

УДК 532.329.:532.2.532, 01.02.05

О ВЛИЯНИИ ЭЛАСТИЧНОСТИ СТенок ТРУБКИ НА ДИНАМИКУ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН ПУЗЫРЬКОВОЙ ЖИДКОСТИ

Баязитова Я.Р.

*Стерлитамакский филиал ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет»,
Стерлитамак, e-mail: yana.bayazitova@mail.ru*

Составлена математическая модель для изучения эволюции нелинейных волн в трубке с эластичными стенками, заполненной пузырьковой жидкостью. Проведены численные расчеты параметров волны для двух моделей трубы с эластичными стенками: в первом случае полагается, что справедлив закон Гука для всей трубы, во втором случае учитывается радиальная инерция стенок трубы. Проведен сравнительный анализ результатов численных экспериментов. Установлено, что процессы, характерные для пузырьков при распространении волн двухфазной жидкости, оказывают влияние на динамику волн при радиусе пузырьков, при уменьшении радиуса пузырьков до диссипация на пузырьках, межфазное взаимодействие пренебрежимо малы, радиальная инерция стенок трубки сохраняет свое воздействие на динамику волны. Аналогичная тенденция наблюдается при изменении концентрации пузырьков единого радиуса: при малых концентрациях пузырьков на эволюцию волн давления оказывают большее влияние свойства эластичности стенок трубки, при увеличении концентрации пузырьков динамика волн определяется процессами, протекающими в пузырьковой жидкости. Скорость волн двухфазной жидкости меньше скорости звука, и она убывает с увеличением концентрации пузырьков. Эта тенденция сохраняется и при учете радиальной инерции стенок трубки. Следует отметить, что скорость волн в этом случае близка к значениям данного параметра, характерного для случая отсутствия радиальной инерции у эластичных стенок трубки.

Ключевые слова: пузырьковая жидкость, эластичность, волна давления, скорость, амплитуда

ABOUT INFLUENCE OF ELASTICITY OF TUBE WALLS TO DYNAMICS OF NONLINEAR WAVES OF BUBBLY LIQUID

Bayazitova Y.R.

Sterlitamak branch of Bashkir State University, Sterlitamak, e-mail: yana.bayazitova@mail.ru

The mathematical model to study the evolution of nonlinear waves in a tube with elastic walls, filled with bubble liquid. Numerical calculations of the wave parameters for two models of the tube with elastic walls: in the first case it is assumed that Hooke's law is valid for the entire pipe, in the second case considered radial inertia of the pipe walls. A comparative analysis of the results of numerical experiments. It is established that the processes typical for the bubbles in the propagation of waves in two-phase liquid affect the dynamics of waves at the bubble radius, with decreasing radius bubbles up dissipation on the bubbles and interfacial interaction negligible, radial inertia of the walls of the tube retains its impact on the dynamics of the wave. A similar trend is observed in the changes of the concentration of bubbles single radius: at low concentrations of bubbles on the evolution of pressure waves have a greater impact properties of elasticity of the walls of the tubes with increasing concentrations of bubble dynamics of waves is determined by the processes occurring in bubbly liquids. The speed of wave two-phase fluid less than the speed of sound, and it decreases with increasing concentration of bubbles. This trend has continued in the accounting for the radial inertia of the walls of the tube. It should be noted that the speed of waves in this case is close to the values of this parameter typical case no radial inertia of the elastic walls of the tube.

Keywords: bubbly liquid, the elasticity, the wave of pressure, the speed, the amplitude

Интерес к проблемам волновой динамики пузырьковых жидкостей, протекающей в эластичных трубках, обусловлен важностью применения результатов исследований к проблемам расчета гидравлических систем в летательных аппаратах, в нефтяной и газовой промышленности, химической технологии.

Целью нашей работы является развитие теории волновых течений пузырьковых жидкостей в трубках с эластичными стенками.

Постановка задачи и система уравнений. Рассмотрим одномерные волновые возмущения, распространяющиеся в трубке малого радиуса, заполненной пузырьковой жидкостью.

Стенки трубки считаем эластичными. На рис. 1 представлено схематическое изо-

бражение системы, которое иллюстрирует трубку толщиной h , длиной L и радиусом a_0 ($L \gg a_0$). Возмущения в системе возникают вследствие воздействия давлением по торцу трубки.

