УДК 517.9

ПЕРЕСТРОЙКА РЕШЕНИЙ РЕКУРРЕНТНОГО МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Абакумова С.И., Руденко В.Г., Стригун Н.С.

ФГАОУ ВПО «Северо-Кавказский федеральный университет», филиал, Пятигорск, e-mail: svetaabaku@rambler.ru

Введение**.** В настоящее время хорошо разработаны методы решения линейных рекуррентных соотношений (возвратные уравнения). Нелинейные рекуррентные уравнения, представляющие интерес, решаются численными методами. Цель**.** Найти аналитические решения нелинейных уравнений. Материалы и методы. Обнаружен особый класс нелинейных рекуррентных соотношений – мультипликативные уравнения, решения которых можно получать в аналитическом виде, что позволяет получать аналитически перестройку решений при изменении параметров. Результаты. Предложен метод решения таких уравнений путем сведения их к системе линейных рекуррентных (возвратных) уравнений. Найдены решения таких уравнений при различных значениях параметров. Получены периодические числовые последовательности с различными значениями периодов. Выводы**.** В предложенных мультипликативных уравнениях, которые являются сильно нелинейными, можно получать аналитические решения и аналитически проследить перестройку их при изменении параметров, что представляет интерес для различных разделов нелинейной динамики.

Ключевые слова: рекуррентные, мультипликативные уравнения, перестройка решений

THE REORGANIZATION OF SOLUTIONS OF RECURRENT MULTIPLICATIVE EQUATION OF THE SECOND ORDER

Abakumova S.I., Rudenko V.G., Strigun N.S.

North Caucasian Federal University (branch), Pyatigorsk, e-mail: svetaabaku@rambler.ru

Background. Methods of the decision of the linear recurrence correlations (the revocable equations) are well designed nowadays. The Nonlinear recurrence equations, being of interest, dare the numerical methods. The Purpose. Find the analytical decisions of the nonlinear equations. Material and methods. Special class of the nonlinear recurrence correlations – any multiplicative equations is discovered. Their decisions we can get in analytical type that allows to get analytically realignment of the decisions when change parameter. Results. Method of the decision of such equations by by information them to system linear recurrence (revocable) of the equations is Offered. The decisions of such equations were found. Under different importance parameters. Periodic numeric sequences are Received with different importance periods. Conclusions. We can get analytical solving that are powerfully nonlinear In multiplicative equations. We can analytically consider their change and it is the importance for different sections nonlinear process.

Keyworlds: recurrent, multiplicative equation, reorganization, solution

Рассмотрение различных вопросов нелинейной динамики позволило по-новому посмотреть на соотношение непрерывного и дискретного при описании нелинейных процессов. Обнаруженное в 1980 г. М. Фейгенбаумом [1] сложное поведение сравнительно простого одномерного нелинейного отображения $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, дающего при $\lambda < 4$ отображение отрезка [0, 1] в себя, было сразу замечено и использовано для разработки различных сценариев поведения нелинейных систем [2, 3], для уточнения таких понятий, как предельный цикл, аттрактор, область притяжения, бифуркации и т.п., универсальное поведение. Бифуркации удвоения периода, обнаруженные Фейгенбаумом стали одним из сценариев развития турбулентности в гидродинамике. Отметим, что исследование проведенное Фейгенбаумом – численное исследование при различных λ этого отображения.

Здесь мы хотели бы привлечь внимание к одному, пока еще не востребованному, классу нелинейных уравнений, в которых регулярным образом можно получать решение в явном виде и тем самым аналитически выяснить зависимость решений от параметров модели, аналитически проследить перестройку решений при их изменении. Речь идет о мультипликативном рекуррентном автономном уравнении k-го порядка вида:

$$x_{n+k} = g x_n^{\delta_0} x_{n+1}^{\delta_1} x_{n+2}^{\delta_2} \ldots x_{n+k-1}^{\delta_{k-1}},\ n = 1, 2, \ldots, \quad (1)$$

$$x_1 = a_1,\ x_2 = a_2,\ \ldots,\ x_k = a_k, \quad (1^*)$$

в котором $g > 0$, $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, δ_j Î R, ($j = 0, 1, \ldots, k - 1$). Величины a_i – начальные данные, а g и δ_j будем рассматривать как параметры модели (1).

