УДК 630.2 + 630.3

МЕТОДЫ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ЗАЩИТНЫХ УСТРОЙСТВ КАБИН ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН

Питухин А.В., Скобцов И.Г.

ГОУ ВПО Петрозаводский государственный университет, Петрозаводск,
e-mail: iskobtsov@mail.ru

Работа посвящена оценке показателей надежности машин с позиций теории катастроф. В первой части статьи приведена катастрофа сборки, при этом параметры управления рассмотрены как стационарные случайные процессы (функции) и поставлена задача о выбросах. Полученные аналитические зависимости дают возможность оценки вероятности безотказной работы, вероятности отказа (вероятности катастрофы сборки), средней наработки до отказа. Для определения характеристик случайного процесса (математического ожидания и дисперсии) использован метод статистической линеаризации. Во второй части статьи проанализирована возможность применения методов теории катастроф для проектирования элементов конструкций технологических машин и оборудования на примере защитного устройства кабины колесного трелевочного трактора. Предложенный подход позволяет произвести статистический анализ положений равновесия вблизи критических точек. Полученные зависимости могут быть применены для оценки вероятности безотказной работы различных элементов конструкций машин и оборудования с позиций теории катастроф.

Ключевые слова: теория катастроф, случайная функция, показатели надежности, технологические машины

CATASTROPHE THEORY METHODS IN DESIGNING TECHNOLOGICAL MACHINE CABINE PROTECTIVE STRUCTURES

Pitukhin A.V., Skobtsov I.G.

Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, e-mail: iskobtsov@mail.ru

This paper deals with the estimation of reliability measures in terms of the catastrophe theory. The cusp catastrophe is considered, control parameters are viewed as stationary random processes (functions) and a problem of overshoot of random function is formulated in the first part of the paper. Analytical equations can be applied to define the reliability function, failure probability (cusp catastrophe probability), mean operating time to failure. The statistical linearization method is used to determine random process characteristics (mean value, dispersion). The possibility of applying catastrophe theory methods for designing elements of technological machines and equipment is analyzed at the next stage of the research, wheeled skidder roll-over protective structure is used as the example. This approach enables to carry out statistical analysis of balance near critical points. The obtained expressions can be applied to estimate the reliability function from the perspective of the catastrophe theory.

Keywords: catastrophe theory, stochastic function, reliability measures, technological machines

Теория катастроф как раздел математики начала формироваться еще в середине XX века на основе теории особенностей гладких отображений и теории динамических систем. Основоположниками современной теории катастроф являются французский математик Р. Том [9] и российский математик В.И. Арнольд [1]. Катастрофами называются скачкообразные изменения, возникающие в виде внезапного ответа системы на плавное изменение внешних условий.

Одной из семи элементарных катастроф по Р. Тому [9] является катастрофа сборки, потенциальная функция которой определяется следующим образом:

$$V_{ab}(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx, \qquad (1)$$

где x – переменная состояния;
a, b – переменные управления.

Многообразие M катастрофы задается уравнением:

$$0 = \frac{d}{dx}V_{ab}(x) = x^3 + ax + b, \qquad (2)$$

которое имеет от одного до трех вещественных корней. Природа этих корней зависит от дискриминанта:

$$D = 4a^3 + 27b^2. \qquad (3)$$

Катастрофа происходит, когда дискриминант D меняет знак с отрицательного на положительный [9].

Полагаем, что изменения управляющих переменных являются случайными. В качестве случайных величин [2] или случайных функций [3], [7] можно представить нагрузку, геометрические характеристики, параметры прочности, механические свойства материалов и т.д. Очевидно, что вследствие разброса возможных значений, конструкции будут работать с более или менее редкими перегрузками [5],[6]. Поэтому определенный интерес представляет изучение вопросов проектирования элементов конструкций технологических машин с позиций теории катастроф с учетом стохастической природы возмущающих факторов.

