

УДК 539.3: 539.374

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ЗАПАСА НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ИЗОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ ИХ СЛОЖНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Сибгатуллин К.Э., Сибгатуллин Э.С.

*Набережночелнинский институт (филиал) Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Набережные Челны, e-mail: kamilll@mail.ru, cibes@mail.ru*

Рассмотрены стержни произвольной формы, изготовленные из однородного изотропного материала. В общем случае в поперечном сечении стержня отличны от нуля все внутренние силовые факторы (ВСФ) – три силы и три момента. При известных значениях ВСФ определяется соответствующий вектор прочности в пространстве ВСФ и коэффициент запаса как отношение модуля вектора прочности к модулю вектора ВСФ. Расчётная модель базируется на гипотезах плоских сечений, малых деформаций, на соотношениях теории течения для жёсткопластического тела, использует постулат Друккера. Предлагаемые метод и алгоритм определения коэффициента запаса прочности, с использованием предельной комбинации ВСФ в сечении стержня, дают существенно более правильное представление о его прочности, чем соответствующий расчёт с использованием предельной комбинации напряжений в опасной точке этого сечения. Приведены примеры расчетов: составного стержня, поперечное сечение которого составлено из прямоугольника, швеллера и равнобокого уголка, и крыла самолёта Ту-154.

Ключевые слова: стержни, изотропия, запас прочности, метод предельных состояний

THE DEFINITION OF THE ASSURANCE FACTOR OF THE BEARING CAPACITY ISOTROPIC RODS IN THE GENERAL CASE OF THEIR COMPLEX RESISTANCE

Sibgatullin K.E., Sibgatullin E.S.

*Naberezhnye Chelny branch of Kazan (Volga region) Federal University,
Naberezhnye Chelny, e-mail: kamilll@mail.ru, cibes@mail.ru*

Examined the rods of arbitrary shape, made of a homogeneous isotropic material. In the General case, in a cross-section of the rod are different from zero all the internal power factors (IPF) – three forces and three moments. With known values of the IPF is determined by the vector of strength in the space of the IPF and the assurance factor, as the ratio of the module of vector strength to the unit vector of the IPF. The design model is based on the hypothesis of flat sections, small strains, on correlations of flow theory to the hard-plastic body, using Drucker postulate. The proposed method and algorithm for determining the safety factor, using a combination of extreme the IPF in the section of the rod, gives much more accurate idea of its strength than the corresponding calculation of the limit using a combination of stresses in the dangerous point of this section. Examples of calculations: the composite rod, whose cross section is made up of a rectangle, channels, and equal angles, and the wing of the aircraft Tu-154.

Keywords: cores, isotropy, margin of safety, method of limit states

Во многих курсах науки о сопротивлении материалов [1, 2, 3 и др.] рассматривают, как правило, следующие частные случаи сложного сопротивления стержня: косой изгиб, внецентренное сжатие (растяжение), изгиб с кручением. Влиянием поперечных сил на разрушение стержня при его сложном сопротивлении часто пренебрегают, считая это влияние несущественным. Проверку прочности стержня осуществляют, сопоставляя наибольшее нормальное (или эквивалентное) напряжение $\max|\sigma|$, действующее в опасной точке стержня, с соответствующим опасным напряжением $|\sigma_u|$ для материала. В настоящей работе предложена методика проверки прочности изотропных стержней, при нахождении в пространстве сил и моментов. Она является развитием работы [4].

На рис. 1 показаны ВСФ, действующие в поперечном сечении стержня: N_x – нор-

мальная сила; Q_y^*, Q_z^* – поперечные силы; M_x^* – крутящий момент; M_y^*, M_z^* – изгибающие моменты. При известном векторе ВСФ $\vec{R}^* \{N_x^*, Q_y^*, Q_z^*, M_x^*, M_y^*, M_z^*\}$ необходимо определить соответствующий ему вектор прочности $\vec{R} \{N_x, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z\}$ и коэффициент запаса несущей способности рассматриваемого сечения

$$k = \left| \frac{\vec{R}}{\vec{R}^*} \right|. \quad (1)$$

На рис. 2 схематически изображена предельная поверхность (поверхность прочности) Σ в пространстве ВСФ. Здесь $\vec{OA} = \vec{R}^*$ – известный вектор ВСФ (например, из решения задачи о напряженно-деформированном состоянии стержня методами сопротивления материалов). $\vec{OB} = \vec{R}$ – искомый

вектор прочности, соответствующий вектору \vec{R}^* . Очевидно, что векторы \vec{R} и \vec{R}^* должны лежать на одной прямой и быть одинаково направленными; их начала должны совпадать с началом координат в пространстве ВСФ.