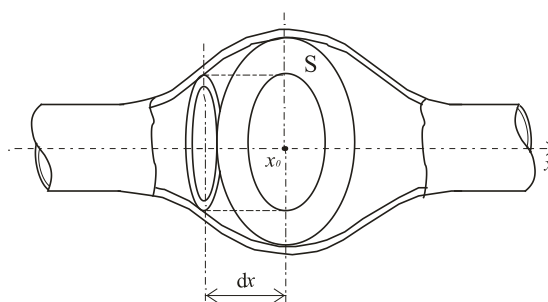


Рис. 1. Схема задачи

Полагая общепринятые допущения для пузырьковых жидкостей, запишем основные уравнения для описания движения волн в пузырьковой жидкости в трубке с эластичными стенками. Макроскопические уравнения сохранения масс, числа пузырьков, импульсов в односкоростном приближении имеют вид [1]

$$\frac{\partial(\rho_i S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i v S)}{\partial x} = 0, \quad i = l, g;$$

$$\frac{\partial(\rho v S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2 S)}{\partial x} = -S \frac{\partial p_l}{\partial x};$$

$$\frac{\partial(nS)}{\partial t} + \frac{\partial(nvS)}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{dp_g}{dt} = -\frac{3\gamma p_0}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{3(\gamma-1)q}{a_0};$$

$$\alpha_l + \alpha_g = 1; \quad \rho_i = \rho_i^0 \alpha_i;$$

$$\rho = \rho_g + \rho_l; \quad \alpha_g = \frac{4}{3} \pi a^3 n,$$

здесь и далее ρ_i – плотность фазы; n – число пузырьков; S – площадь поперечного сечения трубки; v – скорость; α_i – объемное содержание фазы; a – радиус пузырьков; γ – показатель адиабаты для газа; q – тепловой поток; p – давление газа.

Будем считать жидкость акустически сжимаемой, газ calorически совершенным:

$$p_l = p_0 + C_l^2 (\rho_l^0 - \rho_{l0}^0); \quad p_g = \rho_g^0 R T_g,$$

здесь p_g^0 – начальное давление жидкости; R – газовая постоянная; T_g – температура газа.

При описании радиального движения в соответствии с уточнением, предложенным в [2], будем полагать, что $w = w_R + w_A$, где w_R – определяется из уравнения Релея – Ламба, а w_A – определяется из решения за-

дачи о сферической разгрузке на сфере радиуса a в несущей жидкости в акустическом приближении:

$$a \frac{dw_R}{dt} + \frac{3}{2} w_R^2 + 4v_l \frac{w_R}{a} = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0};$$

$$w_A = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0 C_l \alpha_g^{1/3}},$$

где v_l – вязкость жидкости; C_l – скорость звука в «чистой» жидкости.

Тепловой поток задаем следующим приближенным конечным соотношением [3]:

$$q = Nu \lambda_g \frac{T_g - T_0}{2a};$$

$$Nu = \begin{cases} \sqrt{Pe}, & Pe \geq 100, \\ 10, & Pe < 100, \end{cases}$$

где $Pe = 12(\gamma-1) \frac{T_0}{|T_g - T_0|} \frac{a|w|}{k_g}; k_g = \frac{\lambda_g}{c_g \rho_g^0}$.

Температура газа в пузырьках меняется по закону

$$T_g = \frac{p_g}{p_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^3 T_0.$$

Рассмотрим два случая: будем считать, что стенки трубки помимо эластичных свойств обладают массой, обуславливающей радиальную инерцию стенок при распространении волновых возмущений, и исследуем динамику нелинейных волн в эластичной трубке без инерционных свойств ее стенок. Закон Гука для эластичной трубки имеет вид [4]

$$\Delta p_l = \frac{Eh}{2a_0} \Delta S.$$

В случае учета радиальной инерции стенок трубки считаем, что радиус трубки меняется согласно уравнению

$$\rho_w \left((b_0 + h_0)^2 - b_0^2 \right) \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} = b(p - p_0) - E \frac{h_0}{b_0} (b - b_0),$$

где E – модуль Юнга; h_0 – толщина стенки трубки; b_0 – начальное значение внутреннего радиуса трубки; ρ_w – плотность материала трубки.

