

УДК 66.023

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ УДАРНОГО СМЕШИВАНИЯ СЫПУЧИХ СРЕД

Капанова А.Б., Верлока И.И., Лебедев А.Е.

ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный технический университет»,
Ярославль, e-mail: kapranova_anna@mail.ru

Предложен стохастический метод формирования двумерных функций распределения вероятностей для разреженных потоков частиц сыпучих компонентов по их диаметрам и углам отклонения в факелах. При этом учитываются поступательное и вращательное движения частиц каждого потока, в том числе за счет их вторичных столкновений. Использован полуномальный закон при моделировании дифференциального распределения отраженных частиц по углам рассеивания. В рассматриваемом диапазоне изменения конструктивно-режимных параметров устройства получены пределы изменения угла наклона плоского отбойника. Полученное выражение для коэффициента неоднородности может быть использовано для формирования инженерной методики расчета устройства ударного действия для смешивания сыпучих материалов.

Ключевые слова: процесс смешивания сыпучих компонентов, устройство ударного действия, отбойная поверхность, разреженный поток, вторичные столкновения, конструктивные и режимные параметры устройства, дифференциальные функции распределения по диаметрам частиц и углам рассеивания, полуномальный закон распределения

THE MODELING OF THE TWO-DIMENSIONAL DISTRIBUTION FUNCTION FOR THE PROBABILITY FOR THE DESPERTION OF THE PERCUSSION MIXING OF THE FRAIBLE MEDIUM

Kapranova A.B., Verloka I.I., Lebedev A.E.

FGBOU VPO «Yaroslavl State Technical University», Yaroslavl, e-mail: kapranova_anna@mail.ru

Proposed a accidental method for the forming of the two-dimensional distribution function for the probability for the rarefied flows of the components particles according to its diameters and angles of the deflection in the torches. The translatory and rotatory motions of every stream's particles are considered at that, including due to its secondary collisions. The semi normal law used possessing of the modeling differential probability for the reflected particles by dispersion angles. In this range of constructive-regime parametres of the device obtained limits tilting flat bump. The resulting expression for the heterogeneity can be used for the formation of an engineering method for calculating the percussion device for mixing bulk materials.

Keywords: process of the mixing of the components, equipment of the impact action, breaking surface, rarefied flow, secondary collisions, design and regime set-up's parameters of the equipment, distribution function for the probability by components particles diameters and dispersion angles, semi normal law for the probability

Эффективность процесса смешивания сыпучих материалов в аппаратах с образованием разреженных потоков компонентов значительно повышается при использовании дополнительных отбойных элементов. Актуальная проблема оценки коэффициента неоднородности получаемой смеси может быть решена с помощью стохастического подхода [4, 7, 9] с учетом эффекта ударного взаимодействия формируемых разреженных факелов [2] с отбойной поверхностью заданной формы. Пусть установка имеет вращающийся барабан с радиально расположенными гибкими элементами при частоте вращения n , который имеет некоторый зазор с подвижной лентой. Данная лента одновременно служит транспортером – для сыпучих компонентов при их послышной подаче в указанный

зазор и для готовой смеси после отражения факелов разносортных материалов от установленного под углом γ плоского отбойника (рис. 1). Условно можно выделить два вида потоков – налетающие на отбойник после «срыва» твердых частиц дисперсных компонентов с гибких лопастей вращающегося барабана и отраженные от него.

Цель работы: моделирование дифференциальных функций распределения сыпучих компонентов в рабочем объеме барабанно-ленточного смесителя с гибкими элементами, расположенными радиально на вращающихся относительно горизонтальных осей цилиндрических барабанах в зависимости от угла распыливания частиц с учетом эффекта взаимодействия формируемых потоков с плоским отбойником.

