

УДК 626-33

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОТОКА, ФОРМИРУЕМОГО ПРИ СОПРЯЖЕНИИ БЬЕФОВ ГИДРОУЗЛА

Кузнецова Ю.А.

ФГБОУ ВПО «Поволжский государственный технологический университет»,
Йошкар-Ола, e-mail: KuznetsovaYA@volgatech.net

Сопряжение бьефов гидротехнических сооружений связано с формированием струйных течений за концевым креплением флютбета, кинематические характеристики которых определены на основе модели вихрей, катящихся по криволинейной границе потока. В результате преобразования радиуса-вектора точки, связанной с плоским вихрем, из локальной системы координат в декартову систему установлены зависимости, которые позволили связать скорости, индуцированные прямолинейным вихревым слоем, с полем скоростей формируемого потока. Преобразование радиуса-вектора из локальной системы координат в декартову систему осуществляется в результате выражения дифференциально-геометрических характеристик плоской кривой через тригонометрические функции. Анализ показал соответствие разработанной модели классическим зависимостям теории гидравлических струй. Помимо уточнения физического процесса формирования поля скоростей потоков определена связь между осевой скоростью течения и кинематическими характеристиками на границе концевого крепления в нижних бьефах гидротехнических сооружений.

Ключевые слова: гидротехнические сооружения, концевое крепление флютбета, кинематические характеристики потока, криволинейная граница, вихревой слой, локальная система координат

KINEMATIC CHARACTERISTICS OF FLOW GENERATED BY HYDROSYSTEM RACES CONJUGATION

Kuznetsova Y.A.

Volga State University of Technology, Yoshkar-Ola, e-mail: KuznetsovaYA@volgatech.net

Hydrosystem races conjugation is related to the jet stream formation behind the end fixing of the apron, the kinematic characteristics of which are determined on the model of vortices rolling along the curved boundary of the flow. As a result of transformation of the radius vector of the point connected with the plane vortex, from the local coordinate system into the Cartesian system, dependencies are established, which allowed us to connect the velocities, induced by the rectilinear vortex layer, with flow velocity field. Transformation of the radius vector from the local coordinate system into the Cartesian system is the result of expression of differential-geometric characteristics of the plane curve using trigonometric functions. Analysis showed that the developed model complies with the classical dependences of the hydraulic jet theory. Besides clarification of the physical process of the flow velocity field formation, the relationship between the axial stream velocity and kinematic characteristics at the border of the end fixing in the hydrosystem tailraces is determined.

Keywords: hydraulic facilities, end fixing of apron, kinematic characteristics of flow, curved boundary, vortex layer, local coordinate system

При эксплуатации гидроузлов возникают экологические проблемы, связанные с образованием воронки размыва в нижнем бьефе при значительных скоростях сбрасываемого потока. Размыв русла в нижнем бьефе может привести к потере устойчивости гидротехнических сооружений. Разработка оценки устойчивости гидроузлов осложняется отсутствием комплексного подхода к анализу русловых процессов, согласованному с теорией плоских гидравлических струй [1]. Основными факторами, влияющими на интенсивность размыва нижнего бьефа гидротехнического сооружения, являются кинематические характеристики потока, сливаемого с концевых сооружений флютбета в незащищенную часть водоотводящего русла.

Целью исследования является определение поля скоростей на основе вихревой

модели границы потока, формируемого при сопряжении бьефов гидроузла.

При установленном законе границы струи в результате применения методов аналитической геометрии производится преобразование координат радиуса-вектора точки жидкости из локальной системы, связанной с вихрями, катящимися вдоль границы потока, в декартову прямоугольную систему координат, связанную с границей области размыва, устанавливается закон распределения скоростей.

Математическое моделирование

Преобразуем вектор \vec{r} из ортогональной системы локальных координат \vec{r}_1, \vec{n} в точке $O_1(x, y)$ на плоской кривой $y = f(x) = \text{ach} \frac{x}{a} - a$ в декартову xOy через систему промежуточных координат x_1, O_1, y_1 (рис. 1).

