

УДК 621.929.6:531.3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА СМЕШИВАНИЯ СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ В НОВОМ УСТРОЙСТВЕ ГРАВИТАЦИОННО-ПЕРЕСЫПНОГО ДЕЙСТВИЯ

Волков М.В., Королев Л.В., Таршис М.Ю.

ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный технический университет»,
Ярославль, e-mail: korolevly@mail.ru

Предложена математическая модель процесса смешивания сыпучих материалов в устройстве гравитационно-пересыпного действия. В основе модели лежит закон сохранения массы ключевого компонента в микрообъеме смеси. При этом поток ключевого компонента складывается из двух составляющих: потока циркуляции, отображающего движение частиц материала по замкнутым траекториям, и потока сегрегации, возникающего вследствие различия частиц по физическим свойствам. Скорость потока сегрегации определяется локальной концентрацией ключевого компонента и отношением плотностей и размеров частиц ключевого и несущего компонентов. В модели учитывается влияние на процесс смешивания дополнительных рабочих органов, лопаток, установленных в смесителе, которые препятствуют развитию потока сегрегации. Результаты численных расчетов, проведенных по данной модели, удовлетворительно согласуются с имеющимися экспериментальными данными, что дает возможность использовать ее для инженерного расчета смесителей гравитационно-пересыпного действия.

Ключевые слова: смешивание, сыпучий материал, барабанный смеситель, сегрегация, нелинейное уравнение переноса

MATHEMATICAL MODEL OF BULK MATERIALS MIXING PROCESS IN A NEW TUMBLER MIXER

Volkov M.V., Korolev L.V., Tarshis M.Y.

Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, e-mail: korolevly@mail.ru

A mathematical model of the bulk materials mixing process in tumbler mixer is proposed. Model is based on the key component mass conservation law in an infinitesimal volume of mixture. The key component flux consists of two parts. The first one is the circulation flow that displays movement of the material particles on closed paths. The second one is the segregation flow arising due to the difference in the particles physical properties. The segregation flow rate is determined by the local concentration of the key component and by the ratio of densities and sizes of key component particles to transporting component ones. The model takes into account the effect of additional working blades impeding the flow of segregation on the mixing process. The results of numerical calculations performed by this model agree well with experimental data, which makes it possible to use the model in tumbler mixers engineering.

Keywords: mixing, bulk material, tumbler mixer, segregation, nonlinear transport equation

Процессы смешивания сыпучих материалов находят широкое применение во многих отраслях современной промышленности, особенно в химической, строительной, в металлургии, сельскохозяйственном производстве и других. Достаточно хорошо зарекомендовали себя на практике смесители гравитационно-пересыпного действия (как правило, это смесители барабанного типа) благодаря своей низкой энергоемкости и простоте конструкции. Однако в большинстве случаев необходимо получение смесей из компонентов, отличающихся по своим физико-механическим свойствам (средним диаметрам частиц, их плотностям, форме и другим), а такие смеси склонны к сегрегации. В качестве одного из методов подавления сегрегации используется установка внутри рабочего объема смесителя дополнительных перемешивающих элементов. За последние годы был разработан ряд новых конструкций такого типа [1, 2], в том числе допускающих изменение расстоя-

ния рабочих элементов от оси вращения барабана [2].

Для выбора оптимальных конструктивных и режимных параметров этих смесительных устройств необходима адекватная математическая модель реализуемого в них процесса, учитывающие сегрегацию смеси. Различные подходы к моделированию процессов смешивания рассмотрены в работах [1, 3, 4] и многих других. При этом наиболее информативными и надежными подходами считаются те, которые основаны на законе сохранения массы ключевого компонента в микрообъеме сыпучей среды и потому позволяют анализировать не только интегральные характеристики смеси, такие как коэффициент неоднородности или энтропию, но и локальные концентрации ключевого компонента в каждой точке рабочего объема в произвольный момент времени. Построение таких моделей требует подробного изучения потоков материала в рабочем объеме устройства и связанных с ними

механизмов пространственного перераспределения частиц различных фракций. В настоящей работе предлагается модель процесса смешивания в смесителе гравитационно-пересыпного действия [2], основанная на результатах статьи [5], где было найдено поле скоростей сыпучей массы в данном устройстве, и учитывающая эффект сегрегации, возникающий при совместном движении частиц, различающихся по физико-механическим свойствам.