Вид модели (1) с начальными условиями (1*) подсказывает, что решение (1) следует искать в виде

$$x_n = g^{\gamma(k)} a_1^{\alpha_1(k)} a_2^{\alpha_2(k)} \ldots a_k^{\alpha_k(k)},\ n = 1, 2, \ldots, \quad \text{при выполнении } (1^*). \quad (2)$$

Искомая функция

$$x_n = x(n, a_1, a_2, \ldots, a_k, \delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{k-1})$$

будет определяться $k+1$ функциями: k функциями $\alpha_i(n)$ ($i = 1, 2, \ldots, k$) и функцией $\gamma(_n)$ натурального аргумента.

Для нахождения функций $\alpha_i(n)$ получаем – линейных однородных рекуррентных уравнений k-го порядка

$$\alpha_i(n+k) = \delta_0\alpha_i(n) + \delta_1\alpha_i(n+1) + \delta_2\alpha_i(n+2) + \ldots + \delta_{k-1}\alpha_i(n+k-1) \quad (3)$$

с начальными условиями

$$\alpha_i(m) = \delta_{im} \equiv \begin{cases} 1, & m = i \\ 0, & m \neq i \end{cases} \quad i, m = 1, 2, ..., k, \quad (3^*)$$

а для $\gamma(n)$ – линейное неоднородное рекуррентное уравнение k-го порядка

$$\gamma(n+k) = \delta_0\gamma(n) + \delta_1\gamma(n+1) + \delta_2\gamma(n+2) + \ldots + \delta_{k-1}\gamma(n+k-1) \quad (4)$$

с нулевыми начальными условиями

$$\gamma(i) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k. \quad (4^*)$$

Начальные условия (3*) и (4*) следуют из (2) и (1*).

Общее решение однородного линейного рекуррентного уравнения есть линейная комбинация k его частных линейно независимых решений, для нахождения которых нужно составить и решить характеристическое алгебраическое уравнение k-й степени с коэффициентами $\delta_0, \delta_1, ..., \delta_{k-1}$.

Таким образом, аналитическое решение уравнения (1) с начальными условиями (1*) возможно в той мере, в какой возможно найти решение соответствующего характеристического алгебраического уравнения. В этой связи особое место среди мультипликативных уравнений (1) занимают уравнения второго и третьего порядков. Исследуем подробно уравнение второго порядка этого вида:

$$x_{n+2} = g x_{n+1}^{\delta_1} x_n^{\delta_0}, \quad n = 1, 2, ...; \quad (5)$$

$$x_1 = a > 0, \quad x_2 = b > 0, \quad \delta_0, \delta_1 \in R.$$

Решение его ищем в виде (здесь $a_1 = a$, $a_2 = b$)

$$x_n = g^{\gamma_n} a^{\alpha_n} b^{\beta_n}. \quad (6)$$

Для показателей α_n и β_n получаем линейные однородные рекуррентные уравнения второго порядка

$$\alpha_{n+2} = \delta_1\alpha_{n+1} + \delta_0\alpha_n,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0; \quad (7)$$

$$\beta_{n+2} = \delta_1\beta_{n+1} + \delta_0\beta_n,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1. \quad (7^*)$$

Их частные решения ищем в виде $\alpha_n = \beta_n = q^n$, $n = 1, 2, ...$, и для q получаем характеристическое уравнение

$$q^2 - \delta_1 q - \delta_0 = 0.$$

Его решение

$$q_{1,2} = \frac{\delta_1}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta_1^2}{4} + \delta_0}.$$