Подставляя в систему уравнений значение производной y' , перепишем систему в виде

$$\xi = -x \cdot \operatorname{sech} \frac{x}{a} - y \cdot \operatorname{th} \frac{x}{a};$$

$$\eta = x \cdot \operatorname{th} \frac{x}{a} + y \cdot \operatorname{sech} \frac{x}{a},$$

где учтены равенства

$$\operatorname{sh}^2 \frac{x}{a} + 1 = \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a};$$

$$\sin \varphi = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{\operatorname{sh} \frac{x}{a}}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}}} = \frac{\operatorname{sh} \frac{x}{a}}{\operatorname{ch} \frac{x}{a}} = \operatorname{th} \frac{x}{a};$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}}} = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{x}{a}} = \operatorname{sech} \frac{x}{a};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\operatorname{sh} \frac{x}{a}}{\operatorname{ch} \frac{x}{a}} \Big/ \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{x}{a}} = \operatorname{sh} \frac{x}{a}.$$

Полученные формулы преобразования координат ξ, η локальной ортогональной системы $\bar{\xi}O_1\bar{\eta}$ могут быть использованы для представления решения, полученного в $\bar{\xi}O_1\bar{\eta}$, в декартовой системе координат xOy .

Преобразование произвольно расположенного на плоскости вектора \bar{r} , имеющего начало в точке $O_1(x, y)$, осуществляется аналогичным образом (рис. 2).

Компоненты вектора \bar{r} в дополнительной системе координат $x_1O_1y_1$, преобразованные из системы $\bar{\tau}O_1\bar{\eta}$, имеют вид

$$-x_{1n} = -\xi_n \cos \varphi + \eta_n \sin \varphi;$$

$$-y_{1n} = -\xi_n \sin \varphi - \eta_n \cos \varphi.$$

В системе xOy запишем с учетом равенств $x_n = -x_{1n}$ и $y_n = -y_{1n}$:

$$x_n = -\xi_n \cos \varphi + \eta_n \sin \varphi;$$

$$y_n = -\xi_n \sin \varphi - \eta_n \cos \varphi.$$

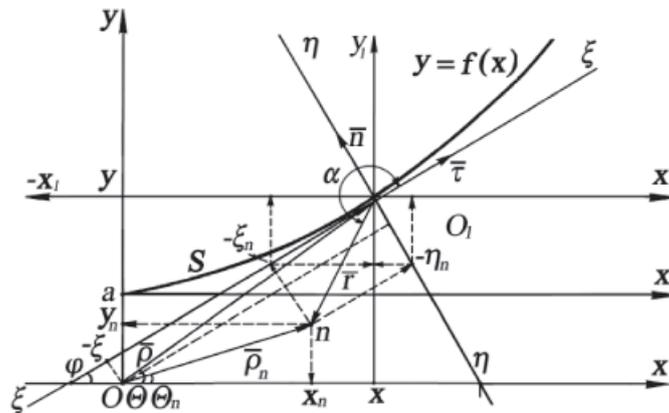


Рис. 2. Преобразование вектора \bar{r} из системы локальных координат $\bar{\tau}O_1\bar{\eta}$ в декартову xOy :

$$y = f(x) = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a} - a \text{ — уравнение кривой}$$

Следовательно, проекции вектора \bar{r} в системе координат xOy будут иметь вид

$$x - x_n = \xi_n \cos \varphi - \eta_n \sin \varphi - \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi = -(\xi - \xi_n) \cdot \cos \varphi + (\eta - \eta_n) \cdot \sin \varphi;$$

$$y - y_n = \xi_n \sin \varphi + \eta_n \cos \varphi - \xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi = -(\xi - \xi_n) \cdot \sin \varphi - (\eta - \eta_n) \cdot \cos \varphi.$$

Отсюда, разделяя переменные $(\xi - \xi_n)$ и $(\eta - \eta_n)$, с учетом равенств $\sin \varphi = \operatorname{th} \frac{x}{a}$ и $\cos \varphi = \operatorname{sech} \frac{x}{a}$ для вектора \bar{r} с началом в точке $O_1(x, y)$ получим формулы преобразования:

$$\xi_n = (x - x_n) \cdot \operatorname{sech} \frac{x}{a} + (y - y_n) \cdot \operatorname{th} \frac{x}{a}; \quad \eta_n = -(x - x_n) \cdot \operatorname{th} \frac{x}{a} + (y - y_n) \cdot \operatorname{sech} \frac{x}{a}.$$

Качественная картина формирования течения в пределах струи, ограниченной отрезком Oa на оси ординат Oy лучом, совпадающим с абсциссой Ox и кривой $y = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a} - a$, выглядит следующим образом.