Оценка вероятности возникновения катастрофы сборки

Рассмотрим катастрофу сборки со стохастических позиций. Переменные управления a и b в общем случае изменяются во времени, и характеристика состояния будет определяться случайным процессом $D(t)$. Таким образом, необходимо решать задачу о выбросах случайного процесса. При этом вероятность возникновения катастрофы

$$P(t) = P\{D(t) > 0\}.$$

Предположим, что $D(t)$ – дифференцируемый случайный процесс,

$$V(t) = \frac{dD(t)}{dt}.$$

Нас интересует вероятность того, что реализация случайного процесса $D(t)$ пересечет нулевой уровень. Среднее число пересечений случайным процессом заданного уровня определялось рядом исследователей [4], [8].

В общем случае среднее число пересечений уровня 0 за время τ (математическое ожидание числа выбросов):

$$N_+(\tau) = \int_0^\tau p_0(t)\,dt,$$

для стационарного процесса:

$$N_+(\tau) = \tau \cdot p_0.$$

В нашем случае для гауссовского стационарного процесса

$$N_+(\tau) = \tau \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sigma_\upsilon}{\sigma_D} \cdot \exp\left(-\frac{(0-\bar{D})^2}{2\sigma_D^2}\right) = \tau \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sigma_\upsilon}{\sigma_D} \cdot \exp\left(-\frac{\bar{D}^2}{2\sigma_D^2}\right), \quad (4)$$

где $\bar{D}$ – математическое ожидание случайного процесса;

σ_D^2 – дисперсия случайного процесса;

ω_e – эффективная частота процесса $D(t)$, с$^{-1}$.

Тогда

$$p_0 = \frac{\omega_e}{2\pi} \cdot \exp\left(-\frac{\bar{D}^2}{2\sigma_D^2}\right) = \frac{1}{T_e} \cdot \exp\left(-\frac{\bar{D}^2}{2\sigma_D^2}\right). \quad (5)$$

Временную плотность $p_0(t)$ можно трактовать как среднее число пересечений случайным процессом $D(t)$ нулевого уровня в единицу времени. Для стационарного процесса плотность распределения ординат и скоростей не зависит от времени, следовательно, $p_0(t) = p_0$.

Во многих задачах практический интерес представляет вариант, при котором среднее число выбросов за данный промежуток времени достаточно мало и можно считать появления последовательных выбросов независимыми «редкими» событиями. В этом случае число появлений выбросов можно считать приближенно подчиняющимся закону распределения Пуассона [4], при этом единственным параметром, входящим в закон распределения, является математическое ожидание числа выбросов $N_+(\tau)$.

Вероятность безотказной работы будет определяться как вероятность того, что за время t не произойдет ни одного отказа (выброса $D(t)$ за нулевой уровень):

$$P_0(t) \approx \exp\left[-\int_0^t p_0(t)dt\right] = \exp\left[-t \cdot \frac{\omega_e}{2\pi} \cdot \exp\left(-\frac{\bar{D}^2}{2\sigma_D^2}\right)\right]. \quad (6)$$

Вероятность отказа

$$Q(t) = 1 - P_0(t) \approx 1 - \exp\left[-\int_0^t p_0(t)dt\right] = 1 - \exp\left[-t \cdot \frac{\omega_e}{2\pi} \cdot \exp\left(-\frac{\bar{D}^2}{2\sigma_D^2}\right)\right]. \quad (7)$$

Средняя наработка до отказа (математическое ожидание наработки до выброса)

$$m_t = \frac{1}{p_0} = \frac{2\pi}{\omega_e} \cdot \exp\left(\frac{\bar{D}^2}{2\sigma_D^2}\right) = T_e \cdot \exp\left(\frac{\bar{D}^2}{2\sigma_D^2}\right). \quad (8)$$

В работе А.В. Питухина [2] для оценки вероятности катастрофы сборки предложены аналитический метод и метод статистической линеаризации для случая, когда управляющие параметры a и b являются случайными величинами. Воспользуемся методом статистической линеаризации для оценки математического ожидания и дисперсии случайного процесса $D(t)$ в случае, когда переменные управления являются стационарными случайными функциями (процессами). Очевидно

