

УДК 532:536

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИССИПАТИВНОГО РАЗОГРЕВА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ ДЛЯ ЖИДКОСТИ С ЭФФЕКТОМ «ОТВЕРДЕВАНИЯ» ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ ТРЕТЬЕЙ СХЕМЫ ТЕЧЕНИЯ

Колодежнов В.Н., Веретенников А.С.

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет инженерных технологий»,
Воронеж, e-mail: kvn117@mail.ru

Рассмотрена третья схема течения в цилиндрическом канале для жидкости, реологическая модель которой учитывает проявление упрочнения при сдвиге или эффекта «отвердевания». В соответствии с реологической моделью для такой схемы течения канал разбивали на три зоны. В первой и второй зонах жидкость демонстрирует соответственно псевдопластическое и дилатантное поведение. Третья зона оказывается заполненной материалом «отвердевшей» жидкости. Для такого варианта течения рассмотрена задача установившегося конвективного теплопереноса с учетом диссипации механической энергии. При этом на стенке канала ставились температурные граничные условия первого рода. Конвективный теплоперенос вдоль оси канала определяли по средней скорости потока. Диссипативную составляющую принимали с учетом точного распределения скорости в поперечном сечении канала. Получено выражение для распределения температуры во всех зонах канала. Проведены численные эксперименты и анализ влияния параметров модели на характеристики процесса диссипативного разогрева. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании течения неньютоновских жидкостей такого рода в проточных элементах технологического оборудования.

Ключевые слова: диссипация, неньютоновская жидкость, температура, эффект «отвердевания», упрочнение при сдвиге

THE RESULTS OF MODELING OF DISSIPATIVE HEATING IN A CYLINDRICAL CHANNEL FOR FLUID WITH EFFECT OF THE «SOLIDIFICATION» AT THE REALIZATION OF THE THIRD SCHEME CURRENT

Kolodezhnov V.N., Veretennikov A.S.

Federal State Budget Educational Institution of Higher Professional Education «Voronezh State University of Engineering Technologies», Voronezh, e-mail: kvn117@mail.ru

Consider the third flow pattern in a cylindrical channel for fluid rheological model which takes into account the manifestation of shear thinning fluid (STF) or the effect of «solidification». In accordance with the rheological model for such scheme currents the flow region is divided into three zones. In the first and second zones of fluid shows pseudoplastic and dilatant behavior. The third zone is filled with the material of «solidified» fluid. For this scheme we consider the problem of steady flow of convective heat transference, taking into account the dissipation of mechanical energy. For this there were placed at the channel the wall temperature boundary condition of the first kind. Convective heat transference along the axis of the channel is determined by the average flow velocity. Dissipative component taken into account with the exact velocity distribution in the channel cross section. An expression for the temperature distribution in all areas of the channel was received. Numerical experiments and analysis of the impact of model parameters on the characteristics of the process of dissipative heating. The obtained results can be used for modeling the flow of non-Newtonian fluids of such elements in the flow of the process equipment.

Keywords: dissipation, non-Newtonian fluid, temperature, the effect of «solidification», shear thickening fluid

В [1–4] представлен обзор публикаций, в которых приводятся результаты исследования реологических свойств некоторых видов суспензий на основе мелкодисперсных частиц, демонстрирующих проявление эффекта «отвердевания». В [1] предложена реологическая модель жидкостей такого рода, а в [2] с привлечением этой реологической модели решена задача о течении в цилиндрическом канале. При этом показано, что в зависимости от перепада давления на длине канала возможны три схемы течения. В [3, 4] для первых двух схем течения проведено математическое моделирование конвективного теплопереноса в цилиндрическом канале с учетом диссипации

механической энергии. В данной работе приводятся результаты моделирования конвективного теплопереноса с учетом диссипации для третьей схемы течения.

В работе [2] было показано, что третья схема течения реализуется при выполнении следующего условия

$$\Delta p = p_L - p_0 > \frac{2 \cdot L \cdot \tau_2}{R},$$

где Δp – перепад давления на длине канала; p_0, p_L – давление на входе и выходе из канала; τ_2 – параметр реологической модели суспензии, представляющий собой предельное значение касательного напряжения; L – длина канала; R – радиус канала.