Случай 1. Корни действительные, различные,

$$\frac{\delta_1^2}{4} + \delta_0 > 0$$

и

$$q_1 = \frac{\delta_1 + \sqrt{\delta_1^2 + 4\delta_0}}{2};$$

$$q_2 = \frac{\delta_1 - \sqrt{\delta_1^2 + 4\delta_0}}{2}.$$

Общее решение тогда запишется в виде

$$\alpha_n = A_1 q_1^n + A_2 q_2^n;$$

$$\beta_n = B_1 q_1^n + B_2 q_2^n. \quad (8)$$

Для нахождения постоянных линейной комбинации имеем системы

$$\begin{cases} A_1 q_1 + A_2 q_2 = 1 \\ A_1 q_1^2 + A_2 q_2^2 = 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} B_1 q_1 + B_2 q_2 = 0, \\ B_1 q_1^2 + B_2 q_2^2 = 1. \end{cases}$$

Решая, находим

$$A_1 = \frac{q_2}{q_1(q_2 - q_1)};$$

$$A_2 = -\frac{q_1}{q_2(q_2 - q_1)};$$

$$B_1 = -\frac{1}{q_1(q_2 - q_1)};$$

$$B_2 = \frac{1}{q_2(q_2 - q_1)}.$$

С учетом этого получаем

$$\alpha_n = \frac{\delta_0}{\sqrt{\delta_1^2+4\delta_0}}\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{\delta_1+\sqrt{\delta_1^2+4\delta_0}}{2}\right)^{n-2}- \\ -\left(\dfrac{\delta_1-\sqrt{\delta_1^2+4\delta_0}}{2}\right)^{n-2}\end{array}\right], \quad n = 2, 3, \ldots; \qquad (8^*)$$

$$\beta_n = \frac{\delta_0}{\sqrt{\delta_1^2+4\delta_0}}\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{\delta_1+\sqrt{\delta_1^2+4\delta_0}}{2}\right)^{n-1}- \\ -\left(\dfrac{\delta_1-\sqrt{\delta_1^2+4\delta_0}}{2}\right)^{n-1}\end{array}\right], \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (8^{**})$$

Случай 2. Корни комплексные,

$$\frac{\delta_1^2}{4}+\delta_0<0, \quad \delta_0=-|\delta_0|<0.$$

Тогда

$$q_1 = \frac{\delta_1+i\sqrt{4|\delta_0|-\delta_1^2}}{2};$$

$$q_1 = \frac{\delta_1-i\sqrt{4|\delta_0|-\delta_1^2}}{2}. \qquad (9)$$

Запишем корни в виде

$$q_1 = \sqrt{|\delta_0|}e^{i\varpi} \text{ и } q_1 = \sqrt{|\delta_0|}e^{-i\varpi}, \qquad (9^*)$$

где

$$\mathrm{tg}\varpi = \frac{\sqrt{4|\delta_0|=-\delta_1^2}}{\delta_1} = \mathrm{sgn}\,\delta_1\sqrt{\frac{4|\delta_0|}{\delta_1^2}-1}. \qquad (10)$$

Если $\delta_1 > 0$, то

$$\varpi = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{4|\delta_0|-\delta_1^2}}{\delta_1} = \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{4|\delta_0|}{\delta_1^2}-1}. \qquad (10^*)$$

Если $\delta_1 < 0$, то

$$\varpi = \pi + \mathrm{arctg}\left(-\sqrt{\frac{4|\delta_0|}{\delta_1^2}-1}\right). \qquad (10^{**})$$

Общее решение α_n и β_n дается формулами (8), постоянные линейных комбинаций легко находятся, получаем

$$\alpha_n = \frac{-2|\delta_0|^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{4|\delta_0|-\delta_1^2}}\sin\left[\varpi(n-2)\right], \; n = 1, 2, \ldots; \qquad (11)$$

$$\beta_n = \frac{2\delta_0^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{4|\delta_0|-\delta_1^2}}\sin\left[\varpi(n-1)\right], \; n = 1, 2, \ldots \qquad (11^*)$$

