

УДК 624.046

НЕЛИНЕЙНАЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ ДРЕВЕСИНЫ

Вареник К.А.

ФГБОУ ВПО «Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»,
Великий Новгород, e-mail: vkirillv89@mail.ru

В статье приведена запись теории ползучести древесины, которая была получена, учитывая обработку экспериментальных данных по нелинейной ползучести древесины, а также развивая подходы известных ученых. Установлена зависимость значений модуля упругости древесины от влажности. Получено основное интегральное уравнение нелинейной ползучести, которое затем было преобразовано в дифференциальное для большего удобства в ряде практических задач. Указана возможность учета старения древесины путем использования функции старения в полученном уравнении. Записаны выражения для деформации и характеристики ползучести, а также аппроксимирующее уравнение на основе обработки результатов экспериментов по ползучести древесины с целью получения значений коэффициента нелинейности древесины. Используя разные значения этого коэффициента при различных напряженно-деформированных состояниях, были получены уравнения нелинейной ползучести древесины, которые можно использовать при расчетах деревянных конструкций.

Ключевые слова: ползучесть древесины, относительная деформация, характеристика ползучести, коэффициент ползучести древесины, старение древесины

NONLINEAR CREEP OF WOOD

Varenik K.A.

The Yaroslav-the-Wise Novgorod State University, Veliky Novgorod, e-mail: vkirillv89@mail.ru

The article contains a record of the theory of creep of wood which was obtained by considering the processing of experimental data on nonlinear creep of wood, and also developing approaches of known scientists. Dependence of values of the module of elasticity of wood on humidity has been established. The main integrated equation of nonlinear creep which then was transformed in differential for bigger convenience in a number of practical tasks has been received. Possibility of the accounting of aging of wood by a way of use of function of aging in the received equation has been specified. Expressions for deformation and the creep characteristic, and also the approximating equation on the basis of processing of results of experiments on creep of wood for the purpose of obtaining values of coefficient of nonlinearity of wood have been written. Using different values of this coefficient at various intense deformed states, the equations of nonlinear creep of wood which can be used at calculations of wooden designs have been received.

Keywords: creep of wood, relative deformation, creep characteristic, creep coefficient of wood, aging of wood

Экспериментальные исследования древесины выявили, что в зависимости от уровня напряжений работа древесины при длительной нагрузке характеризуется как линейной, так и нелинейной ползучестью. Однако теоретического описания этих процессов до сих пор представлено не было. В связи с этим, одним из важнейших направлений в расчетах деревянных конструкций является составление уравнений нелинейной ползучести для различных видов напряженно-деформированного состояния деревянных стержней.

Теория нелинейной ползучести древесины

В работе А.С. Вареника и К.А. Вареника [1] на основе обработки экспериментальных данных различных ученых была обнаружена существенная нелинейность ползучести древесины и получены аналитические выражения характеристик ползучести в зависимости от уровня напряжений.

До настоящего времени, в основном, использовалось описание ползучести уравнением А.Р. Ржаницына. Предложения А.Р. Ржаницына по замене вопроса о нелинейной ползучести различными вариантами линейных задач ползучести вызвало отрицательную реакцию А.А. Гвоздева [2]. Испытывая на ползучесть какой-либо образец даже при высоких напряжениях, можно отчетливо наблюдать затухающие деформации, которые, однако, перестают быть пропорциональными напряжениям, т.е. становятся нелинейными, а это нельзя отобразить, идя по пути, предложенному А.Р. Ржаницыным. Таким образом, метод можно назвать достаточно приближенным.

При построении уравнения линейной ползучести был использован принцип наложения Больцмана, ввиду линейной связи между напряжениями σ и деформациями ε_M и ε_{II} (мгновенными деформациями и деформациями ползучести):

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau, \quad (1)$$

где $C(t, \tau) = (C_0 + Ae^{-\gamma\tau}) \cdot [1 - B_1 e^{-\gamma_1(t-\tau)}]$;

$C_0 = 2,87 \cdot 10^{-5} \text{ (МПа)}^{-1}$, $A = 10,95 \text{ (МПа)}^{-1}$; $B_1 = 1$; $\gamma = \gamma_1 = 0,15 \text{ (1/сут)}$.

В 1983 году Н.Х. Арутюнян показал, что принцип наложения может применяться и для нелинейной ползучести древесины и полимерных материалов [6]. В частности, Н.Х. Арутюнян указал, что принцип суперпозиции применим независимо от того, на-

капливаются в процессе ползучести необратимые деформации или все деформации ползучести полностью необратимы.

