УДК 006.91

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК АВТОНОМНЫХ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Безуглов Д.А., Юхнов В.И.

Северо-Кавказский филиал ФГБОУ ВО «Московский технический университет связи и информатики», Ростов-на-Дону, e-mail: bezuglovda@mail.ru

Проведен анализ методов уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова, квазилинейного метода и метода функциональных рядов на конкретном примере. Квазилинейный метод сравнительно прост и для рассмотренного примера дает хорошие результаты. Однако приводимое сравнение методов только по точности определения дисперсии (а не других характеристик) не является показательным согласно принятому критерию нахождения эквивалентного коэффициента усиления. Справедливость метода теоретически не обоснована; он является эвристическим и логически непоследовательным. Он не позволяет в полном объеме анализировать работу многих практически интересных радиотехнических систем (системы с несколькими состояниями устойчивого равновесия, захват и срыв слежения следящих систем, умножители частоты и др.). Метод функциональных рядов по существу обобщает квазилинейный метод и имеет примерно ту же область применения. Он позволяет получить более точные результаты, но является весьма трудоемким. При его применении возникает дополнительная проблема — оценка сходимости ряда. Когда выходной процесс системы можно свести к марковскому, применение уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова позволяет получить точное решение задачи. Поэтому всегда целесообразно на основании физических соображений выходной процесс аппроксимировать марковским.

Ключевые слова: уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова, квазилинейный метод, метод функциональных рядов

NONLINEAR TRANSFORMATION OF THE AUTONOMOUS METROLOGICAL CHARACTERISTICS OF MEASURING INSTRUMENTS

Bezuglov D.A., Yukhnov V.I.

North Caucasian branch Moscow Technical University of Communications and Informatics, Rostov-on-don, e-mail: bezuglovda@mail.ru

The analysis methods for the equations of the Fokker – Planck –Kolmogorov method and the method of quasi-linear functional series of a specific example. Quasi-linear method is relatively simple, and for the considered example gives good results. However, these methods are compared only on the precision of determining the variance (and not other characteristics) is not representative according to the making the criterion of finding an equivalent gain. The equity method is not theoretically justified; it is a heuristic and logically inconsistent. It is not possible to fully analyze the work of many practically interesting radio systems (systems with multiple stable equilibrium States, the capture and the disruption of tracking servo systems, frequency multipliers, etc.) functional series Method essentially generalizes the method of quasi-linear and has roughly the same scope. It allows you to get more accurate results but is very time-consuming. In its application there is an additional issue — the assessment of convergence of the series. When the output process of the system can be reduced to Markov, the use of equations of Fokker – Planck – Kolmogorov allows us to obtain exact solution of the problem. Therefore always advisable on the basis of physical considerations, the output process of approximated by a Markov.

Keywords: equation of Fokker-Planck-Kolmogorov, quasilinear method, the functional series

Как показали многочисленные исследования электронных средств измерений, дрейф метрологических характеристик из-за влияющих факторов в общем случае может быть представлен как нелинейное преобразование данных метрологических характеристик во времени. Среди нелинейных преобразований можно выделить два класса [1]: безынерционные (функциональные) и инерционные. Наиболее характерными для автономных средств измерений являются нелинейные инерционные преобразования. При таких преобразованиях изменения метрологических характеристик описываются нелинейным дифференциальным уравнением.

Существуют три основных метода решения нелинейных стохастических дифференциальных уравнений [1, 2]: с помощью уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова, квазилинейный метод и метод функциональных рядов.

Цель работы – анализ методов уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова, квазилинейного метода и метода функциональных рядов на конкретном примере.

Уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова

Рассмотрим нелинейную инерционную систему второго порядка, которая описывается следующим нелинейным стохастическим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}+\alpha\frac{d\eta}{dt}+\alpha_1\eta+\alpha_3\eta^3+...+\alpha_{2n-1}\eta^{2n-1}=\xi(t), \quad (1)$$

где α и α_i – постоянные коэффициенты; n – положительное целое число; $\xi(t)$ – гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием и дельтаобразной корреляционной функцией

$$M\{\xi(t)\}=0;$$

$$M\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}=\left(\frac{N_0}{2}\right)\delta(t_2-t_1). \quad (2)$$

Перейдём в уравнении (1) к новым переменным: $\lambda_1=\eta$, $\lambda_1=d\eta/dt$. Тогда вместо дифференциального уравнения второго порядка получим систему из двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\lambda_1}{dt}=\lambda_2; \qquad \frac{d\lambda_2}{dt}=-\alpha\lambda_2-f_0(\lambda_1)+\xi(t),$$

где

$$f_0(\lambda_1)=\alpha_1\lambda_1+\alpha_3\lambda_1^3+...+\alpha_{2n-1}\lambda_1^{2n-1}. \quad (3)$$

Двухкомпонентный процесс $\{\lambda_1(t), \lambda_2(t)\}$ является непрерывнозначным диффузионным марковским процессом. Вычислив по обычным правилам функции сноса и диффузии, для одномерной плотности вероятности $p(\lambda_1, \lambda_2, t)$ можем записать уравнение ФПК

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial\lambda_1}(\lambda_2 p)-\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\{[-\alpha\lambda_2-f_0(\lambda_1)]p\}+\frac{N_0}{4}\frac{\partial^2 p}{\partial\lambda_2^2}. \quad (4)$$

Допустим, что нелинейная функция $f_0(\lambda_1)$ такова, что при $t\to\infty$ система стремится к стационарному состоянию. Положив $\frac{\partial p}{\partial t}=0$, для стационарной плотности вероятности $p_{st}(\lambda_1, \lambda_2)$ из (4) получим уравнение

$$-\lambda_2\frac{\partial p_{st}}{\partial\lambda_1}+\alpha_2 p_{st}+[\alpha\lambda_2-f_0(\lambda_1)]\frac{\partial p_{st}}{\partial\lambda_2}+\frac{N_0}{4}\frac{\partial^2 p_{st}}{\partial\lambda_2^2}=0. \quad (5)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде произведения двух функций:

$$p_{st}(\lambda_1, \lambda_2)=g(\lambda_1)h(\lambda_2). \quad (6)$$

Подставив (6) в (5) и расщепив переменные, для определения функций g и h получим систему дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{N_0}{4}\right)h''(\lambda_2)+\alpha\lambda_2 h'(\lambda_2)+\alpha h(\lambda_2)=0; \qquad \frac{g'(\lambda_1)}{g(\lambda_1)f_0(\lambda_1)}=\frac{h'(\lambda_2)}{\lambda_2 h(\lambda_2)}=M,$$

где штрихами обозначены производные. Из второго уравнения находим $h(\lambda_1)=C\exp\left(\frac{M\lambda_2^2}{2}\right)$. Подстановка этого выражения в первое дифференциальное уравнение даёт $M=-4\alpha/N_0$. Поэтому

$$g(\lambda_1)=C\exp\left[M\int_0^{\lambda_1}f_0(u)du\right]=C\exp\left[-\frac{4\alpha}{N_0}\int_0^{\lambda_1}f_0(u)du\right]. \quad (7)$$

Так как, $\lambda_1=\eta$, то из (7) получаем интересующую нас одномерную плотность вероятности выходного процесса $\eta(t)$

$$p_{st}(\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{st}(\eta,\lambda_2)d\lambda_2=C\exp\left[-\frac{4\alpha}{N_0}\int_0^{\eta}f_0(u)du\right]=$$
$$=C\exp\left[-\frac{4\alpha a_1}{N_0}\left(\frac{\eta^2}{2}+\frac{a_3}{a_1}\frac{\eta^4}{4}+...+\frac{a_{2n-1}}{a_1}\frac{\eta^{2n}}{2n}\right)\right], \quad (8)$$

где постоянная C находится из условия нормировки плотности вероятности.