Для численного анализа удобнее пользоваться системой уравнений, записанной в лагранжевых координатах, запишем приведенную выше систему уравнений в лагранжевых переменных:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = w;$$

$$\frac{\partial w_R}{\partial t} = \frac{1}{a} \left(-\frac{3}{2} w_R^2 - 4v_l \frac{w_R}{a} + \frac{(p_g - p_l)}{\rho_l^0} \right);$$

$$w_A = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0 C_l \alpha_g^{1/3}};$$

$$\frac{\partial p_g}{\partial t} = -\frac{3\gamma p_g w}{a} - \frac{3(\gamma-1)q}{a};$$

$$q = Nu\lambda_g \frac{T_g - T_0}{2a};$$

$$Nu = \begin{cases} \sqrt{Pe}, & Pe \geq 100; \\ 10, & Pe \leq 100; \end{cases}$$

$$Pe = 12(\gamma-1) \frac{T_0}{|T_g - T_0|} \frac{a|w|}{k_g};$$

$$k_g = \frac{\lambda_g}{c_g \rho_g^0};$$

$$T_g = \frac{p_g}{p_0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^3 T_0;$$

$$p_g = \frac{T_g}{T_0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 p_0.$$

Для случая отсутствия радиальной инерции стенок трубки давление жидкости и объемное содержание пузырьков, изменение поперечных размеров трубки определяется следующими частными производными:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = C_l^2 \rho_l^0 EhS \left(\frac{3\alpha_g w}{a_0} - Jak \frac{\partial v}{\partial x_0} \right) \left[\left(EhS + 2C_l^2 a_0 S_0 \rho_l^0 + \frac{2\alpha_g a_0 S_0 C_l^2 \rho_l^0}{Jak(1-\alpha_g)} \right) (1-\alpha_g) \right]^{-1};$$

$$\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} = \frac{3\alpha_g w}{a_0} - \alpha_g \frac{\partial v}{\partial x_0} - \frac{2\alpha_g S_0}{EhS} \frac{\partial P_l}{\partial t};$$

$$S = S_0 \left(1 + \frac{2a_0}{Eh} (p_l - p_0) \right).$$

Для случая эластичных стенок трубки с радиальной инерцией давление в жидкости, объемное содержание пузырьков, изменение радиуса стенок трубки определяются следующим образом:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = C_l^2 \rho_l^0 \left(\frac{3\alpha_g w}{a_0} - \frac{\alpha_g}{Jak} \frac{\partial v}{\partial x_0} - \frac{2\alpha_g}{b} \frac{\partial b}{\partial t} \right) (1-\alpha_g)^{-1} - \frac{DJak}{Jak} - \frac{2\partial b}{b\partial t};$$

$$\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} = \frac{3\alpha_g w}{a_0} - \frac{\alpha_g}{S_0} \frac{\partial S}{\partial t} - \alpha_g \frac{\partial v}{\partial x_0}; \quad \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} = \left(b(p-p_b) - \frac{Eh}{b_0} (b-b_0) \right) \left(\rho_w (b_0+h)^2 - b_0^2 \right)^{-1}; \quad S = \pi b^2.$$

Системы уравнений решаются численно по явной схеме с использованием метода конечных разностей [5].

Начальные и граничные условия. Нелинейные волны, возникающие в трубке, распространяются вдоль положительного направления оси z до противоположного торца трубки, ограниченного жесткой стенкой: $z = L$: $v_z = 0$, $0 < a_0 < R$.

Начальные условия для остальных входных параметров соответствуют следующим:

$$t = 0: \quad p_l = p_0, \quad S = S_0, \quad p_g = p_0, \quad w_R = 0, \quad a_0 = 1 \text{ мм или } 0,1 \text{ мм}.$$

Возмущения в трубе возникают вследствие воздействия по торцу трубки давлением согласно условиям при $t^* = 1$ мс и $\Delta p = 1$ атм:

$$z = 0: \quad \begin{cases} p_0 + \Delta p_0 \exp\left(\left(\frac{t-t_*}{t_0}\right)^2\right), & 0 < t < t_*; \\ p_0, & t > t_* \end{cases} \quad (1)$$

$$z = 0: \quad \begin{cases} p_0 + \Delta p_0 \exp\left(\left(\frac{t-t_*}{t_0}\right)^2\right), & 0 < t < \frac{t_*}{2}; \\ p_0 + \Delta p_0, & t > t_*/2 \end{cases} \quad (2)$$