Интенсивность слоя вихрей, вращающихся против часовой стрелки, длиной ds на кривой $y = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a} - a$ имеет вид

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} dx = \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx.$$

Интенсивность вихревого слоя длиной ds уменьшается в $\frac{ds}{dx}$ раз и при интенсивности вихря $C = C_0 \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ остается постоянной и равной C_0 . При анализе индуцированных скоростей в системе координат $\bar{t}O_1\bar{n}$ принимается, что $C = C_0 = \text{const}$.

Каждый из вихрей возбуждает в струе две составляющие скорости: $u = \frac{dx}{dt}$ и $v = \frac{dy}{dt}$. Движение сначала описывается в системе $\bar{t}O_1\bar{n}$ подобно течению, возбуждаемому вихревым слоем длины S , а затем преобразуется в систему координат xOy . При этом длина слоя определяется формулой

$$S = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^x \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} dx = \int_0^x \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = a \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{a},$$

где x – проекция дуги S на ось Ox .

Пусть прямолинейные вихри нормальны плоскости $\bar{t}O_1\bar{n}$ и расположены вдоль отрицательного направления оси $O_1\bar{\xi}$ на длине $-S$. Система координат инвертирована по отношению к квадранту $(-\bar{\xi}, O_1, -\bar{\eta}_1)$, в котором расположен вихревой слой. На расстоянии ξ_n от начала координат O_1 в положительном направлении оси $O_1\bar{\xi}$ располагается участок вихревого слоя того же направления вращения, что и вихревой слой в квадранте $(-\bar{\xi}, O_1, -\bar{\eta}_1)$. Это обстоятельство вызвано тем, что отрезок кривой S соединяет начало системы координат $\bar{t}O_1\bar{n}$ – точку O_1 и точку $(0, a)$ координатной системы xOy , а вихревой слой продолжается за пределы точки O_1 (рис. 3).

Таким образом, координаты оказываются отрицательными, как и длина кривой S .

В точке пространства $\bar{t}O_1\bar{n}$ элемент длиной $-ds$, расположенный на расстоянии $-s$ от начала координат O_1 , возбуждает скорость $d\bar{w}_{\xi\eta}$ направленную по нормали к радиусу-вектору \bar{r}_n и равную $d\bar{w}_{\xi\eta} = -\frac{C_{o1}}{r_n} ds$, где учтено, что величина ds отрицательна.

Вихревой слой имеет напряженность $C_{o1} = \frac{C_0}{S}$, отнесенную к длине кривой S .

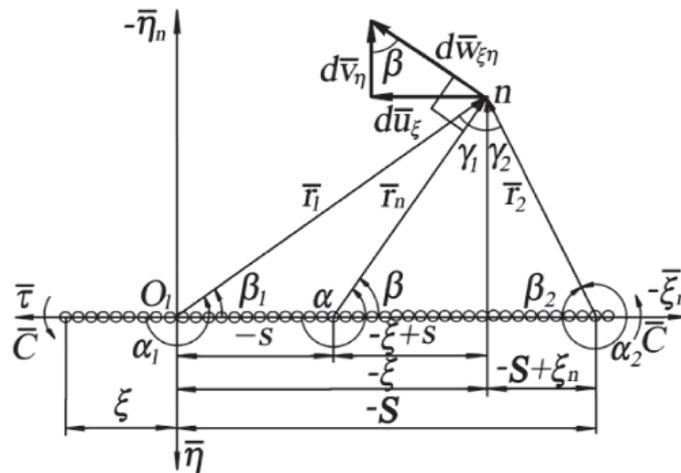


Рис. 3. Индуцирование скоростей непрерывным вихревым слоем конечной длины:

$$\bar{C} = \bar{C}_0; \beta_1 = \pi - \alpha_1; \beta_2 = \pi - \alpha_2; n(-\xi_n, -\eta_n)$$