В частном случае, когда $a_1>0$, $a_3>0$, $a_5=\ldots=a_{2n-1}=0$, плотность вероятности принимает вид

$$p_{st}(\eta)=C\exp\left[-\frac{4\alpha a_1}{N_0}\left(\frac{\eta^2}{2}+\frac{a_3}{a_1}\frac{\eta^4}{4}\right)\right]. \quad (9)$$

Воспользовавшись известным интегралом

$$\int_0^\infty \exp(-\beta^2 x^4 - 2\gamma^2 x^2)dx = 2^{-3/2}\frac{\gamma}{\beta}\exp\left(\frac{\gamma^4}{2\beta^2}\right)K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\gamma^4}{2\beta^2}\right),$$

где $K_v(z)$ – цилиндрическая функция мнимого аргумента, получим

$$C = \left(\frac{2}{a_3/a_1}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{\alpha a_1}{2N_0 a_3/a_1}\right)K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha a_1}{2N_0 a_3/a_1}\right). \quad (10)$$

Так как плотность вероятности является частной функцией, то все нечетные моменты выходного процесса $\eta(t)$ равны нулю, а дисперсия может быть определена по формуле

$$D_\eta = \int_{-\infty}^{\infty}\eta^2 p_{st}(\eta)d_\eta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\eta^2\exp\left[-\frac{4\alpha a_1}{N_0}\left(\frac{\eta^2}{2}+\frac{a_3}{a_1}\frac{\eta^4}{4}\right)\right]d_\eta \bigg/ \int_{-\infty}^{\infty}\eta^2\exp\left[-\frac{4\alpha a_1}{N_0}\left(\frac{\eta^2}{2}+\frac{a_3}{a_1}\frac{\eta^4}{4}\right)\right]d_\eta. \quad (11)$$

Зависимость дисперсии D_η от $N_0/4\alpha a_1$ для нескольких значений параметра a_3/a_1, полученная численным интегрированием, воспроизведена на рис. 1 (непрерывные кривые).

Квазилинейный метод и метод функциональных рядов

Идея этого метода, называемого также методом статистической линеаризации [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9], состоит в нахождении наилучшей (в определенном смысле) замены нелинейной системы линейной. В общем случае затруднительно линеаризовать зависимость выходного процесса от входного воздействия. Однако при наличии в системе безынерционных нелинейных элементов можно искусственно произвести линеаризацию только этих элементов, оставив без изменения линейную часть. При этом получается простая линейная система.

Пусть зависимость выходного процесса $\zeta(t)$ безынерционной нелинейности от входного $\eta(t)$ имеет вид $\zeta(t) = f(\eta(t))$. В квазистатическом методе функция $\zeta = f(\eta)$ заменяется линейной

$$\zeta = k_0 + k\eta,$$

где k – так называемый эквивалентный коэффициент усиления. Выбирая тот или иной критерий линеаризации, можно определить коэффициенты k_0 и k.

Если принять критерий минимума среднего квадрата ошибки

$$\varepsilon^2 = M\left\{(\zeta-\zeta)^2\right\} =$$
$$= M\left\{\left[f(\eta)-k_0-k\eta\right]^2\right\} = \min_{k_0,k}, \quad (12)$$

то для определения коэффициентов k_0 и k получим систему двух алгебраических уравнений

$$\frac{\partial\varepsilon^2}{\partial k^2} = 2\left(kM\left\{\eta^2\right\}+k_0 m_\eta - M\left\{\zeta\eta\right\}\right) = 0;$$

$$\frac{\partial\varepsilon^2}{\partial k_0^2} = 2\left(km_\eta + k_0 - m_\zeta\right) = 0,$$

где

$$m_\eta = M\left\{\eta(t)\right\};\ m_\zeta = M\left\{\zeta(t)\right\} = M\left\{f\left(\eta(t)\right)\right\}.$$