Обсуждение результатов

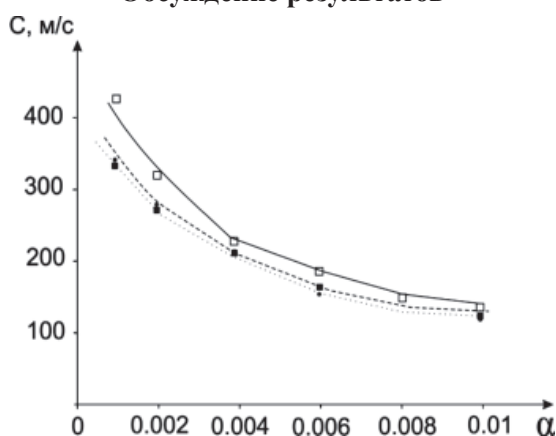


Рис. 2. Зависимость скорости нелинейных волн в пузырьковой жидкости от концентрации пузырьков

На рис. 2 представлены графики, иллюстрирующие влияние концентрации пузырьков на скорость распространения нелинейных волн. Сплошная линия соответствует значениям скоростей для волн, распространяющихся в трубке с жесткими стенками, пунктирная линия – случаю распространения волн в трубке с поликарбонатными стенками с учетом радиальной инерции стенок, точечная линия – случаю распространения волн в трубке с поликар-

бонатными стенками без учета радиальной инерции. Из рис. 2 видно, что по мере увеличения концентрации пузырьков скорость нелинейных волн снижается, значения скоростей для волн, распространяющихся в поликарбонатных трубках с учетом и без учета инерции стенок трубки, близки друг другу, их значения по мере увеличения концентрации пузырьков.

На рис. 3 представлены эпюры давления в жидкости в момент времени 1,5 мс, графики получены при различных радиусах пузырьков: на рис. 3, а эпюры построены при $a_0 = 1$ мм, на рис. 3, б – при $a_0 = 0,1$ мм приближаются к значению скорости для волн в трубке с жесткими стенками. Сплошная линия на рис. 3 соответствует случаю распространения нелинейных волн в трубке с поликарбонатными стенками с учетом радиальной инерции стенок трубки, пунктирная линия – случаю распространения волн в трубке с жесткими стенками.

Из графиков видно, что при радиусе пузырьков $a_0 = 1$ мм осцилляционная структура волны характерна для нелинейных волн, распространяющихся в жесткой трубке и трубке, стенки которой обладают эластичностью и радиальной инерцией. Пульсации давления связаны здесь главным образом с изменением радиуса пузырьков жидкости во фронте распространяющейся волны.

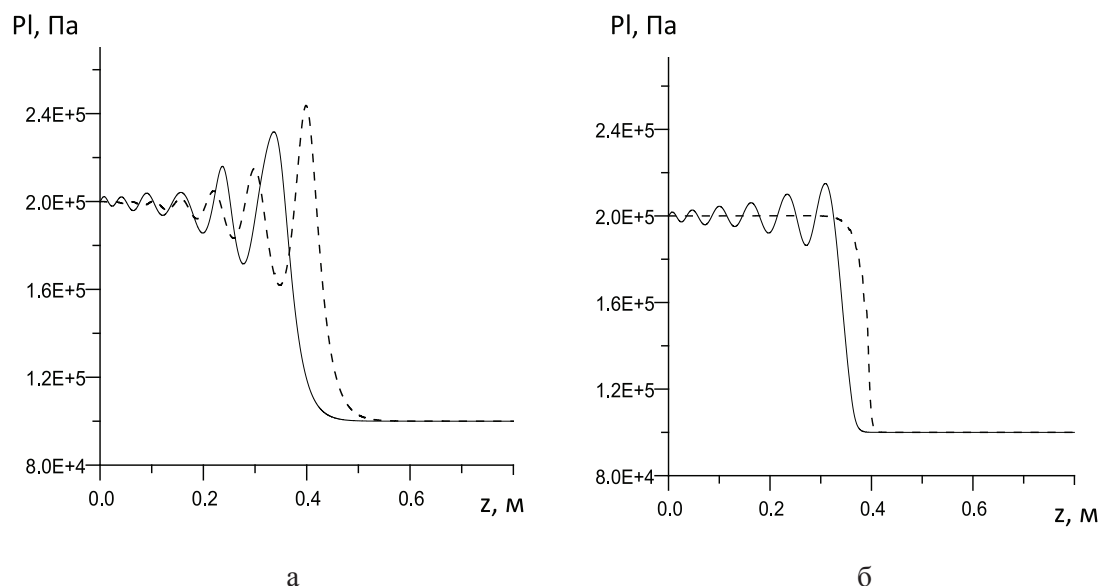


Рис. 3. Зависимость давления двухфазной жидкости от координаты в момент времени 1,5 мс при различных радиусах пузырьков: а – случай соответствует радиусу пузырьков 1 мм; б – случай – радиусу пузырьков 0,1 мм