Особенностью такой схемы является формирование в канале трех зон. Первые две из них представляют собой зоны соответственно псевдопластического и дилатантного течения. Третья же зона оказывается заполненной «отвердевшей» жидкостью. Границами раздела между этими зонами являются цилиндрические поверхности с радиусами [2]

$$R_{\mu 1} < R_{\mu 2} < R;$$

$$R_{\mu 1} = \frac{8 \cdot R}{G \cdot La \cdot (1+B)}; \quad R_{\mu 2} = \frac{8 \cdot R}{G \cdot La},$$

где G , La – геометрический критерий подобия и критерий подобия Лагранжа соответственно; B – параметр реологической модели.

Рассмотрим задачу конвективного теплопереноса в цилиндрическом канале с учетом диссипации механической энергии

в случае реализации третьей схемы течения жидкости с эффектом «отвердевания», представленной на рис. 1.

Учитывая разбиение области течения на три зоны, решение задачи по определению распределения температуры в канале будем искать в виде

$$T^{(k)}(r, z) = \begin{cases} T^{(1)}(r, z), & |r| < R_{\mu 1}; \\ T^{(2)}(r, z), & R_{\mu 1} \leq |r| \leq R_{\mu 2}; \\ T^{(3)}(r, z), & R_{\mu 2} \leq |r| \leq R, \end{cases}$$

где $T^{(k)}(r, z)$ – распределения температур жидкости в основных зонах, представляющие собой неизвестные функции радиальной r и продольной z координат. Здесь и далее верхний индекс k в круглых скобках принимает значения $k = 1, 2, 3$ соответственно, для каждой из зон течения с тем же номером.

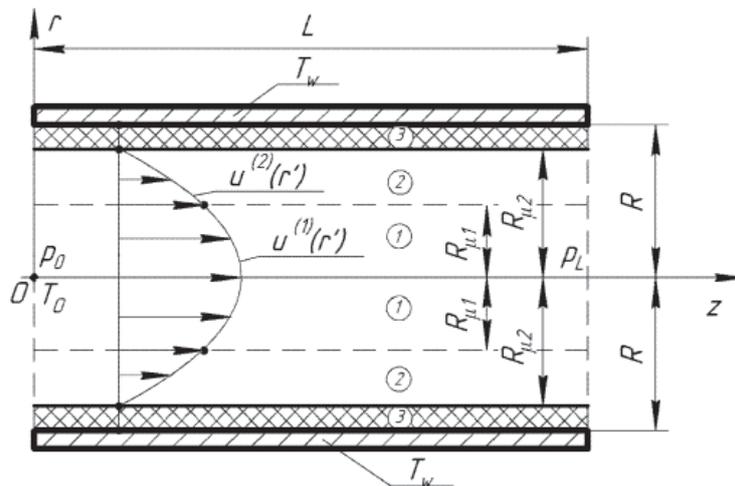


Рис. 1. Третья схема течения:

1, 2 – соответственно первая и вторая зоны течения;
3 – третья зона, заполненная материалом «отвердевшей» жидкости

Решение задачи проводилось в безразмерном виде, с учетом соотношений из [2, 3].

Уравнение конвективного теплопереноса в цилиндрическом канале

[5] с учетом диссипации в безразмерном виде для первой и второй зон течения может быть записано следующим образом:

$$S_1 \cdot u'_m \cdot \frac{\partial T'}{\partial z'} = S_2 \cdot \frac{1}{r'} \cdot \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial T'}{\partial r'} \right) + \tau'_{rz} (\dot{\gamma}') \cdot \dot{\gamma}'; \quad (1)$$

$$S_1 = \frac{G \cdot Re}{2 \cdot Ec \cdot La}; \quad S_2 = \frac{2}{Pr \cdot Ec \cdot La},$$

где $T' = T'(r', z')$ – температура жидкости в канале, представляющая собой неизвестную функцию радиальной r' и продольной z' координат; u'_m – средняя скорость по про-

ходному сечению канала (с учетом наличия третьей зоны); S_1, S_2 – параметры уравнения, определяемые через основные критерии подобия; τ'_{rz} – касательное напряжение;

$\dot{\gamma}$ – скорость сдвига; Pr, Ec, Re – критерии подобия Прандтля, Эккерта и Рейнольдса соответственно.

Здесь и далее верхним штрихом обозначены безразмерные величины.

