УДК 539.3

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТРАЖЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРУГИХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ В ВИДЕ ТРЕУГОЛЬНОГО ИМПУЛЬСА ОТ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПЛАСТИНКИ

**Мусаев В.К., Ситник С.В., Тарасенко А.А., Ситник В.Г., Зюбина М.В.**

*Группа компаний АВМ, Москва, e-mail: musayev-vk@yandex.ru*

Рассматривается математическое моделирование волн напряжений при волновом воздействии в объектах сложной формы. Задачи решаются с помощью численного моделирования двумерных плоских уравнений волновой теории упругости. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать сложные задачи при нестационарных динамических воздействиях. При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык Фортран-90. Исследуемая область разбивается по пространственным переменным на конечные элементы первого порядка. По временной переменной исследуемая область разбивается на линейный конечный элемент. Рассмотрена задача об отражении упругих волн напряжений в виде треугольного импульса от свободной поверхности пластинки. Исследуемая расчетная область имеет 4221 узловую точку и 4000 конечных элементов. Решается система уравнений из 16884 неизвестных. Приводится нормальное напряжение при отражении от свободной поверхности пластинки импульсного воздействия в виде треугольника. Волна сжатия при отражении от свободной поверхности пластинки становится волной растяжения, которая может привести к отколу.

**Ключевые слова: моделирование, импульсное воздействие, численный метод, перемещение, напряжение, теория упругости, конечные элементы, алгоритм, комплекс программ, отраженная волна, откол**

# MATHEMATICAL MODELLING OF NON-STATIONARY ELASTIC REFLECTION OF STRESS WAVES IN THE FORM OF A TRIANGULAR PULSE FROM THE FREE SURFACE OF A PLATE

**Musaev V.K., Sitnik S.V., Tarasenko A.A., Sitnik V.G., Zyubina M.V.**

*The group of companies AVM, Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru*

Mathematical modeling of stress waves in the wave effect in objects of complex shape. The tasks solved with the help of numerical simulation of two-dimensional planar wave equations of elasticity theory. On the basis of a method of final elements in the movements of the algorithm and the program complex for solving linear flat two-dimensional problems, which allow solving difficult tasks in the non-stationary dynamic impacts. The development of complex programs used algorithmic language Fortran-90. The study area is divided on spatial variables on finite elements of the first order. Temporary variable study area is split into linear finite element. Considered is the problem of reflection of elastic waves stresses in the form of a triangular pulse from the free surface of the plate. Studied computational domain has 4221 anchor point and 4000 finite elements. We solve the system of equations of 16884 unknown. Provides normal stress in the reflection from the free surface of the plate pulse effect in the form of a triangle. Wave compression in the reflection from the free surface of the plate to be the wave of tension that can lead to splitting.

**Keywords: modeling, impulse effect, numerical method, displacement, stress, elasticity theory, finite elements, algorithm, a set of programs, the reflected wave, split**

Волны напряжений различной природы, распространяясь в деформируемом теле, взаимодействуют друг с другом. После трехкратного или четырехкратного прохождения и отражения волн напряжений в теле процесс распространения возмущений становится установившимся, напряжения и деформации усредняются, тело находится в колебательном движении. Некоторые результаты рассматриваемого численного метода приведены в следующих работах [1–2, 4–10].

Моделирование широко применяется при решении научных и прикладных задач. Математические модели являются наиболее характерными в естественнонаучных исследованиях. Физические модели имитируют часть свойств исследуемого объекта. Поставленная задача реализуется с помощью уравнений математической нестационарной динамической теории упругости. При решении сложных задач возникают проблемы оценки достоверности полученных результатов. На основании изложенного можно утверждать, что оценка точности и достоверности результатов численного моделирования волн напряжений в областях сложной формы является актуальной фундаментальной и прикладной научной задачей. В работах [1–2, 4–5, 9–10] приведена информация о постановке волновых задач теории упругости.