Значения ϖ и $T = \dfrac{2\pi}{\varpi}$ определяются комбинацией $\dfrac{|\delta_0|}{\delta_1^2}$ с учетом требований $\dfrac{|\delta_0|}{\delta_1^2} > \dfrac{1}{4}$ и $\delta_0 < 0$; «амплитуды» колебаний α_n и β_k меняются по закону $|\delta_0|^{\frac{n}{2}}$ с изменением n и при $\delta_0 = -1$ от n не зависят. Зафиксировав значение $\frac{|\delta_0|}{\delta_1^2}$, мы тем самым фиксируем ϖ и T. Другими словами, если $|\delta_0| = 1$, то

$$\alpha_{n+T} = \alpha_n,\ \beta_{n+T} = \beta_n,\ n = 1, 2, ...,$$

если $|\delta_0| \neq 1$, то

$$\alpha_{n+T} = |\delta_0|^{\frac{T}{2}} \alpha_n,\ \beta_{n+T} = |\delta_0|^{\frac{T}{2}} \beta_n,\ n = 1, 2, ...,$$

Случай 3.

$$q_1 = q_2 = q = \frac{\delta_1}{2};\quad \delta_0 = -\frac{\delta_1^2}{4} < 0.$$

В этом случае

$$\alpha_n = A_1\left(\frac{\delta_1}{2}\right)^n + A_2 n\left(\frac{\delta_1}{2}\right)^n;$$

$$\beta_n = B_1\left(\frac{\delta_1}{2}\right)^n + B_2 n\left(\frac{\delta_1}{2}\right)^n,\ n = 1, 2, ...,$$

$$A_1 = \frac{4}{\delta_1};\quad A_2 = -\frac{2}{\delta_1};\quad B_1 = -\frac{4}{\delta_1^2};$$

$$B_2 = \frac{4}{\delta_1^2};\quad \alpha_n = -(n-2)\left(\frac{\delta_1}{2}\right)^{n-1};$$

$$\beta_n = (n-1)\left(\frac{\delta_1}{2}\right)^{n-2},\quad n = 1, 2, ... \quad (12)$$

Для нахождения γ_n получаем неоднородное линейное рекуррентное соотношение второго порядка с нулевыми начальными условиями

$$\gamma_{n+2} = \delta_1\gamma_{n+1} + \delta_0\gamma_n + 1,\ n = 1, 2, ..., \quad (13)$$

$\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, схема решения которого хорошо известна. При рассмотрении конкретного вида (5) удобнее все выкладки проводить с самого начала, а не пользоваться готовыми формулами.

Рассмотрим случай с $\delta_0 = -1$, $\delta_1 = 1$. Непосредственно легко убедиться, что уравнение

$$x_{n+2} = k\frac{x_{n+1}}{x_n},\ n = 1, 2, ...,$$

$$x_1 = a,\ x_2 = b \quad (14)$$

задает периодическую последовательность с периодом $T = 6$ и частотой $\varpi = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

$$(x_n):\ a,\ b,\ k\frac{b}{a},\ k^2\frac{1}{a},\ k^2\frac{1}{b},\ k\frac{a}{b};$$
$$a,\ b,\ k\frac{b}{a},\ k^2\frac{1}{a},\ k^2\frac{1}{b},\ k\frac{a}{b};\ ... \quad (15)$$

Члены этой последовательности имеют вид $k^{\gamma_n}a^{\alpha_n}b^{\beta_n}$ и с учетом (15) находим, что показатели γ_n, α_n, β_n – периодические, с периодом $T = 6$

(γ_n): 0, 0, 1, 2, 2, 1; 0, 0, 1, 2, 2, 1;…

(α_n): 1, 0, –1, –1, 0, 1; 1, 0, –1, –1, 0, 1; … (16)

(β_n): 0, 1, 1, 0, –1, –1; 0, 1, 1, 0, –1, –1; …

Для любого n имеет место равенство

$$\gamma_n + \alpha_n + \beta_n = 1,\quad n = 1, 2, ...$$

Найдем аналитическую запись решения (15). Имеем

$$x_n = k^{\gamma_n}a^{\alpha_n}b^{\beta_n}. \quad (17)$$

Получаем для определения показателей линейные рекуррентные уравнения

$$\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} - \alpha_n,\quad \alpha_1 = 1,\quad \alpha_2 = 0;$$
$$\beta_{n+2} = \beta_{n+1} - \beta_n,\quad \beta_1 = 0,\quad \beta_2 = 1;$$
$$\gamma_{n+2} = \gamma_{n+1} - \gamma_n + 1,\quad \gamma_1 = 0,\quad \gamma_2 = 1.$$