Решение задачи проводили с учетом следующих граничных условий:

$$r' = 0; \quad \frac{\partial T'}{\partial r'} = 0; \quad (T' \neq \infty); \quad (2)$$

$$r' = R'_{\mu 1}; \quad T'^{(1)} = T'^{(2)}; \quad \frac{\partial T'^{(1)}}{\partial r'} = \frac{\partial T'^{(2)}}{\partial r'}; \quad (3)$$

$$r' = R'_{\mu 2}; \quad T'^{(2)} = T'^{(3)}; \quad \frac{\partial T'^{(2)}}{\partial r'} = \lambda' \cdot \frac{\partial T'^{(3)}}{\partial r'}; \quad (4)$$

$$r' = 1; \quad T'^{(3)} = T'_w = \frac{T_w - T_*}{T_{**} - T_*}; \quad (5)$$

$$z' = 0; \quad T' = T'_0 = \frac{T_0 - T_*}{T_{**} - T_*}, \quad (6)$$

где T_0 – температура жидкости на входе в канал; T_w – принимаемая постоянной температура стенки канала; T_* , T_{**} – некоторые характерные значения температуры среды в канале; λ' – безразмерный параметр, равный отношению коэффициента теплопроводности «отвердевшей» жидкости к ко-

эффициенту теплопроводности среды во второй зоне.

Применяя методику решения аналогичной задачи [3, 4] для первой и второй зон течения с учетом граничных условий (2), (3), функцию распределения температуры можно представить в виде

$$T'^{(k)}(r', z') = C_2^{(1)} + f'^{(k)}(r') + \sum_{j=1}^{\infty} C_j \cdot J_0(\epsilon_j \cdot r') \cdot \exp(-S_4 \cdot \epsilon_j^2 \cdot z'), \quad k = 1, 2, \quad (7)$$

где $J_0(\epsilon_j \cdot r')$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка; C_j – коэффици-

енты разложения; $C_2^{(1)}$ – неизвестная пока константа.

Для краткости записи в (7) приняты следующие обозначения:

$$f'^{(k)}(r') = \begin{cases} f'^{(1)}(r'), & |r'| < R'_{\mu 1}; \\ f'^{(2)}(r'), & R'_{\mu 1} \leq |r'| \leq R'_{\mu 2}; \end{cases}$$

$$f'^{(1)}(r') = -\frac{S_3 \cdot n_1^2}{S_2 \cdot (1 + 3 \cdot n_1)^2} \cdot (r')^{\frac{1}{n_1} + 3};$$

$$f'^{(2)}(r') = -\frac{1}{S_2} \cdot \sum_{i=0}^l w_i \cdot \frac{(r')^{i+2}}{(i+2)^2} + C_1^{(2)} \cdot \ln|r'| + C_2^{(2)};$$

$$C_1^{(2)} = \frac{1}{S_2} \cdot \sum_{i=0}^l \frac{w_i}{(i+2)^2} \cdot (R'_{\mu 1})^{i+2} - \frac{S_3 \cdot n_1}{S_2 \cdot (1 + 3 \cdot n_1)} \cdot (R'_{\mu 1})^{\frac{1}{n_1} + 3};$$

$$C_2^{(2)} = C_1^{(2)} \cdot (1 - \ln|R'_{\mu 1}|); \quad S_3 = \dot{\gamma}'_1 \cdot \left(\frac{La \cdot (1+B) \cdot G^{n_1+1}}{2^{2 \cdot n_1 + 3}} \right)^{\frac{1}{n_1}}; \quad S_4 = \frac{S_2}{S_1 \cdot u'_m},$$

где w_i – коэффициенты интерполирующего, степенного по радиальной координате, полинома порядка l , которым представле-

на диссипативная функция внутри второй зоны течения.

