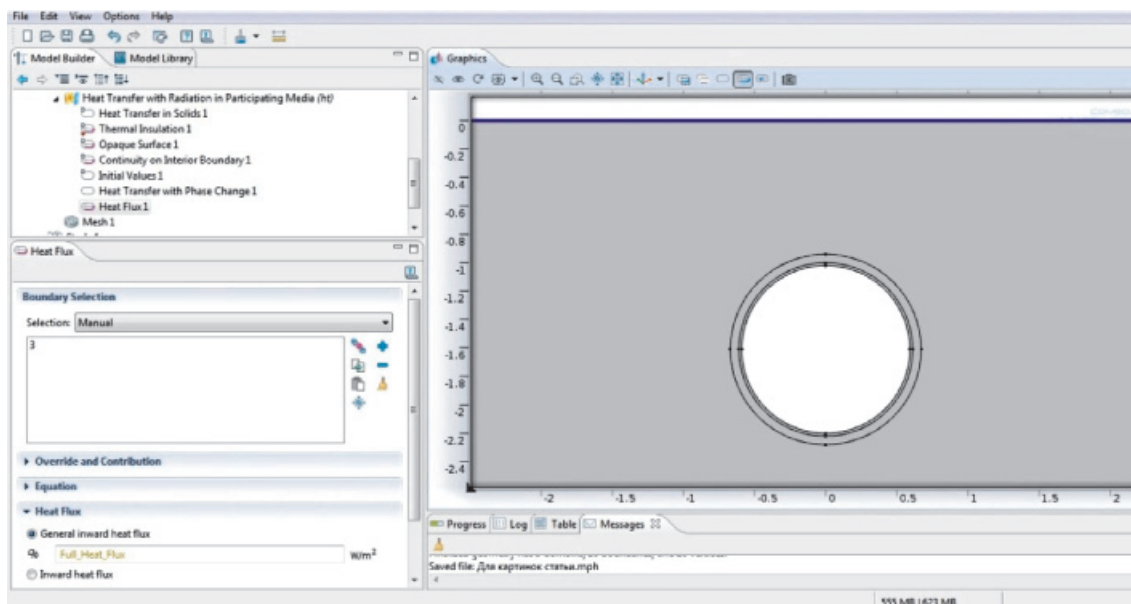


Рис. 3. Ввод переменной, задающей величину теплового потока и выбор границы № 3 (выделена синим цветом в окне Graphics)

Далее во вкладке Defenitions необходимо добавить новую таблицу с переменными и записать в столбец Name ранее определенное имя переменной, задающей тепловой поток на поверхности грунта: «Full\_Heat\_Flux». В столбце Expression вводится выражение в символьном виде, задающее непосредственно сам тепловой поток. Удобные возможности для выполнения операций с символьными выражениями предоставляет программный комплекс Matlab с интегрированным языком символьного исчисления MuPad.

Перейдем к описанию вида выражения, задающего тепловой поток. Граничные условия третьего рода на поверхности земли задаются выражением (2):

$$Full\_Heat\_Flux = AQ + a(T_b - T) + \varepsilon_0 (bT_b^4 - T^4), \quad (2)$$

где  $A$  – альбедро деятельной поверхности;  $a$  – коэффициент теплоотдачи от поверхности

ло, информация о величине солнечной радиации содержится в отчетах по инженерным изысканиям объекта проектирования в виде таблиц суммарной солнечной радиации деятельной поверхности при средних условиях облачности по месяцам, Дж/м<sup>2</sup>.

Для определения мощности теплового потока  $Q$  необходимо разделить величину суммарной солнечной радиации на количество секунд в месяце. В этом случае размерность  $Q$  будет Вт/м<sup>2</sup>.

Перейдем к выводу выражения, аппроксимирующего величину  $Q$  в зависимости от времени года. Для этих целей можно использовать различные регрессионные модели. Однако выбор должен быть сделан в сторону той модели, которая позволит учесть две важные особенности:

1. Регрессионная модель должна представляться периодической функцией времени. Это обеспечит повторяемость значений основных климатических характеристик в одно и то же время для каждого расчетного года.

2. Регрессионная модель в качестве исходных данных должна использовать среднеарифметические значения аппроксимируемых данных за определенный промежуток времени.