Отсюда

$$k = M\left\{\left[f(\eta)-m_\zeta\right]\left[\eta-m_\eta\right]\right\}D_\eta^{-1};$$

$$k_0 = m_\zeta - km_\eta. \quad (13)$$

Для определения коэффициентов k_0 и k по этим формулам необходимо знать вероятностные характеристики выходного процесса $\eta(t)$. Однако они пока неизвестны и должны быть получены в результате решения задачи. Поэтому излагаемый квазилинейный метод нельзя признать логически безупречным и достаточно обоснованным. Часто при нахождении коэффициентов k_0 и k формально полагают, что плотность вероятности выходного процесса $\eta(t)$ является нормальной (хотя, например, формула (13) свидетельствует, что это не так).

В рассматриваемом примере входной белый шум $\xi(t)$ имеет нулевое математическое ожидание и нелинейность нечетная. Поэтому математические ожидания процессов $\eta(t)$ и $\zeta(t) = f(\eta(t))$ будут равны нулю и формулы (13) упрощаются:

$$k = M\left\{\eta(t)f\left(\eta(t)\right)\right\}D_\eta^{-1}; \quad k_0 = 0. \quad (14)$$

Если формально принято, что процесс $\eta(t)$ имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией D_η, то для нелинейности

$$\zeta = \sum_{i=2}^{n} a_{2i-1}\eta^{2i-1} \quad (15)$$

эквивалентный коэффициент усиления будет равен

$$k = M\{\eta f(\eta)\} D_\eta^{-1} = \sum_{i=2}^{n} a_{2I-1} M\{\eta^{2i}\} D_\eta^{-1} = \\ = 1\cdot 3 a_3 D_\eta + \ldots + 1\cdot 3(2n-1) a_{2n-1} D_\eta^{-1}. \quad (16)$$

Здесь последнее равенство написано на основании известной формулы для четных моментов нормального распределения:

$$M\{\eta^{2i}\} = 1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2i-1) D_\eta^{i}. \quad (17)$$

Возвратимся теперь к исходному дифференциальному уравнению (6). Сущность квазилинейного метода состоит в том, что в уравнении (6) полином $a_3\eta^3 + \ldots + a_{2n-1}\eta^{2n-1}$ заменяется линейной функцией $k\eta$, что соответствует переходу от исходной нелинейной системы к линейной системе. Линеаризованная система имеет комплексную частотную характеристику

$$K(j\omega) = \left[(j\omega)^2 + \alpha j\omega + a_1 + k\right]^{-1}. \quad (18)$$

Спектральная плотность выходного процесса $\eta(t)$ в стационарном состоянии определяется известной формулой

$$S_\eta(\omega) = \left(\frac{N_0}{2}\right) \left|K(j\omega)\right|^2. \quad (19)$$

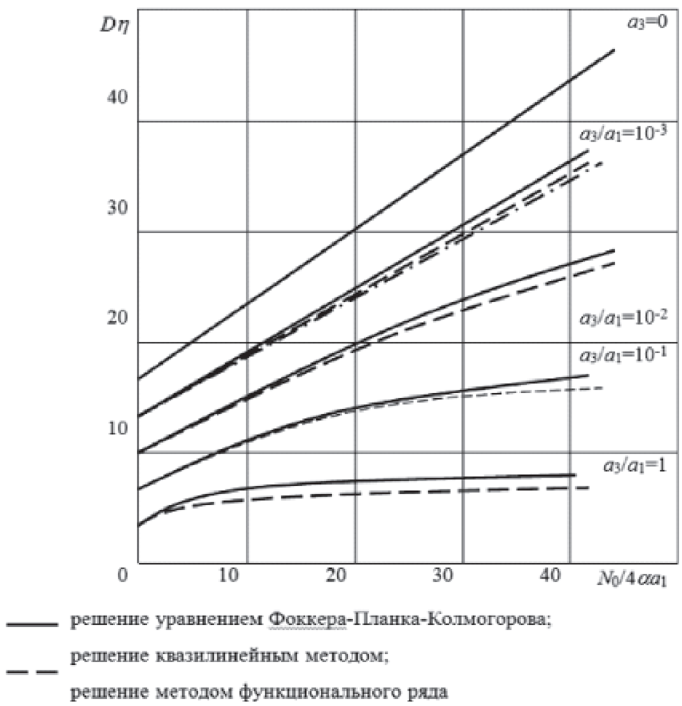
По спектральной плотности находим дисперсию