Точные уравнения двумерной (плоское напряженное состояние) динамической теории упругости имеют вид

$$\left\|\begin{matrix}\sigma_x, \tau_{xy}\\ \tau_{xy}, \sigma_y\end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\end{matrix}\right\| = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdot \left\|\begin{matrix}u\\ v\end{matrix}\right\|, \ (x, y) \in \Gamma;$$

$$\left\|\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{matrix}\right\| = \rho \cdot \left\|\begin{matrix}C_p^2, & C_p^2 - 2C_s^2, & 0\\ C_p^2 - 2C_s^2, & C_p^2, & 0\\ 0, & 0, & C_s^2\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{matrix}\right\|;$$

$$\left\|\begin{matrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial}{\partial x}, & 0\\ 0, & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}, & \dfrac{\partial}{\partial x}\end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix}u\\ v\end{matrix}\right\|, \ (x, y) \in (\Gamma \cup S), \qquad (1)$$

где $\sigma_x$, $\sigma_y$ и $\tau_{xy}$ – компоненты тензора упругих напряжений; $\varepsilon_x$, $\varepsilon_y$ и $\gamma_{xy}$ – компоненты тензора упругих деформаций; $u$ и $v$ – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей $OX$ и $OY$ соответственно; $\rho$ – плотность материала; $C_p = \sqrt{\dfrac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ – скорость продольной упругой волны; $C_s = \sqrt{\dfrac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ – скорость поперечной упругой волны; $\nu$ – коэффициент Пуассона; $E$ – модуль упругости; $S\ (S_1 \cup S_2)$ – граничный контур тела Г.

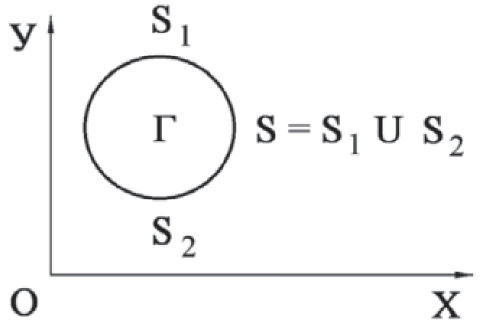


*Рис. 1. Некоторое тело Г в прямоугольной декартовой системе координат XOY*

Систему (1) в области, занимаемой телом Г, следует интегрировать при начальных и граничных условиях. Начальные условия в области Г зададим в виде

$$\left\|\begin{matrix}u\\ v\end{matrix}\right\|_{t=0} = \left\|\begin{matrix}u_0\\ v_0\end{matrix}\right\|; \quad \left\|\begin{matrix}\dot{u}\\ \dot{v}\end{matrix}\right\|_{t=0} = \left\|\begin{matrix}\dot{u}_0\\ \dot{v}_0\end{matrix}\right\|, \ (x, y) \in \Gamma, \qquad (2)$$

где $u_0$, $v_0$, $\dot{u}_0$ и $\dot{v}_0$ – заданные в области Г функции.

Граничные условия зададим в виде составляющих компонентов тензора упругих напряжений на границе $S_1$

$$\left\|\begin{matrix}\sigma_x, \tau_{xy}\\ \tau_{xy}, \sigma_y\end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix}l\\ m\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}A_x\\ A_y\end{matrix}\right\|, \ (x, y) \in S_1, \qquad (3)$$

составляющих компонентов вектора упругих перемещений на границе $S_2$

$$\left\|\begin{matrix}u\\ v\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}B_x\\ B_y\end{matrix}\right\|, (x, y) \in S_2, \qquad (4)$$

где $l$ и $m$ – направляющие косинусы; $A_x$, $A_y$, $B_x$ и $B_y$ – заданные на границе $S$ функции.

Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями – используем метод конечных элементов в перемещениях. Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Чтобы выполнить динамический расчет методом конечных элементов, нужно иметь матрицу жесткости и матрицу инерции конечного элемента.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для тела Г, записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\overline{H}\ddot{\vec{\Phi}} + \overline{K}\vec{\Phi} = \vec{R}; \quad \vec{\Phi}\big|_{t=0} = \vec{\Phi}_0;$$

$$\dot{\vec{\Phi}}\big|_{t=0} = \dot{\vec{\Phi}}_0, \qquad (5)$$

где $\overline{H}$ – матрица инерции; $\overline{K}$ – матрица жесткости; $\vec{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; $\vec{R}$ – вектор узловых упругих внешних сил.

Соотношение (5) система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями. Таким образом, с помощью метода конечных элементов в перемещениях линейную задачу с начальными и граничными условиями привели к линейной задаче Коши (5). В работах [1–10] приведена информация о численном моделировании нестационарных волн напряжений в деформируемых телах.