Распределение температуры в канале для третьей зоны должно удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{r'} \cdot \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \cdot \frac{\partial T'^{(3)}}{\partial r'} \right) + \frac{R^2}{L^2} \cdot \frac{\partial^2 T'^{(3)}}{\partial z'^2} = 0. \quad (8)$$

Сделаем следующее допущение относительно соотношения плотностей тепловых потоков в направлениях осей z и r :

$$\left| \frac{1}{r'} \cdot \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \cdot \frac{\partial T'^{(3)}}{\partial r'} \right) \right| \gg \left| \frac{R^2}{L^2} \cdot \frac{\partial^2 T'^{(3)}}{\partial z'^2} \right|. \quad (9)$$

Решая тогда уравнение (8) с учетом допущения (9) и граничного условия (5), получаем следующее выражение для распределения температуры в третьей зоне:

$$C_1^{(3)}(z') = \frac{1}{\ln|R'_{\mu 2}|} \cdot \left\{ C_2^{(1)} + f^{(2)}(R'_{\mu 2}) - T'_w + \sum_{j=1}^{\infty} C_j \cdot J_0(\epsilon_j \cdot R'_{\mu 2}) \cdot \exp(-S_4 \cdot \epsilon_j^2 \cdot z') \right\}.$$

Выполнение условия «сшивания» тепловых потоков на этой же границе раз-

$$T'^{(3)}(r', z') = C_1^{(3)}(z') \cdot \ln|r'| + T'_w, \quad (10)$$

где $C_1^{(3)}(z')$ – константа интегрирования, представляющая собой неизвестную пока функцию продольной координаты.

Для определения неизвестных констант интегрирования $C_2^{(1)}$ и $C_1^{(3)}(z')$ воспользуемся граничными условиями (4).

Из условия «сшивания» температур на границе второй и третьей зон получаем

дела зон приводит к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} C_j \cdot \exp(-S_4 \cdot \epsilon_j^2 \cdot z') \cdot \left\{ \frac{J_0(\epsilon_j \cdot R'_{\mu 2})}{R'_{\mu 2} \cdot \ln|R'_{\mu 2}|} + \lambda' \cdot \epsilon_j \cdot J_1(\epsilon_j \cdot R'_{\mu 2}) \right\} = \\ = \lambda' \cdot \left. \frac{df^{(2)}(r')}{dr'} \right|_{r'=R'_{\mu 2}} - \frac{1}{R'_{\mu 2} \cdot \ln|R'_{\mu 2}|} \cdot [C_2^{(1)} + f^{(2)}(r') - T'_w]. \end{aligned}$$

Поскольку это соотношение должно выполняться для любых значений

ний $z' \in [0; 1]$, приходим отсюда к уравнениям

$$\frac{J_0(\epsilon_j \cdot R'_{\mu 2})}{R'_{\mu 2} \cdot \ln|R'_{\mu 2}|} + \lambda' \cdot \epsilon_j \cdot J_1(\epsilon_j \cdot R'_{\mu 2}) = 0; \quad (11)$$

$$\lambda' \cdot \left. \frac{df^{(2)}(r')}{dr'} \right|_{r'=R'_{\mu 2}} - \frac{1}{R'_{\mu 2} \cdot \ln|R'_{\mu 2}|} \cdot [C_2^{(1)} + f^{(2)}(r') - T'_w] = 0. \quad (12)$$

Соотношение (11) представляет собой характеристическое уравнение для рассматриваемой краевой задачи и позволяет определить набор значений ϵ_j . Решение это-

го характеристического уравнения проводили численно с привлечением ЭВМ.

Второе же соотношение (12) позволяет найти еще одну константу задачи:

$$C_2^{(1)} = \lambda' \cdot R'_{\mu 2} \cdot \ln|R'_{\mu 2}| \cdot \left. \frac{df^{(2)}(r')}{dr'} \right|_{r'=R'_{\mu 2}} - f^{(2)}(r') + T'_w. \quad (13)$$

Используя условие ортогональности базисных функций, можно показать, что

оставшиеся пока неизвестными коэффициенты разложения C_j определяются в виде

$$\begin{aligned} C_j = \left(\int_0^{R'_{\mu 2}} r' \cdot J_0^2(\epsilon_j \cdot r') dr' \right)^{-1} \cdot \left\{ \int_0^{R'_{\mu 2}} [T'_{entr} - C_2^{(1)}] \cdot r' \cdot J_0(\epsilon_j \cdot r') dr' - \right. \\ \left. - \int_0^{R'_{\mu 1}} r' \cdot f^{(1)}(r') \cdot J_0(\epsilon_j \cdot r') dr' - \int_{R'_{\mu 1}}^{R'_{\mu 2}} r' \cdot f^{(2)}(r') \cdot J_0(\epsilon_j \cdot r') dr' \right\}, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Таким образом, все константы интегрирования в выражениях (7), (10) для распре-

деления температуры по основным зонам оказываются определенными.