$$D_\eta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_\eta(\omega) d\omega = \frac{N_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|K(j\omega)\right|^2 d\omega = \frac{N_0}{4\alpha(a_1+k)}. \quad (20)$$

Подставив сюда k из (16), получим

$$\frac{N_0}{4\alpha a_1} = D_\eta + 1\cdot 3\frac{a_3}{a_1} D_\eta^2 + \ldots + 1\cdot 3 \ldots (2n-1)\frac{a_{2n-1}}{a_1} D_\eta^n. \quad (21)$$

На рисунке приведена зависимость D_η от $\frac{N_0}{4\alpha a_1}$ при нескольких значениях параметра $\frac{a_3}{a_1}$ для случая, когда $a_5 = \ldots = a_{2n-1} = 0$ (штриховые кривые).



Решения уравнения

Квазилинейный метод сравнительно прост и для рассмотренного примера дает хорошие результаты. Однако приводимое сравнение методов только по точности определения дисперсии (а не других характеристик) не является показательным согласно принятому критерию нахождения эквивалентного коэффициента усиления. Справедливость метода теоретически не обоснована; он является эвристическим и логически непоследовательным.

Метод функциональных рядов по существу обобщает квазилинейный метод и имеет примерно ту же область применения. Он позволяет получить более точные результаты, но является весьма трудоемким. При его применении возникает дополнительная проблема — оценка сходимости ряда.

Когда выходной процесс системы можно свести к марковскому, применение уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова позволяет получить точное решение задачи. Поэтому всегда целесообразно на основании физических соображений выходной процесс аппроксимировать марковским. Конечно, может оказаться (особенно для многомерных нелинейных систем), что получить аналитическое решение уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова затруднительно и потребуются приближенные аналитические или численные методы решения. Однако необходимо иметь в виду, что в принципе только теория марковских процессов позволяет математически анализировать нелинейные инерционные системы с несколькими состояниями устойчивого равновесия (включая процессы захвата и срыва слежения); других методов не существует.

Список литературы

1. Безуглов Д.А., Поморцев П.М. Автономные средства измерений: монография; Ростовская акад. сервиса (фил.), Южно-российский гос. ун-т экономики и сервиса. – Ростов-на-Дону, 2007. – 168 с.

2. Безуглов Д.А., Поморцев П.М. Методика увеличения межповерочного интер-вала групповой меры // Измерительная техника. – 1998. – № 11. – С. 3

3. Безуглов Д.А., Кузин А.П., Решетникова И.В., Юхнов В.И. Информационная технология идентификации изображений // Фундаментальные исследования. – 2015. – № 2–16. – С. 3466–3470.

4. Безуглов Д.А., Поморцев М.П., Поморцев П.М. Синтез алгоритмов субопти-мального оценивания единиц физических величин групповых эталонов // Вопросы радиоэлектроники. – 2002. – № 1. – С. 254.

5. Безуглов Д.А., Решетникова И.В., Юхнов В.И., Енгибарян И.А. Оптимальное оценивание сигналов в гартмановском датчике на фоне пуассоновских шумов // Фундаментальные исследования. – 2015. – № 2–16. – С. 3471–3475.