Учитывая обработку экспериментальных данных по нелинейной ползучести древесины и развивая подход И.Е. Прокоповича, В.А. Зедгенидзе [3] и А.С. Сокояна [4], используем для записи теории ползучести древесины уравнение нелинейной ползучести Н.Х. Арутюняна [5]:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \int_{t_0}^t f[\sigma(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau, \quad (2)$$

где $\varepsilon(t)$ – относительная деформация к моменту времени t под действием напряжения, приложенного в некотором возрасте τ .

Н.Х. Арутюнян отмечает, что теория ползучести в виде (2) не претендует на абсолютную точность, но может оказаться эффективной при решении прикладных задач.

Если положить, что модуль мгновенной деформации $E(\tau)$ не зависит от возраста τ (т.е. если не учитывать процесса старения материала), то $E(\tau) = \text{const}$. Это позволяет пренебречь вторым слагаемым в правой части (2). В результате имеем:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t f[\sigma(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau. \quad (3)$$

Известно, что мера ползучести $C(t, \tau)$ и характеристика ползучести $\phi(t, \tau)$ связаны между собой соотношением:

$$C(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} \phi(t, \tau) = \frac{1}{E_0} \phi(t, \tau). \quad (4)$$

В области нелинейной ползучести Н.Х. Арутюнян ввел предположение о существовании связи:

$$\varepsilon_{\text{II}} = f[\sigma] \cdot C(t, \tau), \quad (5)$$

где ε_{II} – деформация ползучести.

По аналогии с этим, введем предложение о связи:

$$\varepsilon_{\text{II}} = \phi[\sigma] \cdot \phi(t, \tau). \quad (6)$$

Отсюда получаем уравнение связи нелинейных функций:

$$f[\sigma] = \frac{\varepsilon_{\text{II}}}{C(t, \tau)} = \phi[\sigma] \frac{\phi(t, \tau)}{C(t, \tau)} = \phi[\sigma] E_0. \quad (7)$$

При учете старения древесины по Н.Х. Арутюняну, характеристика ползучести:

$$\phi(t, \tau) = \left[\phi_{\infty} + \frac{A_{\phi}}{\tau} \right] \cdot [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]. \quad (8)$$

При учете старения древесины по И.Е. Прокоповичу, характеристика ползучести записывается в виде:

$$\phi(t, \tau) = \left[\phi_{\infty} + A_{\phi} \cdot e^{-\gamma\tau} \right] \cdot [1 - e^{-\gamma_1(t-\tau)}]. \quad (9)$$

Переменность во времени модуля упругости древесины можно установить из следующих соображений.

В нормах СНиП II-25-80 «Деревянные конструкции» на основании экспериментов установлено, что величина

$$A = \pi^2 \frac{E}{R_c} \quad (10)$$

является постоянной величиной, равной 3000.

В многочисленных экспериментах, проведенных Е.Н. Квасниковым [7] и Н.Л. Леонтьевым [8], установлено, что прочности древесины при сжатии R_c и растяжении R_p являются величинами, зависящими от времени. Зависимость можно представить в виде формулы:

$$R = a_1 - b_1 lgt, \quad (11)$$

где t – время в сутках.

Например, при сжатии: $R_c = 544 - 90lgt$ при влажности 20%; $R_c = 373 - 41lgt$ при влажности 56%; $R_c = 290 - 24lgt$ при влажности 62%.

В соответствии с (10) и ввиду переменности $R(t)$ модуль упругости E древесины также является величиной, зависящей от времени.

Однако с целью упрощения решения задач и, следуя зависимости (10), будем считать, что модуль упругости древесины E_0 и прочность R не зависят от времени.