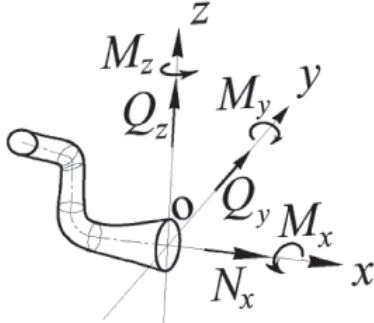


Рис. 1. ВСФ, действующие в поперечном сечении стержня

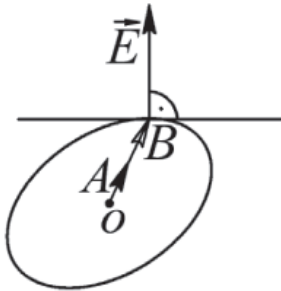


Рис. 2. Поверхность прочности Σ в пространстве ВСФ

Критерий достижения предельного состояния материала стержня запишем в следующем виде:

$$\sigma_{xx}^2 + 3\sigma_{yx}^2 + 3\sigma_{zx}^2 = \sigma_0^2. \quad (2)$$

Критерий (2) для стержней следует из критерия Мизеса [5], когда справедливы следующие гипотезы:

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0; \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0.$$

Здесь σ_{ij} , ε_{ij} ($i, j = x, y, z$) – компоненты тензоров напряжений и деформации соответственно; σ_0 – опасное значение нормального напряжения при линейном напряженном состоянии. В работе [4], исходя из уравнения (2) и используя жесткопластическую модель деформируемого твердого тела, получили следующие параметрические уравнения предельной поверхности в пространстве ВСФ для изотропных стержней:

$$N_x = 0,5(e_{xx}I_1 - \dot{\chi}_{yx}I_2 + \dot{\chi}_{zx}I_3);$$

$$Q_y = \frac{1}{12}(\dot{\gamma}_{yx}I_1 - \dot{\chi}_{xx}I_3);$$

$$Q_z = \frac{1}{12}(\dot{\gamma}_{zx}I_1 + \dot{\chi}_{xx}I_2);$$

$$M_x = \frac{1}{12}(\dot{\gamma}_{zx}I_2 - \dot{\gamma}_{yx}I_3 + \dot{\chi}_{xx}(I_4 + I_6)); \quad (3)$$

$$M_y = 0,5(\dot{e}_{xx}I_3 - \dot{\chi}_{yx}I_5 + \dot{\chi}_{xx}I_6);$$

$$M_z = 0,5(-\dot{e}_{xx}I_2 + \dot{\chi}_{yx}I_4 - \dot{\chi}_{zx}I_5).$$

Параметрами в системе уравнений (3) являются отношения компонент вектора скоростей обобщенных перемещений $\vec{E} \{ \dot{e}_{xx}, \dot{\gamma}_{yx}, \dot{\gamma}_{zx}, \dot{\chi}_{xx}, \dot{\chi}_{yx}, \dot{\chi}_{zx} \}$. В общем случае эти параметры невозможно исключить из уравнений (3), используя для этой цели точные математические методы. В работе [4] приведены алгоритм построения различных сечений поверхности (3) и некоторые примеры построения таких сечений. Информация о сечениях поверхности (3) полезна, например, при решении задач о предельном состоянии стержневых конструкций (балок, ферм, рам) с применением кинематического и статического методов теории предельного равновесия [5] и аппарата математического программирования (см., например, работы [6, 7]). Различные сечения поверхности (3) могут быть полезными и при определении коэффициента запаса по несущей способности в частных случаях сложного сопротивления стержней. Например, имея сечения поверхности (3) координатной плоскостью $N_x O M_x$, можно сравнить соответствующие векторы $\vec{R}^* \{ N_x^*, 0, 0, M_x^*, 0, 0 \}$ и $\vec{R} \{ N_x, 0, 0, M_x, 0, 0 \}$ при растяжении (сжатии) с кручением. Можно предположить, что область практических приложений уравнений (3) существенно расширится, если удастся использовать их при определении коэффициента запаса несущей способности в самом общем случае сложного сопротивления стержней. Ниже приведен вариант решения этой проблемы.