Для интегрирования уравнения (5) конечноэлементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему виду

$$\overline{H}\frac{d}{dt}\dot{\vec{\Phi}} + \overline{K}\vec{\Phi} = \vec{R}; \quad \frac{d}{dt}\vec{\Phi} = \dot{\vec{\Phi}}. \qquad (6)$$

Интегрируя по временной координате соотношение (6) с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек:

$$\dot{\vec{\Phi}}_{i+1} = \dot{\vec{\Phi}}_i + \Delta t\overline{H}^{-1}\left(-\overline{K}\vec{\Phi}_i + \vec{R}_i\right);$$

$$\vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t\dot{\vec{\Phi}}_{i+1}. \qquad (7)$$

Основные соотношения метода конечных элементов в перемещениях получены с помощью принципа возможных перемещений и конечноэлементного варианта метода Галеркина. Система уравнений (5) для внутренних и граничных узловых точек, полученная в результате интегрирования уравнения движения теории упругости, должна давать решение, сходящееся к решению исходной системы (1). Шаг по временной переменной $\Delta t$ определяем из следующего соотношения:

$$\Delta t = k\,\frac{\min \Delta l_i}{C_p}, \quad (i = 1, 2, 3, ..., r), \qquad (8)$$

где $\Delta l$ – длина стороны конечного элемента.

Результаты численного эксперимента показали, что при $k = 0,5$ обеспечивается устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек на квазирегулярных сетках.

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать сложные задачи при взрывных воздействиях на уникальные сооружения. При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык Фортран-90. Исследуемая область разбивается по пространственным переменным на треугольные конечные элементы с тремя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений и на прямоугольные конечные элементы с четырьмя узловыми точками с билинейной аппроксимацией упругих перемещений. По временной переменной исследуемая область разбивается на линейный конечный элемент первого порядка. Некоторые вопросы в области постановки, разработки методики, алгоритма и результатов решенных нестационарных динамических задач рассмотрены в следующих работах [1–10]. Рассмотрим задачу об отражении упругих волн напряжений в виде треугольного импульса от свободной поверхности.

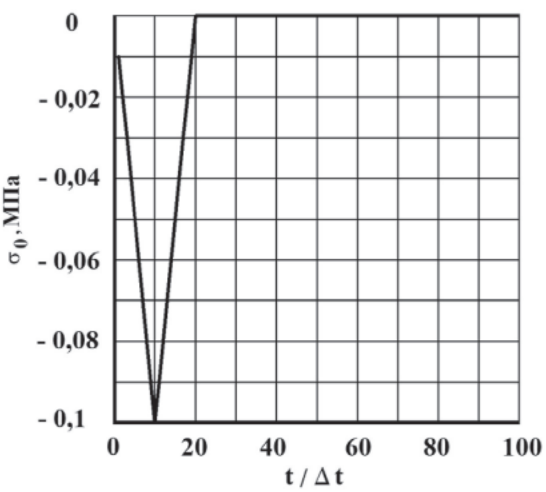


*Рис. 2. Воздействие в виде треугольного импульса*

На границе пластинки AB (рис. 3) приложено нормальное напряжение $\sigma_y$ (рис. 2), которое при $0 \le n \le 10$ ($n = t/\Delta t$) изменяется линейно от 0 до $P$, а при $n \ge 10$ от $P$ до 0 ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = -0,1$ МПа ($-1$ кгс/см$^2$)). Граничные условия для контуров $BC$ и $AD$ при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Контур $CD$ свободен от нагрузок. Отраженные волны от контуров $BC$ и $AD$ не доходят до исследуемых точек при $0 \le n \le 190$. Исследуемая расчетная область имеет 4221 узловую точку и 4000 конечных элементов. Решается система уравнений из 16884 неизвестных.