Ввиду изложенного уравнение нелинейной ползучести Н.Х. Арутюняна для древесины запишем в упрощенном виде:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_0} - \int_{t_0}^t [\sigma(\tau) + \beta_d \sigma^2(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau. \quad (12)$$

С целью получения значения коэффициента ползучести древесины β_d для древесины и для использования экспериментальных данных запишем выражение для деформации ползучести:

$$\varepsilon_{\text{п}} = (\sigma + \beta_d \sigma^2) C_0, \quad (13)$$

и характеристики ползучести:

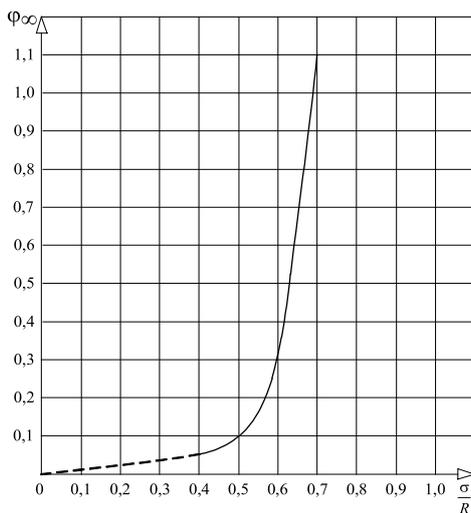
$$\phi_{\infty}(\sigma) = \frac{\varepsilon_{\text{п}}}{\varepsilon_y} = \frac{\sigma + \beta_d \sigma^2}{\sigma / E_0} C_0 = (1 + \beta_d \sigma) C_0 E_0 = (1 + \beta_d \sigma) \phi_{\infty}^0. \quad (14)$$

На основе обработки результатов экспериментов по ползучести древесины, в работе [1] для сжатия получено аппроксимирующее уравнение:

$$\phi_{\infty}^e = 0,132 \frac{\sigma}{R} - 5,28 \frac{\sigma^2}{R^2} + 10,3 \frac{\sigma^3}{R^3}. \quad (15)$$

График уравнения (15) представлен на рисунке.

Полагаем, что при уровне загрузки $\frac{\sigma}{R} = 0,38$ (и ниже) наблюдается линейная ползучесть с предельной характеристикой ползучести, равной $\phi_{\infty}^0 = 0,05$ (см. рисунок).



Аппроксимирующая кривая предельных значений характеристик ползучести ϕ_{∞} в зависимости от уровня напряжения $\frac{\sigma}{R}$

При этом же коэффициент $\beta_d = 0$ и из (13) $\varepsilon_{\text{п}} = \sigma C(t, \tau)$.

Далее подставим в выражение (14) данные эксперимента: $\frac{\sigma}{R} = 0,67$; $\phi_{\infty} = 0,8$. Имея

$$\phi_{\infty}(\sigma) = \left(1 + \beta_a R \frac{\sigma}{R}\right) \phi_{\infty}^0, \quad (16)$$

находим:

$$\beta_a = \beta R = \left(\frac{\phi_{\infty}(\sigma)}{\phi_{\infty}^0} - 1\right) \frac{1}{\phi_{\infty}^0} \quad (17)$$

и значение $\beta_1 = 22,38$.

Если принять в соответствии с предложением К.П. Пятикрестовского и другими экспериментальными данными, что $R = 550 \text{ кг/см}^2$ ($\sigma_{\text{III}} = 55 \text{ МПа}$), то осредненный коэффициент β_d для древесины в нелинейной теории Н.Х. Арутюняна следует принимать равным $\beta_d = 0,041$.

Уравнение нелинейной ползучести древесины запишем в виде:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_0} - \int_{t_0}^t (\sigma + \beta_d \sigma^2) \frac{1}{E_0} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \phi(t, \tau) d\tau, \quad (18)$$

где $\phi(t, \tau) = \phi_{\infty}^0(w) \cdot (1 - e^{-\gamma(t-\tau)})$.

Принимая значение $\phi_{\infty}^0(w)$ не зависящим от времени (w – влажность в %), име-

ем основное уравнение нелинейной ползучести древесины:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_0} - \int_{t_0}^t [\sigma(\tau) + \beta_d \sigma^2(\tau)] \frac{1}{E_0} \phi_{\infty}^0(w) \frac{\partial}{\partial \tau} (1 - e^{-\gamma(t-\tau)}) d\tau. \quad (19)$$

В этом уравнении можно учитывать зависимость модуля упругости древесины от

влажности w , подставляя в него соответствующую эмпирическую формулу:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_0(w)} - \int_{t_0}^t [\sigma(\tau) + \beta_d \sigma^2(\tau)] \frac{1}{E_0(w)} \phi_{\infty}^0(w) \frac{\partial}{\partial \tau} (1 - e^{-\gamma(t-\tau)}) d\tau. \quad (20)$$

Уравнения нелинейной ползучести древесины при различных видах напряженно-деформированного состояния

Нелинейные уравнения (19) и (20) можно применять для работы древесины при сжатии, растяжении, изгибе. Отличия будут состоять в численных значениях коэффициентов β_d и $\phi_{\infty}^0(w)$. В этих уравнениях не учитывается старение древесины. Для учета

та старения необходимо использовать функции старения (8) либо (9).