Разработанная в начале XIX века французским математиком Фурье теория сходящихся тригонометрических рядов предоставляет очень удобные возможности для вычисления выражения, аппроксимирующего  $Q$  в соответствии со всеми требованиями, приведенными выше:

$$a_0 = \frac{2}{t_y} \sum_{i=1}^{12} \int_{t_{i-1}}^{t_i} Q_i dt; \quad (3)$$

$$a_n = \frac{2}{t_y} \sum_{i=1}^{12} \int_{t_{i-1}}^{t_i} Q_i \cos\left(\frac{2nt}{t_y}\right) dt; \quad (4)$$

$$b_n = \frac{2}{t_y} \sum_{i=1}^{12} \int_{t_{i-1}}^{t_i} Q_i \sin\left(\frac{2nt}{t_y}\right) dt; \quad (5)$$

$$Q = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k a_n \cos\left(\frac{2nt}{t_y}\right) + b_n \sin\left(\frac{2nt}{t_y}\right), \quad (6)$$

где  $t_y$  – продолжительность года, с;  $Q_i$  – мощность теплового потока солнечной радиации в  $i$ -м месяце, Вт/м<sup>2</sup>;  $t_0 = 0$  с, соответствует началу года;  $t_i$  – момент окончания  $i$ -го месяца в году, с;  $k$  – число слагаемых в ряду Фурье;  $t$  – расчетный момент времени.

Аналогичные операции выполняются для всех переменных выражения (2), зависящих от времени года. Для плавного изменения аппроксимируемой величины при переходе от одного месяца к другому рекомендуется брать не более 7–9 слагаемых ряда Фурье. После расчета коэффициентов ряда Фурье для всех переменных, окончательное выражение для *Full Heat Flux* записывается в колонку Expression.

Следует отметить, что использованная переменная « $t$ », « $T$ » функции « $\cos$ » и « $\sin$ » интерпретируются в Comsol Multiphysics 4.3b в соответствии со смыслом, положенным в формулах (3)–(6).

### Выводы

Создана математическая модель взаимодействия многолетнемерзлого грунта и трубопровода в программном комплексе Comsol Multiphysics 4.3b. Проведен анализ исходных данных для моделирования. Сделано заключение о том, что граничные условия третьего рода на поверхности грунта зависят от времени. Обозначены основные требования, предъявляемые к регрессионной модели, описывающей граничные ус-

ловия на поверхности грунта. Разработана методика аппроксимации исходных данных рядами Фурье. Определено оптимальное число слагаемых в ряду Фурье, обеспечивающее плавное изменение аппроксимируемой величины при переходе от одного месяца к другому. При помощи инструментов пакета Matlab с интегрированным языком символьного исчисления MuPad сформировано выражение, задающее граничные условия в Comsol Multiphysics 4.3b. Выполнена проверка соответствия использованных символьных обозначений функций и переменных смысловому содержанию тех же символьных обозначений в интерпретируемом языке Comsol Multiphysics 4.3b.

### Список литературы

1. Алескерова З.Ш., Пульников С.А., Сысоев Ю.С., Казакова Н.В. Оценка эффективности геотехнического мониторинга магистральных газопроводов по качеству продуцируемой информации // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 2015. – № 3. – С. 81–86.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – 4-е изд. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 512 с.
3. Горковенко А.И., Вагнер В.В., Пульников С.А. Результаты исследований взаимодействий вибронгруженных магистральных подземных газопроводов с окружающими грунтами // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 2007. – № 4. – С. 73–77.
4. Карнаухов М.Ю., Лазарев С.А., Пульников С.А., Сысоев Ю.С. Исследование процесса формирования эксплуатационного положения протяженных участков МГ Уренгой – Челябинск в сложных гидрогеологических условиях // Газовая промышленность. – 2015. – № S724 (724). – С. 53–58.
5. Кушнир С.Я., Карнаухов М.Ю., Пульников С.А., Сысоев Ю.С. Анализ пространственных перемещений магистральных газопроводов с определением граничных зон // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 2011. – № 5. – С. 72–75.
6. Кушнир С.Я., Пульников С.А., Серебренников А.А., Сенив Д.М. Устойчивость призм обвалования подземных магистральных нефтегазопроводов // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 2010. – № 4. – С. 65–70.
7. Кушнир С.Я., Пульников С.А., Сысоев Ю.С. Пространственная устойчивость подземного магистрального газопровода на обводненных участках трассы // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 2012. – № 1. – С. 72–76.
8. Луканин В.Н., Шатров М.Г. Теплотехника. – М.: Высшая школа, 2000. – 671 с.
9. Марков Е.В., Пульников С.А., Гербер А.Д. Проблемы задания граничных условий при моделировании теплового взаимодействия «горячих» трубопроводов с многолетнемерзлыми грунтами // Фундаментальные исследования. – 2015. – № 2–10. – С. 2106–2110.
10. Марков Е.В., Пульников С.А., Сысоев Ю.С. Анализ типовых методик расчета глубины протаивания вечномерзлых грунтов под трубопроводами // Современные проблемы науки и образования. – 2015. – № 1. – С. 142.
11. Мерданов Ш.М. Совершенствование методов строительства и ремонта трубопроводов в условиях Крайнего Севера: дис. ... канд. техн. наук. – Тюмень, 1996.
12. Пульников С.А. Взаимодействие вибронгруженных магистральных газопроводов с окружающими грунтами: дис. ... канд. техн. наук. – Тюмень, 2007. – 173 с.