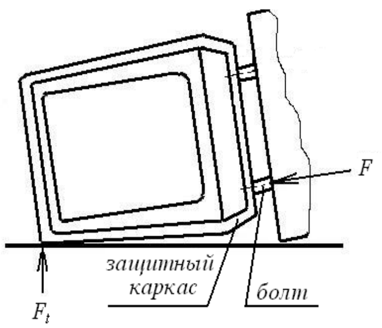
$$\overline{D} = 4\overline{a}^3 + 27\overline{b}^2;\ \sigma_D^2 = \left(\frac{\partial \overline{D}}{\partial \overline{a}}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial \overline{D}}{\partial \overline{b}}\right)^2 \sigma_b^2 = 144\overline{a}^4\sigma_a^2 + 2916\overline{b}^2\sigma_b^2, \qquad (9)$$

где $\overline{a}, \overline{b}$ – математические ожидания стационарных случайных процессов $a(t)$ и $b(t)$;
σ_a^2, σ_b^2 – дисперсии стационарных случайных процессов $a(t)$ и $b(t)$.

Полученные зависимости (6–9) позволяют оценить вероятность безотказной работы различных элементов конструкций технологических машин. Весьма важна и задача оценки энергии деформирования элементов конструкций вплоть до их разрушения. Особенно это касается защитных каркасов кабин лесопромышленных тракторов.

Рассмотрим случай бокового нагружения кабины колесного скиддера ТЛК-4-01.

В данной конструкции основные деформации будут воспринимать защитный каркас и болт его крепления к несущей раме (рис. 1). Несложным пересчетом заменяем защитный каркас эквивалентной пружиной с жесткостью G и деформируемой силой F. Болт моделируем стержнем. Таким образом, получаем условную схему нагружения, энергетически эквивалентную исходной.



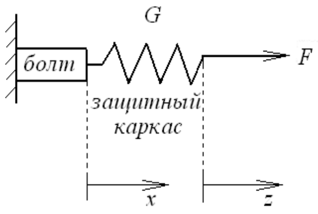


Рис. 1. Условная схема нагружения кабины трактора

Представим сопротивление стержня растяжению в виде зависимости:

$$F = Ax - Cx^3, \qquad (10)$$

где F – нагрузка;
x – абсолютное удлинение стержня;
A, C – эмпирические коэффициенты.

Полная диаграмма растяжения стержня, описываемая зависимостью (10), представлена на рис. 2. Такие полные диаграммы деформирования (с падающей ветвью) могут быть получены на испытательных установках с большой жесткостью. В нашем случае жесткость защитного каркаса должна существенно превышать жесткость болта.

Полная потенциальная энергия системы определяется произведением соответствующих сил на перемещения:

$$V = \frac{1}{2}S(z-x) + \frac{1}{2}Fx,$$

где S – сила сопротивления деформации эквивалентной пружины;
z – условное перемещение активного конца эквивалентной пружины.

Выразив силы через перемещения, будем иметь:

$$2V = G(z-x)(z-x) + (Ax - Cx^3)x.$$

После преобразований получим:

$$2V = -Cx^4 + (A+G)x^2 - 2Gxz + Gz^2.$$

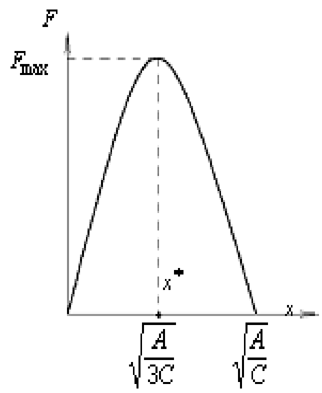


Рис. 2. Полная диаграмма растяжения стержня

Полученное выражение аналогично выражению (1), описывающему катастрофу сборки. Поверхность равновесия M определяется уравнением производной $dV_{ab}(x)/dx$ (2), коэффициенты в котором определяются:

$$a = -\frac{A+G}{2C}; \qquad (11)$$

$$b = \frac{Gz}{2C}. \qquad (12)$$

Допустим, что A, C, G, z – стационарные случайные функции с математическими ожиданиями $\bar{A}$, $\bar{C}$, $\bar{G}$, $\bar{z}$ и дисперсиями σ_A^2, σ_C^2, σ_G^2, σ_z^2. Согласно методу статистической линеаризации

$$\bar{a} = -\frac{\bar{A}+\bar{G}}{2\bar{C}};\ \sigma_a^2 = \frac{1}{4\bar{C}^2}\left[\sigma_A^2 + \sigma_G^2 + \left(\frac{\bar{A}+\bar{G}}{\bar{C}}\right)\sigma_C^2\right]; \qquad (13)$$

$$\bar{b} = \frac{\bar{G}\bar{z}}{2\bar{C}};\ \sigma_b^2 = \frac{1}{4\bar{C}^2}\left[\bar{z}^2\sigma_G^2 + \bar{G}^2\sigma_z^2 + \left(\frac{\bar{G}\bar{z}}{\bar{C}}\right)\sigma_C^2\right]. \qquad (14)$$

Используя формулы (6–9) с учетом (13), (14), можно определить вероятность катастрофы сборки (разрушения болта).

Численное решение задачи целесообразно осуществить в следующем порядке: определить жесткость G эквивалентной пружины, оценить коэффициенты A и C в полной диаграмме растяжения стержня (10), задать значения средних квадратических отклонений коэффициентов A, C и G.

Численное значение жесткости G эквивалентной пружины определялось методом конечных элементов с использованием пакета «Зенит». Получено значение $G = 8700$ Н/мм

Определим коэффициенты A и C в полной диаграмме растяжения стержня. Для этого пересчитаем F_{max} и x^* для стержня, моделирующего болт, через предел прочности σ_B и относительное удлинение δ соответствующей стали.

Для стали 30, согласно справочным материалам, $\sigma_B = 500$ МПа, $\delta = 20\,\%$. При диаметре стержня $d = 30$ мм и длине $l = 100$ мм максимальная разрушающая стержень нагрузка и соответствующее ей абсолютное удлинение определяется:

$$F_{\max} = \frac{\pi d^2}{4}\sigma_B = 353000 \text{ Н};$$

$$x^* = l \cdot \frac{\delta}{100} = 20 \text{ мм}.$$

Подставляя численные значения F_{max} и x^*, и решая систему уравнений

$$\begin{cases} x^* = \sqrt{\dfrac{A}{3C}} \\ F_{\max} = Ax^* - Cx^{*3}, \end{cases}$$

получим $A = 26500$ Н/мм, $C = 22{,}1$ Н/мм^3.

Значения G, A и C полагаем случайными функциями с математическими ожиданиями, подсчитанными выше. Таким образом, численные значения задаем в следующем виде:

$\bar{A} = 26500$ Н/мм, $\bar{C} = 22{,}1$ Н/мм^3, $\bar{G} = 8700$ Н/мм;

$\sigma_A^2 = 2650$ Н/мм, $\sigma_C^2 = 2{,}21$ Н/мм^3, $\sigma_G^2 = 870$ Н/мм; $\sigma_z = 0{,}1\ \bar{z}$.

Результаты расчетов представлены на рис. 3.

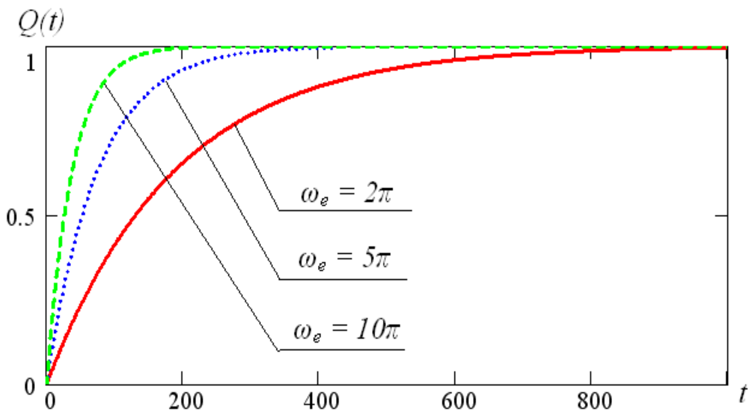


Рис. 3. Вероятность отказа при различных вариантах эффективных частот ω_e случайного процесса D(t)

Работа выполнена при поддержке Программы стратегического развития (ПСР) Петрозаводского государственного университета в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности на 2012–2016 гг.