Известно, что выражение $e^{-\gamma(t-\tau)}$, стоящее под интегралом в уравнении (19), позволяет преобразовать его в дифференциальное уравнение, более удобное в решении ряда практических задач расчета деревянных конструкций.

Уравнение (19) дифференцируем по времени t :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E_0} - \gamma \left[\int_{t_0}^t \gamma [\sigma(\tau) + \beta_d \sigma^2(\tau)] \frac{1}{E_0} \phi_{\infty}^0(w) e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau \right] + \gamma [\sigma(t) + \beta_d \sigma^2(t)] \frac{1}{E_0} \phi_{\infty}^0(w). \quad (21)$$

Из полученного результата находим значение интеграла, стоящего в квадратных скобках:

$$\gamma [I] = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E_0} - \dot{\varepsilon}(t) + \gamma [\sigma(t) + \beta_d \sigma^2(t)] \frac{1}{E_0} \phi_{\infty}^0(w). \quad (22)$$

Подставляя это значение в первоначальное уравнение (19), избавляемся от интеграла и получаем основ-

ное уравнение нелинейной ползучести древесины в виде дифференциального уравнения:

$$\dot{\varepsilon}(t) + \gamma \varepsilon(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E_0} + \gamma [\sigma(t) + \beta_d \sigma^2(t)] \frac{1}{E_0} \phi_{\infty}^0(w) + \gamma \frac{\sigma(t)}{E_0}. \quad (23)$$

При низких уровнях нагружения ($\frac{\sigma}{R} \leq 0,38$ для сжатой древесины) записы-

ваем уравнение линейной ползучести древесины, полагая $\beta_d = 0$:

$$\dot{\varepsilon}(t) + \gamma \varepsilon(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E_0} + \gamma \sigma(t) \frac{1}{E_0} \phi_{\infty}^0(w) + \gamma \sigma(t) \frac{1}{E_0}. \quad (24)$$

Для решения простейших задач изгиба в условиях нелинейной ползучести Н.Х. Арутюнян предлагает упростить уравнение (2), отбрасывая в

правой части уравнения (23) первое и третье слагаемые. Уравнение нелинейной ползучести древесины существенно упрощается:

$$\dot{\varepsilon}(t) + \gamma \varepsilon(t) = \gamma [\sigma(t) + \beta_d \sigma^2(t)] \frac{1}{E_0} \phi_{\infty}^0(w). \quad (25)$$

В теории ползучести такое уравнение соответствует использованию модели Фойгта с нелинейной силой.

Аналогичным приемом можно преобразовать уравнение линейной ползучести

древесины Е.Н. Квасникова:

$$\dot{\sigma} + \sigma \frac{n^*}{n} \left(\frac{t}{n} \right)^{n^*-1} = E_0 \dot{\varepsilon}, \quad (26)$$

подставляя в него нелинейную функцию напряжений, полученную в данной работе:

$$\dot{\sigma}(t) + [\sigma(t) + \beta_d \sigma^2(t)] \frac{n^*}{n} \left(\frac{t}{n}\right)^{n^*-1} = E_0 \dot{\varepsilon}(t). \quad (27)$$

Уравнение (27) в большей степени подходит для решения задач изгиба деревянных балок.

Уравнение же (25) является более удобным для решения задач циклического нагружения деревянных конструкций, в том числе для задач колебаний.

Для решения же задач расчета сжатых деревянных стоек уравнения (25) и (27) не годятся. В этом случае необходимо использовать полное уравнение нелинейной ползучести древесины (23).

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t_0)}{E_0} + \frac{\sigma(t_0) + \beta_d \sigma^2(t_0)}{E_0} m_0 \left(\frac{t}{t_c}\right)^n, \quad (28)$$

где $m_0 = \left(\frac{t_c}{\tau}\right)^n$, либо численные значения этого коэффициента, указанные для древесины Е.Н. Квасниковым.