При уменьшении радиуса пузырьков в 10 раз для волн в трубке с жесткими стенками изменение давления в жидкости

вдоль трубы носит монотонный характер, а динамика волн в поликарбонатной трубке с радиальной инерцией стенок сохраняет

осцилляционную структуру. Данный эффект обусловлен тем, что более мелкие воздушные пузырьки слабее воздействуют на жидкость, передавая ей дополнительное давление, таким образом, процессы связанные с диссипацией на пузырьках, межфазным взаимодействием оказывают на динамику волны незначительное влияние. Доминирующая роль на процесс формирования и эволюции волны здесь переходит к радиальной инерции стенок трубки.

На рис. 4 представлены графики изменения давления в жидкости от времени в фиксированной точке, находящейся в 500 см от торца трубки, по которому производилось первоначальное воздействие. Графики получены при различных значениях концен-

траций пузырьков: на рис. 4, а графики соответствуют $\alpha = 0,001$, на рис. 4, б – $\alpha = 0,01$. Пунктирная линия на рис. 4 соответствует случаю распространения нелинейных волн в трубке с поликарбонатными стенками с учетом радиальной инерции стенок трубки, сплошная линия – случаю распространения волн в трубке с эластичными стенками без учета инерции стенки. Из рис. 4 видно, что амплитуды волн давления при концентрации пузырьков $\alpha = 0,001$ различаются на величину 0,1 атм в случаях распространения волн по трубке с эластичными поликарбонатными стенками с учетом и без учета радиальной инерции стенок, что обусловлено различными способами описания изменения поперечных размеров трубки.

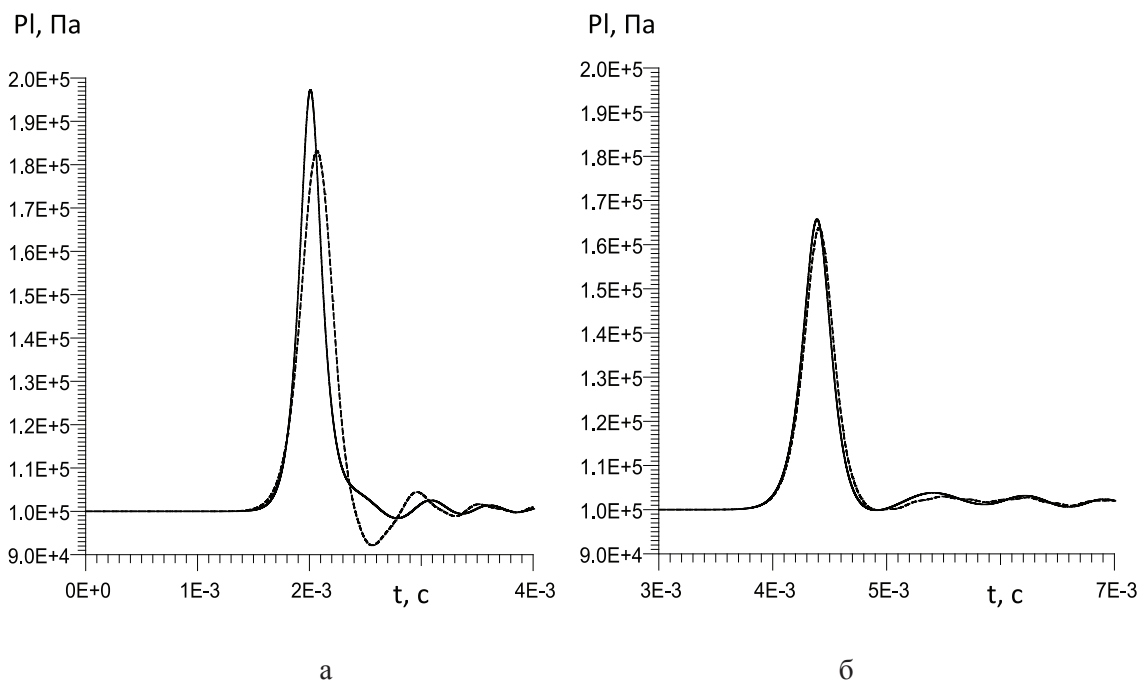


Рис. 4. Зависимость давления двухфазной жидкости от времени в точке, удаленной от нижнего торца трубы на расстояние $z = 500$ см, при различных объемных содержаниях пузырьков: а – случай соответствует концентрации пузырьков 0,001; б – случай – концентрации пузырьков 0,01