6. Безуглов Д.А., Решетникова И.В., Юхнов В.И., Ячменов А.А. Оптимальная оценка сигналов в адаптивных оптических системах передачи информации // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения. – 2014. – № 1 (53). – С. 30–35.

7. Безуглов Д.А., Рытиков С.Ю., Швидченко С.А. Метод вейвлет-дифференцирования в задаче выделения контуров // Успехи современной радио-электроники. – 2012. – № 6. – С. 52–57.

8. Безуглов Д.А., Цугурян Н.О. Дифференцирование результатов измерений сглаживающими кубическими B-сплайнами // Современные информационные технологии. – 2005. – № 1. – С. 73–78.

9. Безуглов Д.А., Юхнов В.И. Метод определения параметров движения точеч-ного источника с использованием высокоточных алгоритмов адаптивной оптики // Труды Международной научно-практической конференции «Транспорт-2014» в 4-х частях. – Ростов-на-Дону, 2014. – С. 23–25.

References

1. Bezuglov D.A., Pomorcev P.M. Avtonomnye sredstva izmerenij / Monografija; Rostovskaja akad. servisa (fil.), Juzhno-rossijskij gos. un-t jekonomiki i servisa. Rostov-na-Donu, 2007. 168 p.

2. Bezuglov D.A., Pomorcev P.M. Metodika uvelichenija mezhpoverochnogo intervala gruppovoj mery // Izmeritelnaja tehnika. 1998. no. 11. pp. 3.

3. Bezuglov D.A., Kuzin A.P., Reshetnikova I.V., Juhnov V.I. Informacionnaja tehnologija identifikacii izobrazhenij // Fundamentalnye issledovanija. 2015. no. 2–16. pp. 3466–3470.

4. Bezuglov D.A., Pomorcev M.P., Pomorcev P.M. Sintez algoritmov suboptimalnogo ocenivanija edinic fizicheskih velichin gruppovyh jetalonov // Voprosy radiojelektroniki. 2002. no. 1. pp. 254.

5. Bezuglov D.A., Reshetnikova I.V., Juhnov V.I., Engibarjan I.A. Optimalnoe ocenivanie signalov v gartmanovskom datchike na fone puassonovskih shumov // Fundamentalnye issledovanija. 2015. no. 2–16. pp. 3471–3475.

6. Bezuglov D.A., Reshetnikova I.V., Juhnov V.I., Jachmenov A.A. Optimalnaja ocenka signalov v adaptivnyh opticheskih sistemah peredachi informacii // Vestnik Rostovskogo gosudarstvennogo universiteta putej soobshhenija. 2014. no. 1 (53). pp. 30–35.

7. Bezuglov D.A., Rytikov S.Ju., Shvidchenko S.A. Metod vejvlet-differencirovanija v zadache vydelenija konturov // Uspehi sovremennoj radiojelektroniki. 2012. no. 6. S. 52–57.

8. Bezuglov D.A., Cugurjan N.O. Differencirovanie rezultatov izmerenij sglazhivajushhimi kubicheskimi V-splajnami // Sovremennye informacionnye tehnologii. 2005. no. 1. pp. 73–78.

9. Bezuglov D.A., Juhnov V.I. Metod opredelenija parametrov dvizhenija tochechnogo istochnika s ispolzovaniem vysokotochnyh algoritmov adaptivnoj optiki // V sbornike: Trudy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii «Transport-2014» v 4-h chastjah. Rostov-na-Donu, 2014. pp. 23–25.

Рецензенты:

Звездина М.Ю., д.ф.-м.н., доцент, зав. кафедрой «Радиоэлектроника», ФГБОУ ВПО «Донской государственный технический университет», г. Ростов-на-Дону;

Габриэльян Д.Д., д.т.н., профессор, заместитель начальника научно-технического комплекса «Антенные системы» по науке, ФНПЦ ФГУП «Ростовский научно-исследовательский институт радиосвязи», г. Ростов-на-Дону.