Характеристическое уравнение для этих уравнений имеет вид: $q^2 - q + 1 = 0$, а его корни:

$$q_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}};$$

$$q_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

дают два частных решения q_1^n и q_2^n. Запишем общие решения этих уравнений и начальные условия:

$$\alpha_n = A_1q_1^n + A_2q_2^n,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0;$$

$$\beta_n = B_1q_1^n + B_2q_2^n,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1;$$

$$\gamma_n = C_1q_1^n + C_2q_2^n + 1,\ \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = 0.$$

Определяя постоянные линейной комбинации, находим явные выражения для функций α_n, β_n, γ_n:

$$\alpha_n = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left[\frac{\pi}{3}n - \frac{\pi}{6}\right],\ n = 1, 2, ...;$$

$$\beta_n = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left[\frac{\pi}{3}n - \frac{5\pi}{6}\right],\ n = 1, 2, ...;$$

$$\gamma_n = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) + 1,\ n = 1, 2, ... \quad (18)$$

Решение уравнения (14), задаваемое формулами (17), (18), определяет функцию $x = x(a, b, k, n)$. При фиксированных a, b, k она определяет периодическую числовую последовательность (5). Структура шести членов последовательности, составляющих период a, b, $k\dfrac{b}{a}$, $k^2\dfrac{1}{a}$, $k^2\dfrac{1}{b}$, $k\dfrac{a}{b}$, такова, что изменение одного из этих трех параметров вызывает изменение только четырех чисел из этой шестерки.

Частные эластичности этой функции по трем переменным будут равны соответствующим показателям:

$$E_{x,a}=\frac{a}{x}\frac{\partial x}{\partial a}=\alpha_n;$$

$$E_{x,b}=\frac{b}{x}\frac{\partial x}{\partial b}=\beta_n;$$

$$E_{x,k}=\frac{k}{x}\frac{\partial x}{\partial k}=\gamma_n, \qquad (19)$$

но полная эластичность этой функции [5]

$$E_x=E_{x,a}+E_{x,b}+E_{x,k}=\alpha_n+\beta_n+\gamma_n=1:$$

изменение всех параметров функции на 1 % вызовет изменение членов ряда (17) тоже на 1 %.

Рассмотренному случаю $\delta_0=-1$, $\delta_1=1$ отвечает значение $|\delta_0|/\delta_1^2=1$ и согласно (10) $\mathrm{tg}w=\sqrt{3}$, так что $w=\dfrac{\pi}{3}$, $T=\dfrac{2\pi}{w}=6$. Но значение $|\delta_0|/\delta_1^2=1$ может достигаться и при других комбинациях δ_0 и δ_1, так для $\delta_1=\sqrt{2}>0$ и $\delta_0=-2$ имеем $|\delta_0|/\delta_1^2=1$, так что $w=\dfrac{\pi}{3}$ и $T=6$. В этом случае мы имеем дело с уравнением ($k=g=1$)

$$x_{n+2}=\frac{x_{n+1}^{\sqrt{2}}}{x_n^2}\ n=1,2,\ldots,x_1=a,x_2=b$$

записано с помощью (11) и (11*):

$$\alpha_n=-\frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}(n-2),\ n=1,2,\ldots; \qquad (20)$$

$$\beta_n=\frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}(n-1),\quad n=1,2,\ldots \qquad (20^*)$$

Убеждаемся, что

$$\begin{matrix}\alpha_{n+6}=2^3\alpha_n=8\alpha_n, \\ \beta_{n+6}=2^3\beta_n=8\beta_n\end{matrix},\ n=1,2,\ldots$$