Для случаев, учитывающих старение

$$\dot{\sigma}(t) [1 + 2\beta_d \sigma(t)] \phi_d(t) \gamma + \dot{\sigma}(t) \gamma + \ddot{\sigma}(t) = \ddot{\varepsilon}(t) E_0 + \dot{\varepsilon}(t) \gamma E_0, \quad (29)$$

где $\phi_d(t) = \phi_\infty(w) + A_\phi(w) e^{-\gamma t}$ – функция старения древесины по И.Е. Прокоповичу.

Выводы

1. Экспериментальные данные по кривым характеристик ползучести древесины указывают на необходимость учета нелинейной ползучести. Обработка этих данных, а также работ известных ученых позволила описать теорию нелинейной ползучести.

2. В результате работы были получены уравнения нелинейной ползучести древесины при различных напряженно-деформированных состояниях с учетом ее старения и изменения влажности. Данные уравнения можно использовать при расчетах деревянных конструкций.

Список литературы

1. Вареник А.С., Вареник К.А. О ползучести древесины // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 2; URL: <http://www.science-education.ru/116-12663>.
2. Гвоздев А.А. Ползучесть бетона и пути ее исследования // Исследование прочности, пластичности, ползучести строительных материалов. М.: Стройиздат, 1955. – С. 126–137.
3. Прокопович И.Е., Зедгендзе В.А. Прикладная теория ползучести. М.: Стройиздат, 1980. 240 с.
4. Согоян А.С. Экспериментальное исследование ползучести древесины и влияние ее на работу некоторых деревянных конструкций: автореф. ... дис. канд. техн. наук. – Ереван, 1954. – 24 с.
5. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. – М.-Л.: Гостехиздат, 1952. – 324 с.
6. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. – 336 с.
7. Квасников Е.Н. Вопросы длительного сопротивления древесины и конструктивных элементов из дерева и слоистых пластиков: дис. ... д-ра техн. наук. Л., 1972. – 329 с.

Н.Х. Арутюнян указывает, что предложенная им теория нелинейной ползучести не претендует на абсолютную точность, но является эффективной при решении прикладных задач расчета конструкций.

При решении самых простейших задач расчета деревянных конструкций в условиях нелинейной ползучести можно применять теорию старения в форме, предложенной Е.Н. Квасниковым, дополнив ее нелинейной составляющей, полученной выше автором диссертации. Окончательно можно записать:

древесины, воспользуемся уравнением И.Е. Прокоповича и В.А. Зедгендзе, уточнив его учетом функции нелинейной ползучести древесины. Основное уравнение в этом случае запишем в виде:

8. Леонтьев Н.Л. Длительное сопротивление древесины. – М.-Л.: Гослесбумиздат, 1957. – 132 с.

References

1. Varenik A.S., Varenik K.A. O polzuchesti drevesiny. Sovremennye problemy nauki i obrazovanija, 2014, no. 2; URL: <http://www.science-education.ru/116-12663>.
2. Gvozdev A.A. Polzuchest' betona i puti ee issledovanija // Issledovanie prochnosti, plastichnosti, polzuchesti stroitel'nyh materialov. M.: Strojizdat, 1955. pp. 126–137.
3. Prokopovich I.E., Zedgenidze V.A. Prikladnaja teorija polzuchesti. M.: Strojizdat, 1980, 240 p.
4. Sogojan A.S. Jeksperimental'noe issledovanie polzuchesti drevesiny i vlijanie ee na rabotu nekotoryh derevjannyh konstrukcij: avtoref. ... dis. kand. tehn. nauk. Erevan, 1954, 24 p.
5. Arutjunjan N.H. Nekotorye voprosy teorii polzuchesti. M.-L.: Gostehizdat, 1952, 324 p.
6. Arutjunjan N.H., Kolmanovskij V.B. Teorija polzuchesti neodnorodnyh tel. M.: Nauka, 1983, 336 p.
7. Kvasnikov E.N. Voprosy dlitel'nogo soprotivlenija drevesiny i konstruktivnyh jelementov iz dereva i slojstyx plastikov: dis. ... d-ra tehn. nauk. L., 1972, 329 p.
8. Leont'ev N.L. Dlitel'noe soprotivlenie drevesiny. M.-L.: Goslesbumizdat, 1957, 132 p.

Рецензенты:

Бондаренко Е.А., д.т.н., проректор по научной работе, ФГБОУ ВПО «Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого», г. Великий Новгород;
Санжаровский Р.С., д.т.н., профессор кафедры «Строительные конструкции», ФГБОУ ВПО «Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого», г. Великий Новгород.

Работа поступила в редакцию 08.08.2014.