По мере увеличения концентрации пузырьков ($\alpha = 0,01$) значение амплитуд волн давления оказывается единым, что обусловлено едиными процессами, протекающими в пузырьковой жидкости, оказывающих первостепенное влияние на динамику волн, распространяющихся в трубке.

Закключение

По результатам исследования сделали следующие выводы: процессы, характерные для пузырьков при распространении

волн двухфазной жидкости, оказывают влияние на динамику волн при радиусе пузырьков $r = 1$ мм, при уменьшении радиуса пузырьков до $r = 0,1$ мм диссипация на пузырьках и межфазное взаимодействие пренебрежимо малы, радиальная инерция стенок трубки сохраняет свое воздействие на динамику волны. Аналогичная тенденция наблюдается при изменении концентрации пузырьков единого радиуса: при малых концентрациях пузырьков на эволюцию волн давления оказывают большее

влияние свойства эластичности стенок трубки, при увеличении концентрации пузырьков динамика волн определяется процессами, протекающими в пузырьковой жидкости. Скорость волн двухфазной жидкости меньше скорости звука, и она убывает с увеличением концентрации пузырьков. Эта тенденция сохраняется и при учете радиальной инерции стенок трубки. Следует отметить, что скорость волн в этом случае близка к значениям данного параметра, характерного для случая отсутствия радиальной инерции у эластичных стенок трубки.

Список литературы

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. – М.: Наука Т1, 2, 1987. – 360 с.
2. Нигматулин Р.И., Проявление сжимаемости несущей фазы при распространении волны в пузырьковой среде / Р.И. Нигматулин, В.Ш. Шагапов, Н.К. Вахитова // Докл. РАН. – 1989. – Т. 304, № 5. – С. 1077–1088.
3. Bayazitova Ya.R. Features of the dynamics of the detonation waves in layered bubble systems / Ya.R. Bayazitova, I.K. Gimaltdinov, A.R. Bayazitova // Tyumen State University Herald. – 2013. – № 7. – P. 25–32.
4. Волобуев А.Н., Течение жидкости в трубках с эластичными стенками // УФН. – 1995. – Т. 165, № 2. – С. 177–186, доступно: <http://mi.mathnet.ru/ufn1052>.

5. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. – М.: Наука, 1975. – 352 с.

References

1. Nigmatulin R.I. Dinamika mnogofaznyh sred. M.: Nauka.T1, 2, 1987. 360 p.
2. Nigmatulin R.I. Projavlenie szhimaemosti nesushej fazy pri rasprostranenii volny v puzyr'kovej srede / Nigmatulin R.I., Shagapov V.Sh., Vahitova N.K. // Dokl. RAN, 1989. T. 304, no. 5. pp. 1077–1088.
3. Bayazitova Ya.R. Features of the dynamics of the detonation waves in layered bubble systems/ Bayazitova Ya.R., Gimaltdinov I.K., Bayazitova A.R. // Tyumen State University Herald, 2013. no. 7. pp. 25–32.
4. Volobuev A.N., Techenie zhidkosti v trubkah s jelasticnymi stenkami // UFN, 1995. T. 165, no. 2. pp. 177–186, dostupno: <http://mi.mathnet.ru/ufn1052>.
5. Samarskij A.A., Popov Ju.P. Raznostnye shemy gazovoj dinamiki. M.: Nauka, 1975. 352.

Рецензенты:

Гималтдинов И.К., д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой «Прикладная математика и механика» Стерлитамакского филиала БашГУ, г. Стерлитамак;

Михайлов П.Н., д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой «Алгебра, геометрия и методика преподавания математики» Стерлитамакского филиала БашГУ, г. Стерлитамак.

Работа поступила в редакцию 05.08.2014.