Компоненты вектора скорости $d\vec{w}_{\xi\eta}$, индуцированной вихревым отрезком ds , равны (рис. 3):

$$du_{\xi} = dw_{\xi\eta} \sin \alpha = dw_{\xi\eta} \sin(\pi + \beta) = -dw_{\xi\eta} \sin \beta = \frac{C_{o1}}{r_n} ds \frac{-\eta_n}{r_n} = -\frac{C_{o1} \eta_n ds}{\eta_n^2 + (-\xi_n + s)^2};$$

$$dv_{\eta} = dw_{\xi\eta} \cos \alpha = dw_{\xi\eta} \cos(\pi + \beta) = -dw_{\xi\eta} \cos \beta = \frac{C_{o1}}{r_n} ds \frac{-\xi_n + s}{r_n} = \frac{C_{o1} (-\xi_n + s) ds}{\eta_n^2 + (-\xi_n + s)^2},$$

где $\sin \beta = \frac{-\eta_n}{r_n}$; $\cos \beta = \frac{-\xi_n + s}{r_n}$; $r_n^2 = \eta_n^2 + (-\xi_n + s)^2$.

Полные компоненты скорости получатся интегрированием по длине слоя от 0 до S .
Компонент, направленный по оси $-\xi$, равен

$$u_{\xi} = -\int_{\xi_n}^{-S} C_{o1} \frac{\eta_n ds}{\eta_n^2 + (-\xi_n + s)^2} = -C_{o1} \operatorname{arctg} \frac{-\xi_n + s}{\eta_n} \Big|_{\xi_n}^{-S} = C_{o1} \operatorname{arctg} \frac{\xi_n - S}{\eta_n},$$

где интервал интегрирования начинается от ξ_n и заканчивается на границе S (рис. 3).

Компонент, направленный по оси $-\eta$, равен

$$v_{\eta} = \int_{\xi_n}^{-S} C_{o1} \frac{(-\xi_n + s) ds}{\eta_n^2 + (-\xi_n + s)^2} = \frac{C_{o1}}{2} \ln \left[\eta_n^2 + (-\xi_n + s)^2 \right] \Big|_{\xi_n}^{-S} = \frac{C_{o1}}{2} \left\{ \ln \left[\eta_n^2 + (-\xi_n - S)^2 \right] - \ln \left[\eta_n^2 \right] \right\}.$$

Подставляя уравнение вихревого слоя $y = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a} - a$ в формулы преобразования координат точки конца радиуса-вектора, получим

$$\xi_n = (x - x_n) \cdot \operatorname{sech} \frac{x}{a} + \left(a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a} - a - y_n \right) \cdot \operatorname{th} \frac{x}{a};$$

$$\eta_n = -(x - x_n) \cdot \operatorname{th} \frac{x}{a} + \left(a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a} - a - y_n \right) \cdot \operatorname{sech} \frac{x}{a}.$$

При известном годографе радиуса-вектора $y_n = f(x_n)$ функции $\xi_n = f(x_n, y_n)$, $\eta_n = f(x_n, y_n)$ однозначно определяют величины скоростей u_{ξ} и v_{η} , поскольку абсолютная величина вектора индуцированной скорости равна $w_{\xi\eta} = \sqrt{u_{\xi}^2 + v_{\eta}^2}$, а направление определяется величиной $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\eta_n}{\xi_n}$.

Для определения величин скоростей на оси Ox системы координат xOy примем $x_n = x$, $a y_n = 0$, тогда для формул преобразования координат получим

$$\xi_n = \left(a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a} - a \right) \operatorname{th} \frac{x}{a} = a \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{a} - a \cdot \operatorname{th} \frac{x}{a}; \quad \eta_n = \left(a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a} - a \right) \operatorname{sech} \frac{x}{a} = a - a \cdot \operatorname{sech} \frac{x}{a}.$$