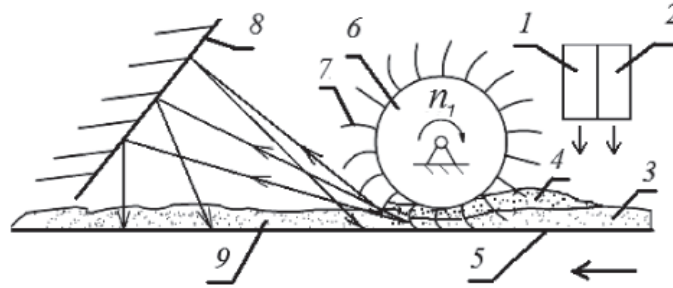


Рис. 1. Упрощенная схема устройства ударного действия:
1 и 2 – дозаторы; 3 и 4 – слои сыпучих материалов; 5 – лента; 6 – барабан; 7 – гибкие элементы;
8 – отбойник; 9 – дисперсная смесь

Описание распределения частиц сыпучих компонентов в зависимости от их диаметров

Базируясь на стохастическом подходе [1, 3], предлагается ввести двумерные функции распределения вероятностей

$$Q_i(D_i, \varphi) = F_i(D_i)F_{\beta s}(\delta), \quad i = 1, \dots, r$$

для каждого разреженного потока частиц сыпучих компонентов по их диаметрам D_i и углам отклонения δ в i факелах. Каждая из указанных функциональных зависимостей $F_i(D_i)$ и $F_{\beta s}(\delta)$ моделируется отдельно. Считается, что согласно теории ударных процессов в дисперсных системах [4] дифференциальная функция распределения для частиц i -го компонента по их диаметрам моделируется в форме

$$F_i(D_i) = \frac{1}{N_i} \frac{dN_i}{dD_i} \quad (1)$$

для фазового пространства с элементом $d\Gamma_i = dW_{xi}dD_i$, соответствующим совокупности одной компоненты скорости W_{xi} центра масс i -й сферической частицы и ее диаметра D_i .

Отыскание функций вида $F_i(D_i)$ соответствует экспоненциальному убыванию числа частиц каждого из набегающих потоков для смешиваемых компонентов сыпучих материалов dN_i в элементе фазового объема $d\Gamma_i$ в зависимости от стохастической энергии частицы E_i [5, 6]

$$E_i = \frac{m_i W_i^2}{2} + \sum_{j=1}^2 \frac{M_{ji}^2}{2I_i}. \quad (2)$$

Входящие в выражение (1) суммы кинетических энергий при поступательном и вращательном движениях соответствуют энергиям частиц каждого i -го потока. Дополнительно учитываются случайные моменты импульсов описанных частиц в виде $M_{1i} = \kappa_{1i}(m_i)^2$ и $M_{2i} = \kappa_{2i}(W_i)^2$, где обозна-

чены: их масса m_i , диаметр D_i и скорость W_i . Заметим, что моменты инерции рассчитываются при вращениях частиц – после «срыва» с гибкого элемента барабана, вращающегося со скоростью n_1 , и за счет вторичных столкновений [8]. Константа A_i задается нормировкой $N_i = \int_{\Gamma_i} dN_i$. Следовательно, учитывая ρ_{π} – истинные плотности смешиваемых компонентов и обозначения $a_i = \frac{\pi\rho_{\pi}}{12}$; $c_{1i} = 2a_i^2$; $c_{2i} = 10a_i$, имеем

$$F_i(D_i) = A_i \sqrt{\frac{\pi a_i E_{0i}}{2}} \prod_{j=1}^r Z_{ji}(D_i), \quad (3)$$

где $Z_{1i}(D_i) = D_i^{5/2}(c_{1i}D_i^8 + \kappa_{2i})^{-1/2}$;

$$Z_{2i}(D_i) = \exp[-c_{2i}\kappa_{1i}(E_{0i})^{-1}D_i].$$

Входящие в (3) параметры имеют размерности $[E_{0i}] = \text{Дж}$; $[\kappa_{1i}] = \text{м}^4\text{с}^{-2}$, $[\kappa_{2i}] = \text{кг}^2\text{м}^2$ и вычисляются из системы энергетических уравнений.

В частности, E_{0i} и κ_{1i} – из уравнений в виде равенств – энергий потоков до столкновения со стенкой (в момент удара каждого из i разреженных исходных компонентов об отбойную поверхность), а также – при падении отраженного факела на горизонтальную ленту (рис. 1).