Для оценки влияния параметров математической модели на характеристики диссипативного разогрева среды были проведены численные эксперименты. В ходе расчетов в качестве базовых значений принимался следующий набор безразмерных параметров: $B = 0,752$; $G = 0,133$; $Pr = 2,476 \cdot 10^5$; $Ec = 1,731 \cdot 10^{-6}$; $\lambda' = 1$; $T_w' = 0$; $T_0' = 0$; при следующих значениях, опреде-

ленных в [1–4], параметров реологической модели $n_1 = 0,7$; $\dot{\gamma}_{crit1} = 0,8$; $n_2 = 0,233$, а также пороговых значениях критерия подобия Лагранжа $La_{crit1} = 34,247$; $La_{crit2} = 60$. При этом отдельные базовые параметры допускали варьирование своих значений в ходе выполнения численных экспериментов.

Для примера на рис. 2 представлено распределение безразмерной температуры в различных поперечных сечениях канала в различных поперечных сечениях канала.

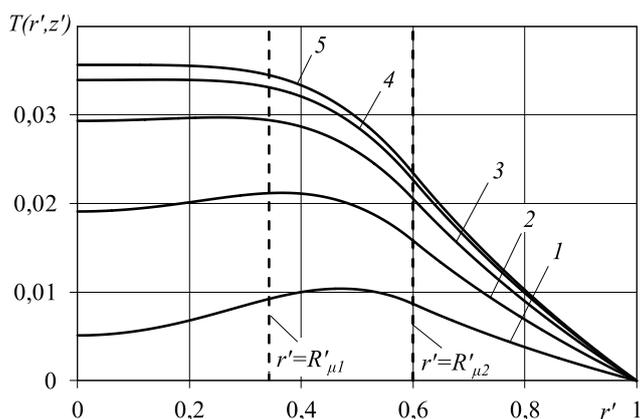


Рис. 2. Распределение безразмерной температуры в различных поперечных сечениях канала при $La = 100$; $Re = 2,07 \cdot 10^{-3}$; для $z' = 0,05$ (1); $0,15$ (2); $0,3$ (3); $0,5$ (4); 1 (5)

Штриховыми линиями на этом и следующем рисунках отмечены границы раздела $r' = R'_{\mu 1}$ первой и второй зон течения, а также $r' = R'_{\mu 2}$ второй зоны течения и третьей зоны, заполненной материалом «отвердевшей» жидкости. Как следует из представленных зависимостей, распределение температуры в поперечном сечении не является моно-

тонным. При этом температурный профиль имеет экстремум типа максимума, который по мере удаления от входного сечения смещается к центру канала.

Кривые на рис. 3 иллюстрируют влияние критерия подобия Лагранжа на распределение температуры в выходном сечении канала.

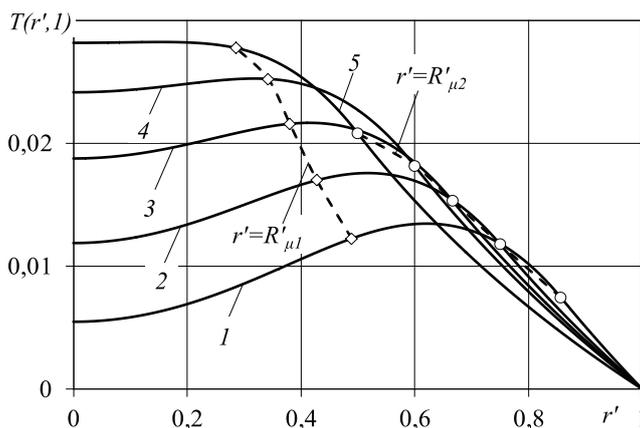


Рис. 3. Распределение безразмерной температуры в выходном сечении канала при $Re = 0,01$; $La = 70$ (1); 80 (2); 90 (3); 100 (4); 120 (5)

На рис. 4 для того же, что и на рис. 3, набора числовых значений исходных параметров представлена зависимость радиусов границы раздела первой и второй зон течения,

а также границы раздела второй зоны течения и третьей зоны «отвердевшей» жидкости от величины критерия подобия Лагранжа.