Компоненты коллинеарных векторов \vec{R} и \vec{R}^* удовлетворяют следующим равенствам:

$$\frac{N_x}{N_x^*} = \frac{Q_y}{Q_y^*} = \frac{Q_z}{Q_z^*} = \frac{M_x}{M_x^*} = \frac{M_y}{M_y^*} = \frac{M_z}{M_z^*} = k. \quad (4)$$

Используя (4), можно записать следующую систему уравнений:

$$Q_y^* N_x - N_x^* Q_y = 0; \quad Q_z^* Q_y - Q_y^* Q_z = 0;$$

$$M_x^* Q_z - Q_z^* M_x = 0; \quad (5)$$

$$M_y^* M_x - M_x^* M_y = 0; \quad M_z^* M_y - M_y^* M_z = 0.$$

Подставив (3) в (5), получаем

$$\begin{aligned}
 6Q_y^* (\dot{e}_{xx} I_1 - \dot{\chi}_{yx} I_2 + \dot{\chi}_{zx} I_3) - N_x^* (\dot{\gamma}_{yx} I_1 - \dot{\chi}_{xx} I_3) &= 0; \\
 Q_z^* (\dot{\gamma}_{yx} I_1 - \dot{\chi}_{xx} I_3) - Q_y^* (\dot{\gamma}_{zx} I_1 + \dot{\chi}_{xx} I_2) &= 0; \\
 M_x^* (\dot{\gamma}_{zx} I_1 + \dot{\chi}_{xx} I_2) - Q_z^* (\dot{\gamma}_{zx} I_2 - \dot{\gamma}_{yx} I_3 + \dot{\chi}_{xx} (I_4 + I_6)) &= 0; \\
 M_y^* (\dot{\gamma}_{zx} I_2 - \dot{\gamma}_{yx} I_3 + \dot{\chi}_{xx} (I_4 + I_6)) - 6M_x^* (\dot{e}_{xx} I_3 - \dot{\chi}_{yx} I_5 + \dot{\chi}_{xx} I_6) &= 0; \\
 M_z^* (\dot{e}_{xx} I_3 - \dot{\chi}_{yx} I_5 + \dot{\chi}_{xx} I_6) - M_y^* (-\dot{e}_{xx} I_2 + \dot{\chi}_{yx} I_4 - \dot{\chi}_{zx} I_5) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Так как в рассматриваемом случае существенное значение имеет только направление вектора \vec{E} , а его длина может быть произвольной, в качестве дополнительного к системе (6) примем уравнение

$$\dot{e}_{xx}^2 + \dot{\gamma}_{yx}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2 + \dot{\chi}_{xx}^2 + \dot{\chi}_{zx}^2 + \dot{\chi}_{yx}^2 = 1. \tag{7}$$

Алгоритм определения коэффициента запаса по предельным состояниям изотропных стержней в общем случае их сложного сопротивления:

1. Определить вектор ВСФ $\vec{R}^* \{N_x^*, Q_y^*, Q_z^*, M_x^*, M_y^*, M_z^*\}$ в опасном сечении стержня.
 2. Решить систему уравнений (6), (7) относительно $\dot{e}_{xx}, \dot{\gamma}_{yx}, \dot{\gamma}_{zx}, \dot{\chi}_{xx}, \dot{\chi}_{zx}, \dot{\chi}_{yx}$, т.е. найти вектор \vec{E} , связанный с вектором прочности \vec{R} ассоциированным законом [5] (рис. 2).
 3. Используя формулы (3), по известному вектору \vec{E} определить соответствующий вектор прочности $\vec{R} \{N_x, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z\}$.
 4. Проверить выполнение условий (4).
 5. Используя (1), определить коэффициент запаса прочности k изотропного стержня по методу предельных состояний.
- Искомые компоненты вектора \vec{E} присутствуют и в составе подынтегральных функций интегралов по площади поперечного сечения I_1-I_6 [4].