Подстановка этих формул в выражение для u_{ξ} позволяет записать

$$u_{\xi} = C_{o1} \operatorname{arctg} \frac{\xi_n - S}{\eta_n} = C_{o1} \operatorname{arctg} \frac{a \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{a} - a \cdot \operatorname{th} \frac{x}{a} - a \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{a}}{a - a \cdot \operatorname{sech} \frac{x}{a}} = C_{o1} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\operatorname{th} \frac{x}{2a}} \right).$$

С учетом того, что $\operatorname{th} \left(i \frac{x}{2a} \right) = i \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2a} \right)$, запишем $u_{\xi} = i \cdot C_{o1} \frac{2a}{x}$ или, отбрасывая мнимую единицу, окончательно,

$$u_{\xi} = C_{o1} \frac{2a}{x} = \frac{u_o r_o}{S} \frac{2 \cdot 2 \cdot r_o}{x} = \frac{d_o}{S} \frac{d_o u_o}{x},$$

где $d_o = 2r_o$ – диаметр выходного сечения струеобразующего насадка.

Полученное выражение с точностью до множителя совпадает с формулой для осевой скорости струи

$$u = \varphi \frac{u_o d_o}{x},$$

где φ – коэффициент в формуле А.Я. Миловича [3, 4].

Что касается нормальной составляющей v_n , то она ответственна за вовлечение масс жидкости в струю из внешней области.

Таким образом, можно считать доказанным соответствие предлагаемой модели струи классической теории гидравлических струй.

Для упрощения функция скорости может быть определена по величине напряженности $u = C_{o1} \frac{2a}{x}$, которая имеет раз-

мерность скорости, поскольку начальная напряженность вихря C_{o1} отнесена к длине границы струи S .

При точной постановке задачи величина индуцированной скорости должна определяться проектированием компонент скорости u_ξ и v_n в точке на линии $(x, -a)$, расположенной параллельно оси Ox и ниже ее на величину $-a$.

На этой линии находится слой грунта до размыва при горизонтальной оси струи.

Для наклонной рисбермы следует учитывать угол наклона концевой части, который, по Ц.Е. Мирцхулаве, равен θ [5].

Интерпретация результатов

Получена зависимость для величины продольной скорости потока, сходящего с концевого крепления флютбета от расстояния между крайней кромкой флютбета и нижерасположенным створом, соответ-

ствующая классическим зависимостям теории струй и уточняющая значение коэффициента скорости.

Список литературы

1. Белов И.А. Модели турбулентности: учеб. пособие. – Л.: Изд-во ЛМИ, 1986. – 100 с.
2. Кузнецова Ю.А. Средства инженерно-экологической защиты нижних бьефов гидроузлов: монография. – Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет, 2014. – 260 с.
3. Милович А.Я. Гидродинамические основы газовой борьбы. – Новочеркасск: Донской печатник, 1918. – 95 с.
4. Милович А.Я. Теория динамического взаимодействия тел и жидкости. – М.: Госстройиздат, 1955. – 310 с.
5. Мирцхулава Ц.Е. Основы физики и механики эрозии русел. – Л.: Гидрометеоздат, 1988. – 303 с.

References

1. Belov I.A. Modeli turbulentnosti: ucheb. posobie. L.: Izd-vo LMI, 1986. 100 p.
2. Kuznecova Ju.A. Sredstva inzhenerno-jekologicheskoy zashhity nizhnih b'efov gidrouzlov: monografija. – Yoshkar-Ola: Povolzhskij gosudarstvennyj tehnologicheskij universitet, 2014. 260 p.
3. Milovich A.Ja. Hidrodinamicheskie osnovy gazovoj borby. Novoчеркассk: Donskoj pechatnik, 1918. 95 p.
4. Milovich A.Ja. Teorija dinamičeskogo vzaimodejstvija tel i zhidkosti. M.: Gosstrojizdat, 1955. 310 p.
5. Mirchulava C.E. Osnovy fiziki i mehaniki jerozii rusel. L.: Gidrometeoizdat, 1988. 303 p.

Рецензенты:

Мануковский А.Ю., д.т.н., профессор кафедры промышленного транспорта строительства и геодезии, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова», г. Воронеж;
Алибеков С.Я., д.т.н., профессор кафедры электроснабжения и технической диагностики, ФГБОУ ВПО «Марийский государственный университет», г. Йошкар-Ола.