Рассмотрим процесс гравитационно-пересыпного смешивания сыпучих материалов в рабочем объеме, ограниченном цилиндрической поверхностью радиуса R , движущейся с угловой скоростью ω (рис. 1). В плоском сечении (x, y) рабочего объема, перпендикулярном оси вращения, можно выделить две характерные области движе-

ния материала. В примыкающей к движущейся поверхности области транспортирования сыпучий материал перемещается без сдвига слоев и смешивания не происходит. В области активного смешивания материал скатывается вдоль линии обрушения под действием силы тяжести. При этом возникает взаимное смещение слоев частиц, которое приводит к выравниванию поля объемных концентраций ключевого компонента смеси $c(x, y, t)$ с течением времени t . Если частицы ключевого и несущего компонентов различаются по физико-механическим свойствам, то, наряду со смешиванием, связанным с движением частиц вдоль линий тока в поле скоростей \vec{v}_c , возникает переход частиц из одной линии тока в другую со скоростью v_s , приводящий к сегрегации смеси.

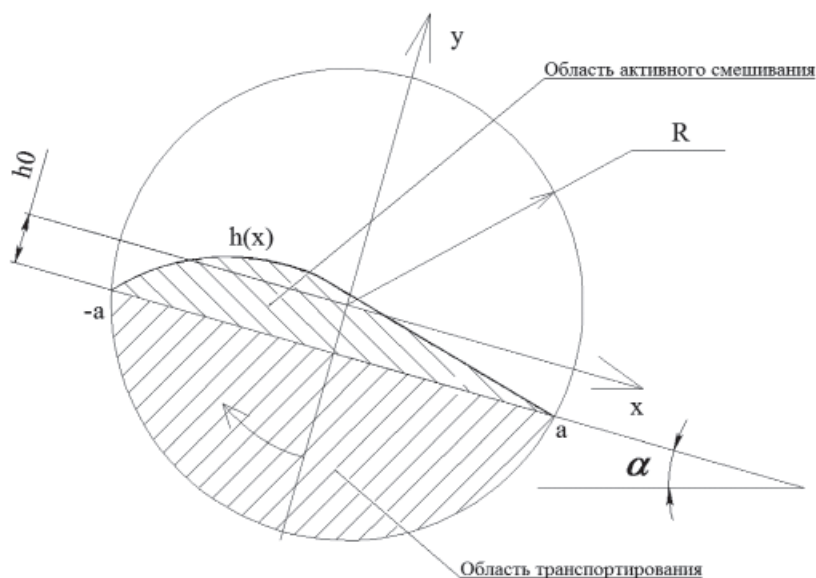


Рис. 1. Поперечное сечение рабочего объема

Изменение концентрации в рабочем объеме смеси при отсутствии входящих и исходящих внешних потоков материала в процессе смешивания и сегрегации описывается уравнением непрерывности

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\text{div}(c\vec{v}_c + c\vec{v}_s), \quad (1)$$

которое при заданных полях скоростей \vec{v}_c и v_s и начальном распределении ключевого компонента $c(x, y, t = 0)$ определяет $c(x, y, t)$ в любой момент времени.