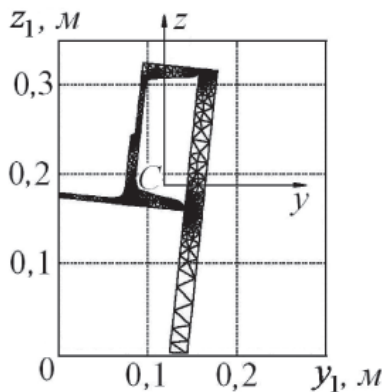


Рис. 3. Поперечное сечение составного стержня

Рассмотрим составной стержень, поперечное сечение которого показано на рис. 3. Прямоугольник имеет размеры $0,02 \times 0,32$ м, размеры швеллера соответствуют № 16, а равнобокого уголка – № 8. На рис. 3 представлен вариант разбиения сечения на конечные элементы – для численного вычисления интегралов I_1-I_6 . Оси y, z – главные центральные оси сечения, y_1, z_1 – произвольные оси. Для этого стержня в работе [4] приведены некоторые размеры предельной поверхности (3).

С использованием программы, реализующей вышеописанный алгоритм, были получены результаты, приведенные в таблице. Строки 1–8 соответствуют сечению, изображенному на рис. 3; в них силы умножены на 10^3 , моменты – на 10^4 . Строки 9–14 соответствуют сечению, приведенному на рис. 4. Силы имеют размерность м^2 , моменты – м^3 .

В качестве второго примера рассмотрим определение коэффициентов запаса прочности для сечения крыла самолёта Ту-154 при различных сочетаниях заданных внутренних сил и моментов (рис. 4). Геометрические параметры крыла приведены на сайте <http://www.twirpx.com/files/transport/aircrafting/ft.blueprint/>. На рис. 4 выделена учитываемая при расчётах часть профиля крыла.

Предлагаемая методика проверки прочности стержней имеет следующие достоинства:

1. Исчезает необходимость выделения частных видов сложного сопротивления стержней (косой изгиб, изгиб с кручением и т.п.).
2. Все компоненты ВСФ, действующие в поперечном сечении стержня, на равных правах участвуют в процессе проверки прочности.
3. На форму и размеры стержня накладываются только самые общие ограничения, принятые в теории стержней.
4. Метод проверки прочности по предельным состояниям позволяет точнее определять коэффициент запаса прочности, чем метод расчета по допускаемым напряжениям – особенно в тех случаях, когда имеет место вязкое разрушение. В работе [8] отмечено: «Очевидно, что расчет

по предельным нагрузкам дает существенно более правильное представление о прочности конструкции, чем расчет по максимальным напряжениям». Это утверждение справедливо и для отдельно взятых стержней.

Предлагаемая методика проверки прочности стержней по предельным состояниям может найти применение в практике расчетов и проектирования различных изделий.