Параметр κ_{2i} – из уравнения сохранения потоков при равенстве концентрации столкнувшихся частиц из i компонентов \tilde{v}_i и разности между концентрациями – полного числа частиц для каждого ингредиента v_{i0} и для общего числа частиц i сортов, не участвующих в столкновениях v'_i , когда выполняется условие

$$\sum_{i=1}^r \tilde{v}_i = \sum_{i=1}^r v_{i0} - \sum_{i=1}^r v'_i.$$

Значение \tilde{v}_i рассчитывается для единичного объема области, в которой предполагаются возможными их взаимодействия, т.е. $Z_{\beta s}$ – зоны наиболее вероятного присутствия

частиц каждого из потоков – налетающих и отраженного. Например, в качестве такой может быть выбран сектор окружности с центром в точке предполагаемого падения усредненного потока, радиусом h и углом раствора π .

Описание распределения частиц сыпучих компонентов в зависимости от угла отражения от плоского отбойника

При выборе полунормального закона для $F_{\beta_s}(\delta)$ – распределения отраженных частиц по углам с учетом нормировочного множителя F_{0s}

$$F_{\beta_s}(\delta) = \frac{3}{F_{0s}} \sqrt{\frac{2}{\pi\beta_s}} \exp\left(-\frac{9}{2\beta_s^2}\delta^2\right) \quad (4)$$

наиболее вероятной областью отражения смешиваемых частиц считается часть опи-

санного сектора для $\beta_s = \beta_1 + \beta_2$ – суммы углов падения β_1 и отражения β_2 усредненных векторов перемещений потоков. Таким образом, суммы указанных концентраций \tilde{v}_i и v_i' рассчитываются с учетом коэффициента восстановления k_v ; концентраций числа не столкнувшихся частиц i -го налетающего потока с элементами j -го налетающего, а также – отраженного.

Формирование критерия качества смеси

Критерий качества смеси выбран в форме коэффициента неоднородности

$$V_c = 100 \left(\frac{\langle v_i^2 \rangle}{\langle v_i \rangle^2} - 1 \right)^{1/2}, \quad (5)$$

когда $i = 1, 2$ и объемные концентрации равны

$$\langle v_i \rangle = \frac{m_i}{\bar{u}_{i(0)} Z_{\beta_s}} \left[\sum_{j=1}^q \frac{m_j}{k_v \bar{u}_{j(0)} Z_{\beta_s}} \right]^{-1}; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \langle v_i^2 \rangle = & \left(\frac{m_i}{N_i \bar{u}_{i(0)} Z_{\beta_s}} \right)^2 \left(\int_0^{\beta_{1i}} [F_{\beta_{1i}}(\delta)]^2 d\delta \right) \int_{D_{\min i}}^{D_{\max i}} [F_i(D_i)]^2 dD_i \times \\ & \times \left\{ \sum_{j=1}^q \left(\frac{m_j}{k_v N_j \bar{u}_{j(0)} Z_{\beta_s}} \right)^2 \left(\int_0^{\beta_{2j}} [F_{\beta_{2j}}(\delta)]^2 d\delta \right) \int_{D_{\min j}}^{D_{\max j}} [F_j(D_j)]^2 dD_j \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\bar{u}_{i(0)}$ – усредненная скорость налетающего потока; $Z_{\beta_s} = hL/2$; $Z_{\beta_s} = \pi h^2/2$; L – расстояние между точкой касания барабана с поверхностью сыпучего компонента на ленте и точкой крепления отбойника на горизонтальной поверхности.

Входящие в выражение (7) интегральные выражения с учетом вида $F_{\beta_s}(\delta)$ – распределения частиц по углам в применении соответственно к налетающему и отраженному потокам имеют вид

$$F_{\beta_1}(\delta) = \frac{3}{F_{01}} \sqrt{\frac{2}{\pi\beta_1}} \exp\left(-\frac{9}{2\beta_1^2}\delta^2\right); \quad (8)$$

$$F_{\beta_2}(\delta) = \frac{3}{F_{02}} \sqrt{\frac{2}{\pi\beta_2}} \exp\left(-\frac{9}{2\beta_2^2}\delta^2\right), \quad (9)$$

где значения нормировочных параметров F_{01} и F_{02} равны

$$F_{01} = 3 \sqrt{\frac{2}{\pi\beta_1}} \int_0^{\beta_1} \exp\left(-\frac{9}{2\beta_1^2}\delta^2\right) d\delta; \quad (10)$$

$$F_{02} = 3 \sqrt{\frac{2}{\pi\beta_2}} \int_0^{\beta_2} \exp\left(-\frac{9}{2\beta_2^2}\delta^2\right) d\delta. \quad (11)$$