В качестве следующего примера рассмотрим случай, когда $\dfrac{|\delta_0|}{\delta_1^2}=\dfrac{1}{2}$. Тогда при $\delta_1>0$ $\mathrm{tg}w=1$, соответственно $w=\dfrac{\pi}{4}$, а $T=\dfrac{2\pi}{w}=8$. Если $\delta_0=-1$, $\delta_1=\sqrt{2}>0$, то уравнение

$$x_{n+2}=\frac{x_{n+1}^{\sqrt{2}}}{x_n},\quad x_1=a,\quad x_2=b \qquad (21)$$

определяет периодическую числовую последовательность с периодом T = 8, описываемую формулами

$$x_n=a^{\alpha_n}b^{\beta_n};\quad \alpha_n=-\sqrt{2}\sin\left[\frac{\pi}{4}(n-2);\right]$$

$$\beta_n=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}(n-1),\quad n=1,2,\ldots \qquad (22)$$

В этом случае $|\delta_0|=1$, так что

$$\alpha_{n+8}=\alpha_n,\quad \beta_{n+8}=\beta_n,\quad n=1,2,\ldots$$

Если $\dfrac{|\delta_0|}{\delta_1^2}=\dfrac{1}{2}$, но $\delta_0\neq-1$ и $\delta_1>0$, то

$$\alpha_n=\frac{-2|\delta_0|}{\sqrt{4|\delta_0|-\delta_1^2}}\sin\frac{\pi}{4}(n-2),\ n=1,2,\ldots$$

$$\beta_n=\frac{2\delta_0^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{4|\delta_0|-\delta_1^2}}\sin\frac{\pi}{4}(n-1),\ n=1,2,\ldots \qquad (23)$$

Возьмем $\delta_0=-2$, $\delta_1=2>0$, $\left(\dfrac{|\delta_0|}{\delta_1^2}=\dfrac{1}{2}\right)$, тогда для последовательности

$$x_{n+2}=\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^2,\ n=1,2,\ldots,$$

$$x_1=a,x_2=b. \qquad (24)$$

Получаем

$$\alpha_n=-2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{\pi}{4}(n-2);$$

$$\beta_n=2^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{\pi}{4}(n-1),\ n=1,2,\ldots$$

В этом случае

$$\alpha_{n+8}=2^4\alpha_n=16\alpha_n;$$

$$\beta_{n+8}=2^4\beta_n=16\beta_n,\ n=1,2,\ldots$$

Соответственно, $x_{n+8}=(x_n)^{16}$ – восемь чисел очередного цикла получаются возведением в 16-ю степень чисел предыдущего цикла. Числа первой восьмерки этой последовательности

$$(x_n):\ a,\ b,\left(\frac{b}{a}\right)^2,\ \frac{b^2}{a^4},\frac{1}{a^4},\frac{1}{b^4},\left(\frac{a}{b}\right)^8,\frac{a^{16}}{b^8};\ldots$$

Если $a = b$, то (x_n):

$$a, a, 1, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^4}, 1, a^8; \ldots$$

Если $a \neq 1$, то при $n \to \infty$, три числа из восьмерки цикла стремятся к нулю, три к бесконечности, два остаются равными единице.

Совсем по-другому ведут себя числа восьмерки цикла, если $\delta_0 = -\frac{1}{2}$, $\delta_1 = 1 > 0$ $\left(\frac{|\delta_0|}{\delta_1^2} = \frac{1}{2}\right)$.

Имеем

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{\sqrt{x_n}},\ n = 1, 2, ..., x_1 = a, x_2 = b. \tag{26}$$

В этом случае

$$\alpha_n = 2^{\frac{2-n}{2}} \sin\left[\frac{\pi}{4}(n-2)\right] = 2\cdot 2^{-\frac{n}{2}} \sin\left[\frac{\pi}{4}(n-2)\right],\ n = 1, 2, ...$$

$$\beta_n = 2^{\frac{3-n}{2}} \sin\left[\frac{\pi}{4}(n-1)\right] = 2\sqrt{2}\cdot 2^{-\frac{n}{2}} \sin\left[\frac{\pi}{4}(n-1)\right],\ n = 1, 2, ... \tag{27}$$