Некоторые результаты определения k

№ п/п	$\frac{N_x}{N_x^*}$	$\frac{Q_y}{Q_y^*}$	$\frac{Q_z}{Q_z^*}$	$\frac{M_x}{M_x^*}$	$\frac{M_y}{M_y^*}$	$\frac{M_z}{M_z^*}$	k
1	$\frac{5,2523}{10,505}$	$\frac{2,4208}{4,8417}$	$\frac{2,267}{4,5339}$	$\frac{1,4023}{2,8047}$	$\frac{3,8428}{7,6857}$	$\frac{0,3701}{0,74019}$	0,5
2	$\frac{-5,2523}{-5,2523}$	$\frac{-2,4208}{-2,4208}$	$\frac{-2,267}{-2,267}$	$\frac{-1,4023}{-1,4023}$	$\frac{-3,8428}{-3,8428}$	$\frac{-0,3701}{-0,3701}$	1
3	$\frac{5,3438}{3,5625}$	$\frac{2,2673}{1,5115}$	$\frac{2,1172}{1,4114}$	$\frac{1,9013}{1,2676}$	$\frac{3,6628}{2,4419}$	$\frac{0,39165}{0,2611}$	1,5
4	$\frac{-5,3438}{-2,6719}$	$\frac{-2,2673}{-1,1336}$	$\frac{-2,1172}{-1,0586}$	$\frac{-1,9013}{-0,95066}$	$\frac{-3,6628}{-1,8314}$	$\frac{-0,39165}{-0,19582}$	2
5	$\frac{1,3077}{0,52307}$	$\frac{0,67519}{0,27007}$	$\frac{1,5247}{0,6099}$	$\frac{3,0607}{1,2243}$	$\frac{4,0957}{1,6383}$	$\frac{1,2397}{0,49587}$	2,5
6	$\frac{-8,184}{-2,728}$	$\frac{-1,9351}{-0,64505}$	$\frac{-1,8908}{-0,63028}$	$\frac{-0,61323}{-0,20441}$	$\frac{-0,63986}{-0,21329}$	$\frac{-0,056516}{-0,018839}$	3
7	$\frac{-3,7883}{-0,75766}$	$\frac{2,0758}{0,41515}$	$\frac{-1,8939}{-0,37878}$	$\frac{0,21893}{0,043785}$	$\frac{-0,42052}{-0,084104}$	$\frac{0,088655}{0,017731}$	5
8	$\frac{3,7883}{0,37883}$	$\frac{-2,0758}{-0,20758}$	$\frac{1,8939}{0,18939}$	$\frac{-0,21893}{-0,021893}$	$\frac{0,42052}{0,042052}$	$\frac{-0,88655}{-0,088655}$	10
9	$\frac{808,3}{538,87}$	$\frac{-183,62}{-122,41}$	$\frac{127,53}{85,018}$	$\frac{8,28 \cdot 10^6}{5,52 \cdot 10^6}$	$\frac{2,00 \cdot 10^6}{1,33 \cdot 10^6}$	$\frac{3,69 \cdot 10^7}{2,46 \cdot 10^7}$	1,5
10	$\frac{-808,3}{-404,15}$	$\frac{183,62}{91,81}$	$\frac{-127,53}{-63,764}$	$\frac{-8,28 \cdot 10^6}{-4,14 \cdot 10^6}$	$\frac{-2,00 \cdot 10^6}{-9,99 \cdot 10^5}$	$\frac{-3,69 \cdot 10^7}{-1,85 \cdot 10^7}$	2
11	$\frac{47656}{19062}$	$\frac{7942,7}{3177,1}$	$\frac{7942,7}{3177,1}$	$\frac{-0,00010795}{-4,32 \cdot 10^{-5}}$	$\frac{0,00102}{0,000408}$	$\frac{-0,00037232}{-0,00015}$	2,5
12	$\frac{-47656}{-15885}$	$\frac{-7942,7}{-2647,6}$	$\frac{-7942,7}{-2647,6}$	$\frac{10,795 \cdot 10^{-5}}{3,60 \cdot 10^{-5}}$	$\frac{-0,00102}{-0,00034}$	$\frac{0,00037232}{0,000124}$	3
13	$\frac{753,26}{215,22}$	$\frac{-219,09}{-62,598}$	$\frac{93,55}{26,728}$	$\frac{8,28 \cdot 10^6}{2,37 \cdot 10^6}$	$\frac{2,0 \cdot 10^6}{5,71 \cdot 10^5}$	$\frac{3,70 \cdot 10^7}{1,06 \cdot 10^7}$	3,5
14	$\frac{-753,26}{-188,31}$	$\frac{219,09}{54,773}$	$\frac{-93,55}{-23,387}$	$\frac{-8,28 \cdot 10^6}{-2,07 \cdot 10^6}$	$\frac{-2,00 \cdot 10^6}{-5,00 \cdot 10^5}$	$\frac{-3,70 \cdot 10^7}{-9,24 \cdot 10^6}$	4