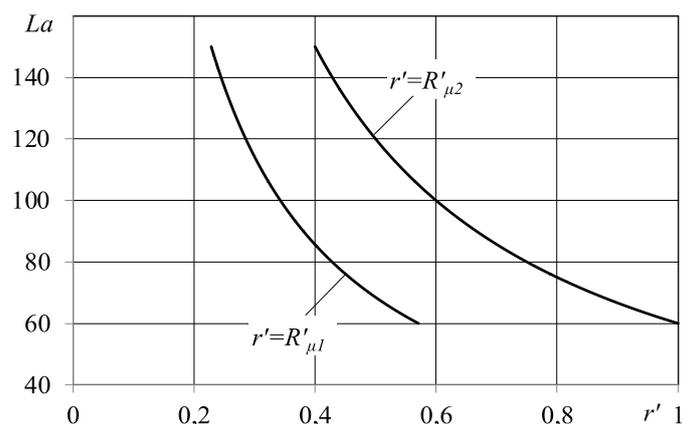


Рис. 4. Влияние критерия подобия Лагранжа на величину радиусов $R'_{\mu 1}$ и $R'_{\mu 2}$

Как видно из представленных на этом рисунке зависимостей, по мере увеличения в указанном диапазоне значений критерия La третья зона расширяется, а соответственно, проходное сечение уменьшается, демонстрируя тем самым проявление эффекта «запирания» канала.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект № 12-08-00629.

Список литературы

1. Колодежнов В.Н. Математическое моделирование реологического поведения нелинейно-вязких жидкостей, которые демонстрируют проявление эффекта «отвердевания» // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. – 2012. – № 4. – С. 35–38.
2. Колодежнов В.Н. Математическое моделирование течения в цилиндрическом канале жидкости, которая демонстрирует проявление эффекта «отвердевания» // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2013. – Т. 9. – № 2. – С. 118–122.
3. Колодежнов В.Н., Капранчиков С.С., Веретенников А.С. Математическое моделирование диссипативного разогрева в цилиндрическом канале для жидкости, демонстрирующей проявление эффекта «отвердевания», при реализации первой схемы течения // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 10. – С. 21–24.
4. Колодежнов В.Н., Капранчиков С.С., Веретенников А.С. Моделирование диссипативного разогрева в цилиндрическом канале для жидкости с эффектом «отвердевания» при реализации второй схемы течения // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 11. – С. 179–183.
5. Фройштетер Г.Б., Данилевич С.Ю., Радионова Н.В. Течение и теплообмен неньютоновских жидкостей в трубах. – Киев: Наукова думка, 1990. – 216 с.

References

1. Kolodezhnov V.N. Mathematical modeling of the rheological behavior of nonlinear-viscous liquids, which show a manifestation of the effect «solidification» // Proceedings of the Voronezh State University of Engineering Technologies. 2012. Vol. 4. pp. 35–38.
2. Kolodezhnov V.N. Mathematical modeling of fluid in a cylindrical channel, which shows a manifestation of the effect «solidification» // Proceedings of the Voronezh state technical University. 2013. Vol. 9. no. 2. pp. 118–122.
3. Kolodezhnov V.N., Kapranchikov S.S., Veretennikov A.S. Mathematical modeling of dissipative heating in a cylindrical fluid passages that demonstrates the manifestation of the «solidification» at the realization of the first scheme current // Technical Sciences, Vol. 10, 2013. pp. 21–24.
4. Kolodezhnov V.N., Kapranchikov S.S., Veretennikov A.S. Mathematical modeling of dissipative heating in a cylindrical channel for fluid effect of the «solidification» at the realization of the second scheme current // Technical Sciences, Vol. 11, 2013. pp. 179–183.
5. Frojsteter G.B., Danilevich S.Ju., Radionova N.V. Flow and heat transfer of non-Newtonian fluids in pipes. Kiev, Naukova dumka, 1990. 216 p.

Рецензенты:

Шашкин А.И., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой «Математический и прикладной анализ», ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж;

Буховец А.Г., д.т.н., профессор кафедры «Прикладная математика и применение математических методов в экономике», ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный аграрный университет им. императора Петра I», г. Воронеж.

Работа поступила в редакцию 05.08.2014.