Список литературы

1. Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990. – 128 с.

2. Питухин А.В. Методы теории катастроф при проектировании элементов конструкций машин и оборудования лесного комплекса // Известия вузов «Лесной журнал». – 2007. – №2. – С. 58–65.

3. Питухин А.В., Скобцов И.Г. Метод оценки вероятности катастрофы сборки для случая, когда управляющие параметры являются случайными функциями // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 1. – С. 24–27.

4. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: Мир, 1962. – 463 с.

5. Pitukhin A.V. Fracture Mechanics and Optimal Design // Int. Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1992 – Vol.34. No.3 – P. 933–940.

6. Pitukhin A.V. Optimal Design Problems Using Fracture Mechanics Methods // Computers and Structures. – 1997 – Vol.65.No.4 – P. 621–624.

7. Pitukhin A.V., Skobtsov I.G. The Estimation of Reliability Function in Terms of the Catastrophe Theory // Applied Mechanics and Materials. – 2014. Vol. 607. – P. 817–820.

8. Rise S.O. Mathematical analysis of random noise // Bell System Tech. J. – 1945. Vol. 24. – P. 46–156.

9. Thom R. Structural Stability and Morphogenesis: An Outline of a General Theory of Models. Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.

References

1. Arnold V.I. *Teoriya katastof* [Catastrophe Theory]. Moscow, Nauka, 1990. 128 p.

2. Pitukhin A.V. *Metody teorii katastof pri proektirovanii elementov konstruktsiy mashin i oborudovaniya lesnogo kompleksa* [Methods of Catastrophe Theory when Designing Elements of Machines and Equipment of Forest Industry]. Izv. Vuzov Lesnoy Zhurnal, 2007, no. 2, pp. 58–65.

3. Pitukhin A.V., Skobtsov I.G. *Metod otsenki veroyatnosti katastrofy sborki dlya sluchaya, kogda upravlyayushchie parametry yavlyayutsya sluchaynymi funktsiyami* [Method of Cusp Catastrophe Probability Estimation With the Stochastic Functions as the Control Parameters]. Fundamental'nye issledovaniya, 2014, no. 1, pp. 24–27.

4. Sveshnikov A.A. *Prikladnye metody teorii sluchaynykh funktsiy* [Applied Methods of Stochastic Function Theory]. Moscow, Mir, 1962. 463 p.

5. Pitukhin A.V. Fracture Mechanics and Optimal Design // Int. Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1992 – Vol.34.No.3 – pp. 933–940.

6. Pitukhin A.V. Optimal Design Problems Using Fracture Mechanics Methods // Computers and Structures. – 1997 – Vol.64.No.4. – pp. 621–624.

7. Pitukhin A.V., Skobtsov I.G. The Estimation of Reliability Function in Terms of the Catastrophe Theory // Applied Mechanics and Materials. 2014. Vol. 607. pp. 817–820.

8. Rise S.O. Mathematical analysis of random noise // Bell System Tech. J. 1945. Vol. 24. pp.46–156.

9. Thom R. Structural Stability and Morphogenesis: An Outline of a General Theory of Models. Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.

Рецензенты:

Васильев С.Б., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой Целлюлозно-бумажных и деревообрабатывающих производств Петрозаводского государственного университета, г. Петрозаводск;

Колесников Г.Н., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой Механики, Петрозаводский государственный университет, г. Петрозаводск.

Работа поступила в редакцию 15.08.2014.