Скорость движения сыпучего материала по линиям тока \vec{v}_c была найдена в работе [5] методами механики сплошной среды в предположении, что линия обрушения $(-a, a)$ является отрезком прямой. В области транспортирования $y < -h_0$

$$\vec{v}_c = (\omega y, -\omega x), \quad (2)$$

в области активного смешивания $-h_0 < y < h(x)$

$$\vec{v}_c = \left(\sqrt{2g \sin(\alpha)(x+a)} \frac{y+h_0}{h(x)}, -\frac{(a+x)\omega}{2h^2(x)}(y+h_0)^2 - \omega x \right), \quad (3)$$

где g – ускорение свободного падения; α – угол обрушения; $h_0 = \sqrt{R^2 - a^2}$ – уровень линии обрушения; $h(x) = \omega(2g \sin(\alpha))^{-1/2} (a+x)^{1/2} (a-x)$ – функ-

ция, определяющая форму области активного смешивания, а полудлина линии обрушения a определяется при заданном коэффициенте загрузки q из уравнения

$$\pi R^2 q = R^2 \arcsin(a/R) - a\sqrt{R^2 - a^2} + \frac{16\omega a^{5/2}}{15\sqrt{g \sin(\alpha)}}.$$

Скорость потока сегрегации \vec{v}_s отлична от нуля только в области активного смешивания и может быть определена исходя из следующих рассуждений. Будем считать, что направленный переход частицы ключевого компонента из одной линии тока в другую (в отличие от случайного, диффузионного, которым мы в данной работе пренебрегаем) возникает из-за того, что сила тяжести F_g , действующая на частицу, и архимедова сила F_A , то есть сила давления на частицу со стороны примыкающих к ней частиц, перестают компенсировать друг друга. В направлении возникающей равнодействующей силы и происходит смещение частицы. Поскольку движение частицы происходит в стесненных условиях, будем полагать, что скорость смещения пропорциональна возникающей силе

$$\vec{v}_s = k_s \frac{\sqrt{R/g}}{\rho_k V_k} \vec{e}_g (F_g - F_A), \quad (4)$$

где $\vec{e}_g = (\sin(\alpha), -\cos(\alpha))$ – единичный вектор направления силы тяжести; ρ_k и V_k – плотность и объем частицы ключевого компонента; $\sqrt{R/g}$ – характерный масштаб времени для рассматриваемой системы; k_s – безразмерный модельный коэффициент сегрегации. Выражения для сил F_g и F_A можно записать в виде:

$$\vec{v}_s = k_s \sqrt{Rg} (1-c) \left(1 - \left(\frac{d_k}{d_{nk}} \right)^2 \frac{\rho_{nk}}{\rho_k} \right) (\sin(\alpha), -\cos(\alpha)). \quad (7)$$

Как отмечалось выше, устройства гравитационно-пересыпного действия могут снабжаться дополнительными рабочими органами – лопатками, которые устанавливаются в радиальном направлении параллельно оси вращения на одинаковом угловом расстоянии друг от друга. Лопатки двигаются синхронно с поверхностью рабочего объема, поэтому не оказывают влия-

$$F_g = g\rho_k V_k; \\ F_A = g\rho V_k \left(\frac{d_k}{d} \right)^2, \quad (5)$$

где ρ и d – плотность и диаметр частиц материала, окружающего частицу ключевого компонента; d_k – диаметр частиц ключевого компонента. В формуле для F_A учтено, что давление на частицу в сыпучей среде определяется не только плотностью окружающих ее частиц ρ , но и числом контактов этой частицы с частицами окружения, через которые передается давление. Например, если мелкая частица попадет в окружение крупных, она окажется в полости между ними и не будет испытывать давления с их стороны. Это число контактов пропорционально отношению площади поверхности частицы к поперечному сечению частицы окружения [6], что и приводит в предлагаемой модели к появлению множителя $(d_k/d)^2$. Отношение ρ/d^2 , входящее в (5), определяется локальной концентрацией ключевого компонента c :

$$\frac{\rho}{d^2} = \frac{\rho_k}{d_k^2} c + \frac{\rho_{nk}}{d_{nk}^2} (1-c), \quad (6)$$

где ρ_{nk} и d_{nk} – плотность и диаметр частиц несущего компонента. С учетом (5) и (6) выражение для скорости сегрегации \vec{v}_s (4) с можно записать в виде:

ния на процесс при своем прохождении через транспортирующую область, но могут существенно изменять характер движения материала в области активного смешивания, препятствуя развитию потока сегрегации. В предлагаемой модели воздействие лопаток можно учесть, если ввести зависимость коэффициента k_s в (7) от координат и времени:

$$k_s = k_s^0 \left(1 - \exp \left(- \frac{1 - \cos(\omega t n_p)}{k_p n_p^2} \right) \left(\theta \left(\sqrt{x^2 + y^2} - r_p + \frac{l_p}{2} \right) - \theta \left(\sqrt{x^2 + y^2} - r_p - \frac{l_p}{2} \right) \right) \right), \quad (8)$$

где n_p, r_p, l_p – количество, установочный радиус и длина лопаток соответственно; k_p – модельный коэффициент эффективности воздействия лопатки; k_s^0 – значение коэффициента k_s при отсутствии лопаток; $\theta(x)$ – функция Хэвисайда, равная 0 при $x < 0$ и равная 1 при $x \geq 0$. Согласно выражению (8), при прохождении лопатки через область активного смешивания в зоне воздействия лопатки $r_p - \frac{l_p}{2} < \sqrt{x^2 + y^2} < r_p + \frac{l_p}{2}$ величина коэффициента сегрегации k_s и, следовательно, скорость сегрегационного потока v_s существенно снижается.

Уравнение непрерывности (1) с заданными скоростями переноса (2), (3) и (7) с учетом (8) может решаться численно известными методами. Результаты расчетов для средней объемной концентрации ключевого компонента $c_0 = 0,3$ при коэффициенте

загрузки $q = 0,4$ приведены на рис. 2 и 3. Модельные коэффициенты принимались равными $k_s^0 = 0,1, k_p = 1$, плотности частиц предполагались равными. На рис. 2 показаны распределения ключевого компонента (темный цвет) по сечению рабочего объема в начальный момент времени (а) и в момент $t = \frac{4\pi}{\omega}$ для случаев, когда частицы ключевого и несущего компонентов не различаются по физико-механическим свойствам (б) и когда диаметр частиц несущего компонента в два раза превышает диаметр частиц ключевого компонента (в). В случае (б) сегрегация отсутствует и достигается практически равномерное распределение ключевого компонента, в случае (в) ключевой компонент скапливается в окрестности центра вращения, образуя ядро сегрегации, и качество смеси значительно ухудшается.

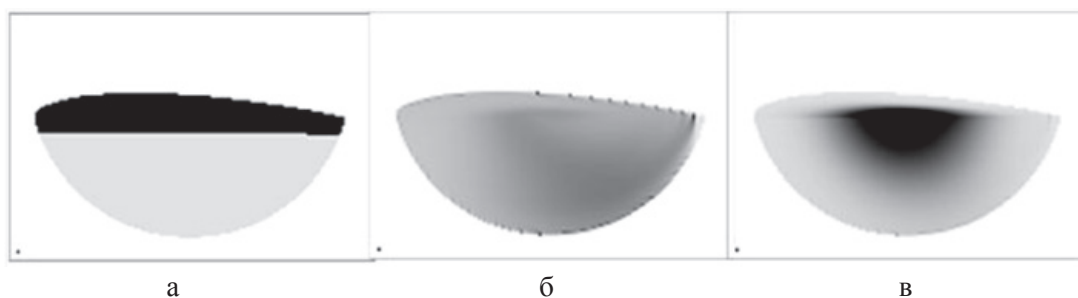


Рис. 2. Распределения ключевого компонента в начальный момент времени (а) и в момент $t = 4\pi/\omega$ для случая тождественных частиц (б) и различных частиц (в)