13. Пульников С.А., Сысоев Ю.С., Карнаухов М.Ю., Лазарев С.А. Проблемы внедрения систем геотехнического мониторинга на объектах газотранспортной системы ОАО «Газпром» // Геотехника. – 2014. – № 5/6. – С. 77–83.

14. Пульников С.А., Сысоев Ю.С., Гербер А.Д., Карнаухов М.Ю. Методика обработки данных мониторинга пространственного положения эксплуатируемого участка подземного магистрального газопровода // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. – Уфа: Изд-во ИПТЭР, 2013. – Вып. 3 (93). – С. 58–66.

15. Тарасенко А.А., Сильницкий П.Ф., Тарасенко Д.А. Проектирование теплоизолированных фундаментов резервуаров на вечной мерзлоте // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 2012. – № 2. – С. 84–88.

### References

1. Aleskerova Z.Sh., Pulnikov S.A., Sysoev Yu.S., Kazakova N.V. Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Neft i gaz. 2015. no. 3, pp. 81–86.

2. Vladimirov V.S. Uravnenija matematicheskoj fiziki. izd. 4. Moscow, Nauka, Glavnaja redakcija fiziko-matematicheskoj literatury, 1981, 512 p.

3. Gorkovenko A.I., Vagner V.V., Pulnikov S.A. Rezultaty issledovanij vzaimodejstvij vibronagruzhennyh magistralnyh podzemnyh gazoprovodov s okruzhajushhimi gruntami. Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Neft i gaz. 2007, no. 4, pp. 73–77.

4. Karnauhov M.Yu., Lazarev S.A., Pulnikov S.A., Sysoev Yu.S. Gazovaya promyshlennost. 2015. no. S724 (724). pp. 53–58.

5. Kushnir S.Ya., Karnauhov M.Yu., Pulnikov S.A., Sysoev Yu.S. Analiz prostranstvennyh peremeshhenij magistralnyh gazoprovodov s opredeleniem granichnyh zon. Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Neft i gaz. 2011, no. 5, pp. 72–75.

6. Kushnir S.Ya., Pulnikov S.A., Serebrennikov A.A., Seniv D.M. Ustojchivost prizm obvalovaniya podzemnyh magistralnyh neftegazoprovodov. Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Neft i gaz. 2010, no. 4, pp. 65–70.

7. Kushnir S.Ya., Pulnikov S.A., Sysoev Yu.S. Prostranstvennaja ustojchivost podzemnogo magistralnogo gazoprovoda na obvodnennyh uchastkah trassy. Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Neft i gaz. 2012, no. 1, pp. 72–76.

8. Lukanin V.N., Shatrov M.G. Teplotehnika. Moscow, Vysshaja shkola, 2000. 671 p.

9. Markov E.V., Pulnikov S.A., Gerber A.D. Fundamental research, 2015, no. 2-10, pp. 2106–2110.

10. Markov E.V., Pulnikov S.A., Sysoev Yu.S. Problems of modern science and education, 2015, no. 1, pp. 142.

11. Merdanov Sh.M. Sovershenstvovanie metodov stroitelstva i remonta truboprovodov v uslovijah Krajnego Severa: dis. ... kand. tehn. nauk. Tyumen, 1996.

12. Pulnikov S.A. Vzaimodejstvie vibronagruzhennyh magistralnyh gazoprovodov s okruzhajushhimi gruntami: dis. ... kand. tehn. nauk. Tyumen, 2007, 173 p.

13. Pulnikov S.A., Sysoev Yu.S., Karnauhov M.Yu., Lazarev S.A. Problemy vnedrenija sistem geotekhnicheskogo monitoringa na objektah gazotransportnoj sistemy ОАО «Газпром». Geotehnika, 2014, no. 5/6, pp. 77–83.

14. Pulnikov S.A., Sysoev Yu.S., Gerber A.D., Karnauhov M.Yu. Problemy sbora, podgotovki i transporta nefiti i nefteproduktov. 2013, no. 3, pp. 58–66.

15. Tarasenko A.A., Silnickiy P.F., Tarasenko D.A. Proektirovanie teploizolirovannyh fundamentov rezervuarov na vechnoj merzlote. Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Neft i gaz. 2012, no. 2, pp. 84–88.

### Рецензенты:

Якубовский Ю.Е., д.т.н., заведующий кафедрой «Прикладная механика», ФГБОУ ВО «Тюменский государственный нефтегазовый университет», г. Тюмень;

Тарасенко А.А., д.т.н., профессор кафедры «ТУР», ФГБОУ ВО «Тюменский государственный нефтегазовый университет», г. Тюмень.