Подстановка в формулу (5) для коэффициента неоднородности выражений (8), (9) для указанных распределений частиц с учетом (10), (11) приводит к следующему представлению:

$$V_c = 100 \left\{ \frac{1}{T_i(\beta_{1i}) P_i^2} \left[\sum_{j=1}^2 m_j (\bar{u}_{j(0)})^{-1} \right]^2 \left[\sum_{j=1}^2 \frac{m_j^2}{T_j(\beta_{2j}) P_j^2} (\bar{u}_{j(0)})^{-2} \right]^{-1} - 1 \right\}^{1/2}, \quad (12)$$

где

$$T_i(\beta_{1i}) = \int_{D_{\min i}}^{D_{\max i}} [Z_{1i}(D_i)Z_{2i}(D_i)]^2 dD_i =$$

$$= -\frac{E_{0i}}{8c_{2i}^6 \kappa_1^6 \kappa_2} \left\{ [Z_{2i}(D_{\max i})]^2 \sum_{k=1}^5 \vartheta_k g_{ki}(D_{\max i}) - [S_{2i}(D_{\min i})]^2 \sum_{k=1}^5 \vartheta_k g_{ki}(D_{\min i}) \right\};$$

$$P_i = \frac{1}{E_{0i}^2 \sqrt{\beta_{2i}}} \int_{D_{\min i}}^{D_{\max i}} [E_{0i}^2 D_i^{5/2} - c_{2i} \kappa_{1i} E_{0i} D_i^{7/2} + (c_{2i} \kappa_{1i})^{-2} D_i^{9/2}] dD_i,$$

когда при $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 30, \vartheta_3 = 20, \vartheta_4 = 10, \vartheta_5 = 4$ введены обозначения

$$g_{ki}(D_i) = (E_{0i})^{5-k} (c_{2i} \kappa_{1i}) D_i^k.$$

Результаты исследования и их обсуждение

Введение безразмерного параметра $\varepsilon = D/D_{\min 2}$ позволяет согласно (3), (4) получить следующее представление для $Q_i(\varepsilon, \delta)$ – общей функции распределения частиц по диаметрам и углам (рис. 2), применяемой в соответствии с (5)–(7) для расчета V_c (рис. 3) в зависимости от режимных параметров аппарата – частоты вращения барабана n_1 и угла наклона отбойной поверхности γ . Для сравнения на рис. 4 приведем семейство кривых для $q_i(\varepsilon)$ – одномерных дифференциальных функций распределения по параметру ε .

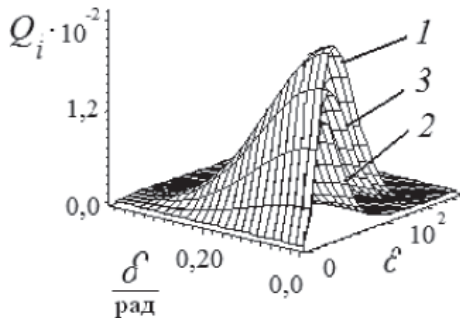


Рис. 2. Зависимости $Q_i(\varepsilon, \delta)$ и $Q_m(\varepsilon, \delta)$:
1 – каолин ГОСТ 21235-75 ($i = 1$);
2 – технический углерод П803 ГОСТ 7885-86 ($i = 2$); 3 – для их смеси

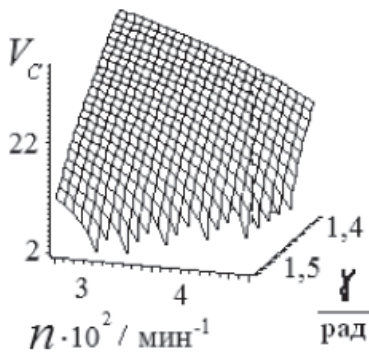


Рис. 3. Зависимость для коэффициента неоднородностей $V_c(n, \gamma)$ при смешении каолина ГОСТ 21235-75 и технического углерода П803 ГОСТ 7885-86 в устройстве ударного действия