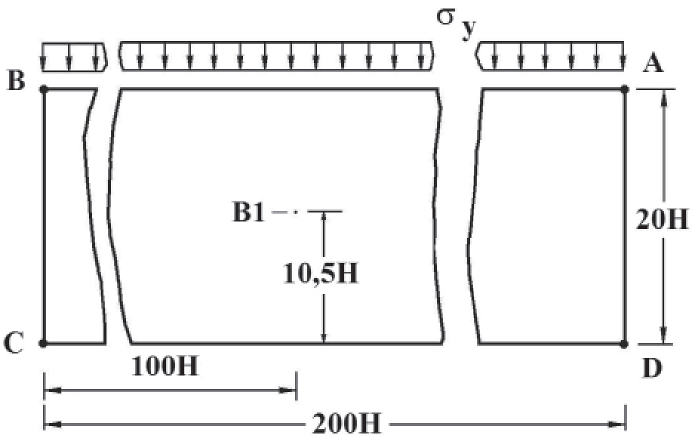


*Рис. 3. Постановка задачи об отражении волн напряжений*

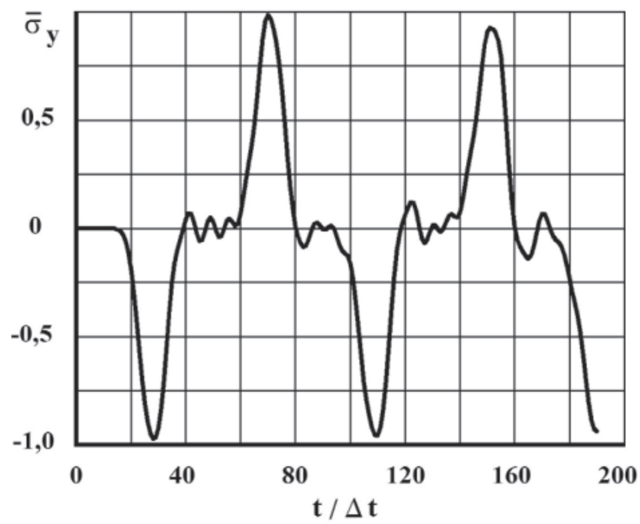


*Рис. 4. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ во времени n в точке B1*

Для примера на рис. 4 представлено изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ $\left(\bar{\sigma}_y = \sigma_y / |\sigma_0|\right)$ во времени $n$ в точке B1. При отражении от свободной поверхности пластинки волна сжатия становится волной растяжения, которая может привести к отколу.

Достоверность рассматриваемого численного метода приведена в следующих работах [2, 4–10]. Сравнение с результатами других методов показало хорошее совпадение, что позволяет сделать вывод о физической и математической достоверности результатов численного решения динамических задач, полученных методом конечных элементов в перемещениях.

## Список литературы

1. Мусаев В.К. Решение плоской динамической задачи теории упругости с помощью метода конечных элементов с применением треугольного элемента с тремя узловыми точками // Труды МИСИ. – 1976. – № 137. – С. 48–50.

2. Мусаев В.К. Численное решение волновых задач теории упругости и пластичности // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия прикладная математика и информатика. – 1997. – № 1. – С. 87–110.

3. Мусаев В.К. Вычислительные методы теоретической физики в задачах моделирования катастроф / В.К. Мусаев, Е.П. Жидков, Л.А. Севастьянов // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2005. – № 1. – С. 9–12.

4. Мусаев В.К. Об оценке достоверности и точности численного решения нестационарных динамических задач // Вестник Российского университета дружбы народов. Се-

рия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 3. – С. 48–60.

5. Мусаев В.К. Оценка достоверности и точности результатов вычислительного эксперимента при решении задач нестационарной волновой теории упругости // Научный журнал проблем комплексной безопасности. – 2009. – № 1. – С. 55–80.

6. Бедняков В.Г. Достоверность результатов численного метода Мусаева В.К. в перемещениях при моделировании отражения упругих волн напряжений в виде дельта функции от свободной поверхности / В.Г. Бедняков, С.В. Ситник, В.А. Савичев, О.В. Куранцов, Д.А. Денисюк // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием. – М.: РУДН, 2012. – С. 237–239.

7. Ситник С.В. Достоверность результатов численного метода Мусаева В.К. в перемещениях при моделировании отражения нестационарных упругих волн напряжений в виде дельта функции от свободной поверхности / С.В. Ситник, В.А. Савичев, С.В. Акатьев, Д.В. Акатьев, Т.С. Сущев // Инновационные технологии в развитии строительства, машин и механизмов для строительства и коммунального хозяйства, текущего содержания и ремонта железнодорожного пути. Сборник трудов международной научно-технической конференции. – Смоленск: Смоленский филиал МИИТ, 2012. – С. 482–485.

8. Ситник С.В. Достоверность результатов численного метода Мусаева В.К. в перемещениях при математическом моделировании отражения упругих волн напряжений в виде дельта функции от свободной поверхности пластинки / С.В. Ситник, Т.С. Сущев, А.И. Кормилицин, С.М. Шиянов, Д.В. Акатьев // Безопасность и экология технологических процессов и производств. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Поселок Персиановский Ростовской области: Донской государственный аграрный университет, 2012. – С. 287–292.

9. Мусаев В.К. О моделировании отражения упругих волн напряжений от свободной поверхности деформируемой области // Двойные технологии. – 2012. – № 4. – С. 61–64.

10. Musayev V.K. Testing of stressed state in the structure-base system under non-stationary dynamic effects // Proceedings of the second International conference on recent advances in geotechnical earthquake engineering and soil dynamics. – Sent Louis: University of Missouri-Rolla, 1991. – Vol. 3. – P. 87–97.