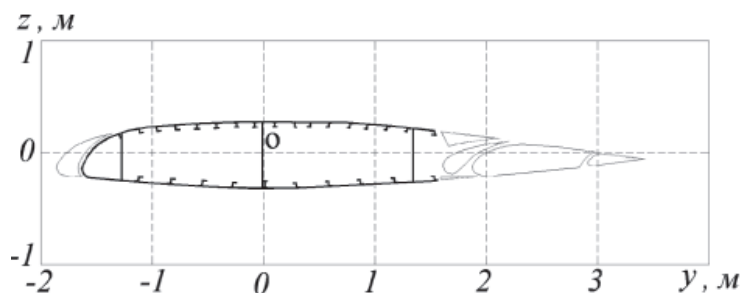


Рис. 4. Поперечное сечение крыла самолёта Ту-154

Список литературы

1. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопrotивление материалов. – М.: Высш. шк., 1975. – 654 с.
2. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Монахов Н.И. и др. Сопrotивление материалов. – М.: Высш. шк., 1975. – 480 с.
3. Терегулов И.Г. Сопrotивление материалов и основы теории упругости и пластичности. – М.: Высш. шк., 1984. – 472 с.
4. Сибгатуллин К.Э., Сибгатуллин Э.С. Метод вычисления предельных сил и моментов для изотропных стержней произвольного поперечного сечения в общем случае их сложного сопротивления // Изв. вузов. Авиационная техника. – 2008. – № 2. – С. 14–16.
5. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
6. Сибгатуллин К.Э., Сибгатуллин Э.С., Тимергалиев С.Н. Прогнозирование прочности стержней, входящих в конструкцию несущей системы автомобиля КамАЗ // Изв. ТулГУ. Технические науки. – 2010. – Вып. 4. – Ч. 2. – С. 153–160.
7. Сибгатуллин К.Э., Сибгатуллин Э.С., Шибakov В.Г. Оценка предельной грузоподъемности несущей системы самосвала КамАЗ 65115 // Перспективы науки. – 2010. – № 11(13). – С. 64–73.
8. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 312 с.

References

1. Darkov A.V., Shpiro G.S. *Soprotivlenie materialov* [Strength of Materials]. M.: Higher School, 1975. 654 p.
2. Smirnov A.F., Aleksandrov A.V., Monakhov N.I. i dr. *Soprotivlenie materialov* [Resistance of materials]. Moscow: Higher School, 1975. 480 p.
3. Teregulov I.G. *Soprotivlenie materialov i osnovy teorii uprugosti i plastichnosti* [Resistance of materials and the basic

theory of elasticity and plasticity]. Moscow: Higher School, 1984. 472 p.

4. Sibgatullin K.E., Sibgatullin E.S. *Metod vychisleniya predelnykh sil i momentov dlya izotropnykh stержney proizvol'nogo poperechnogo secheniya v obshchem sluchae ikh slozhnogo soprotivleniya* [The method of calculating the limit forces and moments for isotropic rods of any cross-section in the general case of a complex resistance] // Proceedings of the universities. Aviation equipment. 2008. no. 2, pp. 14–16.

5. Kachanov L.M. *Osnovy teorii plastichnosti* [Fundamentals of the theory of plasticity]. Moscow: Science, 1969. 420 p.

6. Sibgatullin K.E., Sibgatullin E.S., Timergaliev S.N. *Prognozirovanie prochnosti stержney, vkhodyashchikh v konstruktsiyu nesushchey sistemy avtomobilya KamAZ* [Prediction of strength rods included in the design of the support system KamAZ] // News TSU. Technical science. 2010. no. 4. Part. 2, pp. 153–160.

7. Sibgatullin K.E., Sibgatullin E.S., Shibakov V.G. *Otsenka predel'noy gruzopod'emnosti nesushchey sistemy samosvala KamAZ 65115* [Evaluation of ultimate load capacity of the carrier truck Kamaz 65115] // Prospects of science. 2010. no. 11 (13), pp. 64–73.

8. Kachanov L.M. *Osnovy mekhaniki razrusheniya* [Fundamentals of fracture mechanics]. Moscow: Science, 1974. 312 p.

Рецензенты:

Габбасов Н.С., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой математики, Набережночелнинский институт (филиал), Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Набережные Челны;

Хабибуллин Р.Г., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой сервиса транспортных систем, Набережночелнинский институт (филиал), Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Набережные Челны.