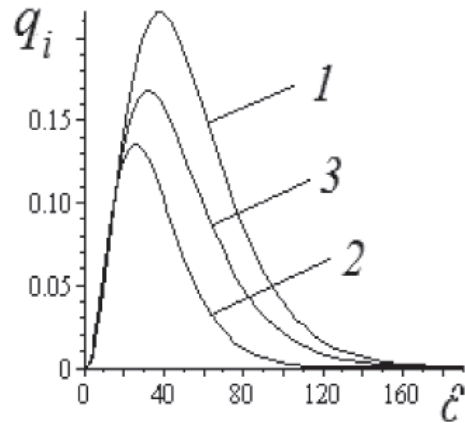


Рис. 4. Зависимости $q_i(\varepsilon)$ и $q_m(\varepsilon)$:
1 – каолин ГОСТ 21235-75 ($i = 1$);
2 – технический углерод П803 ГОСТ 7885-86 ($i = 2$); 3 – для их смеси

Пересечение диапазонов диаметров частиц для рабочих сыпучих материалов (каолина ГОСТ 21235-75 и технического углерода П803 ГОСТ 7885-86) приводит к промежуточному положению соответствующей кривой $q_m(\varepsilon)$ (кривая 3, рис. 4) или поверхности $Q_m(\varepsilon, \delta)$ (поверхность 3, рис. 2) для смеси порошков. При этом наблюдается некоторое снижение значений двумерных распределений вероятностей $Q_i(\varepsilon, \delta)$ и $Q_m(\varepsilon, \delta)$ по сравнению с одномерными – $q_i(\varepsilon)$ и $q_m(\varepsilon)$, что объясняется наличием дополнительного перераспределения частиц описанных потоков по углу γ . Полученные распределения $q_i(\varepsilon)$ и $Q_i(\varepsilon, \delta)$ позволяют различными способами оценить качество приготавливаемой смеси при выборе коэффициента неоднородностей в виде критерия (5).

Конструктивными и режимными показателями установки являются: $D_1 = 7,5 \cdot 10^{-2}$ м; $l = 4,00 \cdot 10^{-2}$ м; $L = 0,45$ м; $n = 300$ об/мин; $W_i = 10^{-2}$ м/с; $\alpha = 40^\circ$; $\gamma = 75^\circ$. С увеличением угла наклона отбойника до значения $\pi/2$ происходит значительное улучшение качества продукта, что можно объяснить расширением условной зоны перекрещивания потоков компонентов.

Заключение

Примеры вычисления V_c по формуле (5) удовлетворительно описывают процесс смешения порошков, что подтверждается опытными данными: при $n = 300$ об/мин и изменении угла наклона отбойной поверхности в пределах $\gamma = (0,54-1,72)$ рад экспериментальные значения имеют диапазон $V_c = (19,4 - 23,2)$. Выражения (5)–(7) могут быть использованы при формировании инженерной методики расчета устройства ударного действия для смешивания сыпучих материалов.

Список литературы

1. Бакин М.Н. Исследование распределения сыпучих компонентов в рабочем объеме барабанно-ленточного смесителя / М.Н. Бакин, А.Б. Капранова, И.И. Верлока // *Фундаментальные исследования*. – 2014. – № 5 (часть 5). – С. 928–933; URL: www.rae.ru/fs/?section=content&op=show_article&article_id=10003288 (дата обращения: 27.05.2014).
2. Бакин М.Н. Современные аппараты с подвижной лентой для смешивания сыпучих материалов / М.Н. Бакин, А.Б. Капранова, И.И. Верлока // *Фундаментальные исследования*. – 2014. – № 5 (часть 4). – С. 687–691; URL: www.rae.ru/fs/?section=content&op=show_article&article_id=10003246 (дата обращения: 27.05.2014).
3. Бакин М.Н. Современные методы математического описания процесса смешивания сыпучих материалов / М.Н. Бакин, А.Б. Капранова, И.И. Верлока // *Фундаментальные исследования*. – № 5 (часть 5), 2014. – С. 923–927; URL: www.rae.ru/fs/?section=content&op=show_article&article_id=10003287 (дата обращения: 27.05.2014).
4. Зайцев А.И. Ударные процессы в дисперсно-пленочных системах / А.И. Зайцев, Д.О. Бытев. – М.: Химия, 1994. – 176 с.
5. Капранова А.Б. Исследование ударного смешивания твердых дисперсных сред при вторичных столкновениях частиц / А.Б. Капранова, М.Н. Бакин, А.Е. Лебедев, А.И. Зайцев // *Изв. вузов. Химия и химическая технология*. – Иваново, 2013. – Т. 56, Вып. 6. – С. 83–86.
6. Капранова А.Б. Применение двумерных функций распределения вероятностей для описания ударного смешивания сыпучих сред / А.Б. Капранова, А.М. Васильев, А.А. Петров // *Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-25: сб. трудов 25-й Междунар. науч. конф.* – Т. 8. – Саратов, 2012. – С. 85–86.
7. Капранова А.Б. Стохастическое описание движения осветленной фракции суспензии порошков / А.Б. Капранова, А.Е. Лебедев, Д.О. Бытев, А.И. Зайцев // *Изв. вузов. Химия и химическая технология*. – Иваново, 2004. – Т. 47, Вып. 6. – С. 99–101.
8. Капранова А.Б. Учет вторичных столкновений частиц при смешивании сыпучих компонентов / А.Б. Капранова, А.Е. Лебедев, Ю.В. Никитина // *Теоретические основы энерго-ресурсосберегающих процессов, оборудования и экологически безопасных производств: материалы Международ. науч. конф.* – Иваново, 2010. – С. 91–93.