Находим, что

$$x_{n+8} = (x_n)^{1/16},\quad \lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0,\ \lim_{n\to\infty}\beta_n = 0,$$

$$a^{\alpha_n} \to 1, b^{\beta_n} \to 1, x_n \to x = 1 \text{ при } n \to \infty.$$

Если $\frac{|\delta_0|}{\delta_1^2} = \frac{1}{3}$ и $\delta_1 > 0$, то $\operatorname{tg} w = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $w = \frac{\pi}{6}$, а $T = 12$. Но при $\delta_1 = -1$, $\delta_1 = -1$ имеем $w = \frac{2\pi}{3}$ и $T = 3$.

Если $\delta_1 = \delta_0 = 1$, то для уравнения

$$x_{n+2} = x_n x_{n+1},\ n = 1, 2, ..., x_1 = a, x_2 = b.$$

Находим $x_n = a^{\alpha_n} b^{\beta_n}$ и

$$\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} + \alpha_n,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0;$$

$$\beta_{n+2} = \beta_{n+1} + \beta_n,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1.$$

Оба уравнения определяют последовательность Фибоначчи с начальными данными 1,0 для α_n и 0,1 для β_n.

Проведенный здесь анализ свидетельствует о возможности аналитически изучать перестройку решений этого класса уравнений при изменении параметров модели.

Список литературы

1. Абакумова С.И., Руденко В.Г. Исследование мультипликативного уравнения второго порядка // Состояние и перспективы развития электротехнологии: XVII Международная научно-техническая конференция (Бенардосовские чтения), 29–31 мая 2013, III том «Электротехника». – Иваново: ИГЭУ, 2013. – С. 312–314.

2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: учебное пособие в 10 т., т. VI. Гидродинамика – М.: Наука. 1986. – С. 169–183.

3. Руденко В.Г., Тимченко О.В. Эластичность многофакторных экономических показателей // Научные труды № 32 (часть 4) «Дни науки». – Пятигорск: ПГТУ, 2009. – С. 114–119.

4. Фейгенбаум М. Универсальное поведение в нелинейных системах // УФН. – 1983. – Т. 141, Вып. 2. – С. 343–374.

5. Figenbaum M.J. Univercal behaviour in nonlinear systems // Los Alamos Sci. –1980. – № 1. – P. 4–27.

References

1. Abakumova S.I., Rudenko V.G. Issledovanie multiplikativnogo uravneniya vtorogo poryadka. XVII mezhdunarodnaya nauchno-tekhnicheskayakonferentsiya «Sostoyanie b perspektivy razvitiya elektrotekhnologii», 29–30 maya 2013? III tom «elektrotekhnika», s/ 312-314, IGEU, Ivanovo 2013.

2. Landay l.D., Lifshic E.M. Teoreticyeskay fizika: uchebnoe posobie v 10 t., t. VI Gidrodinamika. Moskva:, Nauka. 1986. pp. 169–183.

3. Rudenko V.G., Timchenko O.V. Elastichnost mnogofaktornykh ekonomicheskikh pokazateley// Nauchnye trudy № 32 (chast 4) «Dni nauki»- Pyatigorsk: PGTU? 2009. pp. 114–119.

4. Figenbaum M. Universalnoe povedenie v nelineynykh sistemakh, UFN, 1983, t.141, vyp. 2, pp. 343–374.

5. Figenbaum M. J. Univercal behaviour in nonlinear systems.-Los Alamos Sci.1980. no. 1, pp. 4–27.

Рецензенты:

Алтухов В.И., д.ф.-м.н., профессор, ведущий научный сотрудник отдела стратегического и инновационного развития СКФУ, филиал, г. Пятигорск;

Казуб В.Т., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой физики и математики Пятигорского медико-фармацевтического института, филиал ГБОУ ВПО ВолгГМУ Минздрава РФ, г. Пятигорск.

Работа поступила в редакцию 05.08.2014.