## References

1. Musaev V.K. Reshenie ploskoj dinamicheskoj zadachi teorii uprugosti s pomoshh'yu metoda konechnyx e'lementov s primeneniem treugol'nogo e'lementa s tremya uzlovymi tochkami // Trudy MISI. 1976. no. 137. pp. 48–50.

2. Musaev V.K. Chislennoe reshenie volnovyx zadach teorii uprugosti i plastichnosti // Vestnik Rossijskogo universiteta druzhby narodov. Seriya prikladnaya matematika i informatika. 1997. no. 1. pp. 87–110.

3. Musaev V.K. Vychislitel'nye metody teoreticheskoj fiziki v zadachax modelirovaniya katastrof / V.K. Musaev, E.P. Zhidkov, L.A. Sevast'yanov // Vestnik Rossijskogo universiteta druzhby narodov. Seriya problemy kompleksnoj bezopasnosti. 2005. no. 1. pp. 9–12.

4. Musaev V.K. Ob ocenke dostovernosti i tochnosti chislennogo resheniya nestacionarnyx dinamicheskix zadach // Vestnik Rossijskogo universiteta druzhby narodov. Seriya problemy kompleksnoj bezopasnosti. 2007. no. 3. pp. 48–60.

5. Musaev V.K. Ocenka dostovernosti i tochnosti rezul'tatov vychislitel'nogo e'ksperimenta pri reshenii zadach nestacionarnoj volnovoj teorii uprugosti // Nauchnyj zhurnal problem kompleksnoj bezopasnosti. 2009. no. 1. pp. 55–80.

6. Bednyakov V.G. Dostovernost' rezul'tatov chislennogo metoda Musaeva V.K. v peremeshheniyax pri modelirovanii otrazheniya uprugix voln napryazhenij v vide del'ta funkcii ot svobodnoj poverxnosti / V.G. Bednyakov, S.V. Sitnik, V.A. Savichev, O.V. Kurancov, D.A. Denisyuk // Informacionno-telekommunikacionnye texnologii i matematicheskoe modelirovanie vysokotexnologichnyx sistem. Tezisy dokladov Vserossijskoj konferencii s mezhdunarodnym uchastiem. M.: RUDN, 2012. pp. 237–239.

7. Sitnik S.V. Dostovernost' rezul'tatov chislennogo metoda Musaeva V.K. v peremeshheniyax pri modelirovanii otrazheniya nestacionarnyx uprugix voln napryazhenij v vide del'ta funkcii ot svobodnoj poverxnosti / S.V. Sitnik, V.A. Savichev, D.V. Akat'ev, T.S. Sushhev // Innovacionnye texnologii v razvitii stroitel'stva, mashin i mexanizmov dlya stroitel'stva i kommunal'nogo xozyajstva, tekushhego soderzhaniya i remonta zheleznodorozhnogo puti. Sbornik trudov mezhdunarodnoj nauchno-texnicheskoj konferencii. Smolensk: Smolenskij filial MIIT, 2012. pp. 482–485.

8. Sitnik S.V. Dostovernost' rezul'tatov chislennogo metoda Musaeva V.K. v peremeshheniyax pri matematicheskom modelirovanii otrazheniya uprugix voln napryazhenij v vide del'ta funkcii ot svobodnoj poverxnosti plastinki / S.V. Sitnik, T.S. Sushhev, A.I. Kormilicin, S.M. Shiyanov, D.V. Akat'ev // Bezopasnost' i e'kologiya texnologicheskix processov i proizvodstv. Materialy Vserossijskoj nauchno-prakticheskoj konferencii. Poselok Persianovskij Rostovskoj oblasti: Donskoj gosudarstvennyj agrarnyj universitet, 2012. pp. 287–292.

9. Musaev V.K. O modelirovanii otrazheniya uprugix voln napryazhenij ot svobodnoj poverxnosti deformiruemoj oblasti // Dvojnye texnologii. 2012. no. 4. pp. 61–64.

10. Musayev V.K. Testing of stressed state in the structure-base system under non-stationary dynamic effects // Proceedings of the second International conference on recent advances in geotechnical earthquake engineering and soil dynamics. Sent Louis: University of Missouri-Rolla, 1991. Vol. 3. pp. 87–97.

**Рецензенты:**

Савчин В.М., д.ф.-м.н., профессор кафедры математического анализа и теории функций факультета физико-математических и естественных наук, Российский университет дружбы народов, г. Москва;

Зволинский В.П., д.х.н., профессор кафедры экологического мониторинга и прогнозирования экологического факультета, Российский университет дружбы народов, г. Москва.

Работа поступила в редакцию 05.08.2014.