нова, А.Е. Лебедев, Ю.В. Никитина // *Теоретические основы энерго-ресурсосберегающих процессов, оборудования и экологически безопасных производств: материалы Международ. науч. конф.* – Иваново, 2010. – С. 91–93.

9. Протодьяконов Н.О. Статистическая теория явлений переноса в процессах химических технологий / Н.О. Протодьяконов, С.Р. Богданов. – Л.: Химия, 1983. – 400 с.

References

1. Bakin M.N., Kapranova A.B., Verloka I.I. *Fundamentalnye issledovanija*. 2014, no. 11, pp. 928–933, available at: www.rae.ru/fs/?section=content&op=show_article&article_id=10003288
2. Bakin M.N., Kapranova A.B., Verloka I.I. *Fundamentalnye issledovanija*, 2014, no. 5, pp. 687–691, available at: www.rae.ru/fs/?section=content&op=show_article&article_id=10003246
3. Bakin M.N., Kapranova A.B., Verloka I.I. *Fundamentalnye issledovanija*, 2014, no. 5, pp. 923–927, available at: www.rae.ru/fs/?section=content&op=show_article&article_id=10003287
4. Zajcev A.I., Bytev D.O. *Udarnye processy v dispersno-plenochnyh sistemah* [Shock processes of dispersion-film systems]. Moscow, Chemistry, 1994. 176 p.
5. Kapranova A.B., Bakin M.N., Lebedev A.E. *Izv. VUZov. Himija i himicheskaja tehnologija*. Ivanovo, 2013. Vol. 56, no. 6, pp. 83–86.
6. Kapranova A.B., Vasilev A.M., Petrov A.A. *Matematicheskie metody v tehnike i tehnologijah MMTT-25* (Mathematical Methods in Technics and Technologies MMTT-25). Saratov, 2012, pp. 85–86.
7. Kapranova A.B., Lebedev A.E., Bytev D.O. *Izv. VUZov. Himija i himicheskaja tehnologija*. Ivanovo, 2004. Vol. 47, no. 6, pp. 99–101.
8. Kapranova A.B., Lebedev A.E., Nikitina Ju.V. *Teoreticheskie osnovy jenergo-resursosberegajushih processov, oborudovanija i jekologicheski bezopasnyh proizvodstv* (Theoretical Foundations of energy and resource-saving processes, equipment and environmental security). Ivanovo, 2010, pp. 91–93.
9. Protodjakonov N.O., Bogdanov S.R. *Statisticheskaja teorija javlenij perenosa v processah himicheskijh tehnologij* [Statistical theory of transport phenomena in the processes of chemical technology]. Moscow, Chemistry, 1983. 400 p.

Рецензенты:

Бачурин В.И., д.ф.-м.н., профессор кафедры «Высшая и прикладная математика» Ярославский филиал, ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)», г. Ярославль;

Мурашов А.А., д.т.н., профессор кафедры математики, Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны, г. Ярославль.