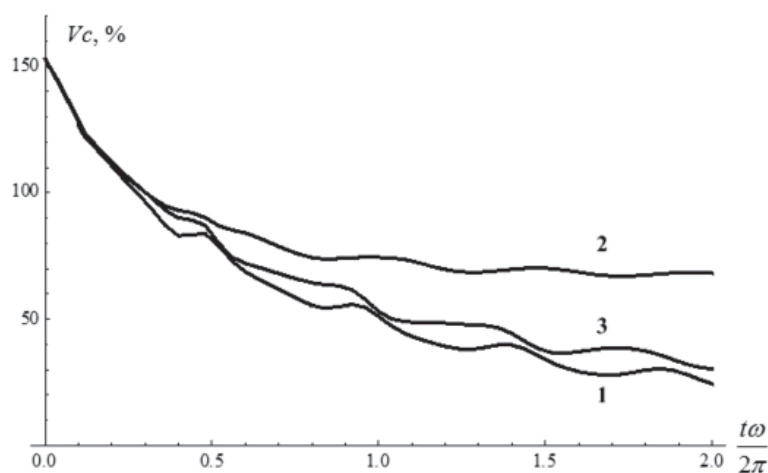


Рис. 3. Изменение коэффициента неоднородности смеси со временем: 1 – без сегрегации; 2 – сегрегация без лопаток; 3 – сегрегация с лопатками

Качество смеси в ходе процесса обычно характеризуется коэффициентом неоднородности Vc [1], который вычисляется по формуле

$$Vc(t) = \frac{100\%}{c_0} \sqrt{\frac{1}{S} \int c^2(x, y, t) dx dy - c_0^2}, \quad (9)$$

где интегрирование ведется по сечению, занятому смесью, а $S = \pi R^2 q$ – площадь этого сечения. На рис. 3 представлены графики зависимости коэффициента неоднородности от времени для случаев, когда частицы ключевого и несущего компонентов

не различаются по физико-механическим свойствам (кривая 1) и когда диаметр частиц несущего компонента в два раза превышает диаметр частиц ключевого компонента в отсутствие перемешивающих лопаток (кривая 2) и при наличии четырех лопаток размера $l = 0,5R$, установленных на расстоянии $r_p = 0,5R$ от центра вращения.

Из рис. 3 видно, что установка лопаток существенно улучшает качество смеси, что подтверждается имеющимися экспериментальными данными.

Таким образом, в работе предложена математическая модель процесса смешивания сыпучих материалов в устройстве гравитационно-пересыпного действия, позволяющая вычислять поле концентраций ключевого компонента в плоском сечении рабочего объема в любой момент времени. Модель учитывает сегрегацию смеси, возникающую вследствие различия компонентов по размеру и плотности, а также влияние на процесс дополнительных рабочих органов. Значения свободных параметров модели должны определяться при сравнении результатов расчета с экспериментальными данными. Заметим, что при отсутствии сегрегации, когда смешиваемые фракции не различаются по физико-механическим свойствам, модель не содержит свободных параметров и при этом удовлетворительно согласуется с результатами опытов, что свидетельствует о справедливости лежащих в ее основе предположений.

Список литературы

1. Таршис М.Ю., Королев Л.В., Зайцев А.И. Теория и принципы моделирования процесса смешивания сыпучих материалов и создания устройств с гибкими элементами для его реализации: монография. – Ярославль: изд-во ЯГТУ, 2011. – 100 с.
2. Таршис М. Ю., Зайцев А. И., Королев Л. В., Волков М. В. Смеситель // Патент России 2466778, B01F9/06. опублик. 20.11.12, Бюл. № 32.

3. Fan L.T., Chen Y.M., Lai F.S. Recent developments in solid mixing // Powder Technology. – 1990. – Vol. 61. – P. 255–287.

4. Prigozhin L., Kalman H. Radial mixing and segregation of a binary mixture in a rotating drum: Model and experiment // Phys. Rev. E 57. – 1998. – P. 2073–2080.

5. Волков М.В., Королев Л.В., Таршис М.Ю. Исследование механики движения сыпучего материала в поперечном сечении смесителя гравитационно-пересыпного действия // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 5 (часть 4). – С. 692–696.

6. Придатко Ю.М., Королев Л.В., Готовцев В.М. Моделирование плотной упаковки частиц композитного материала // Вестник СГТУ. – 2011. – № 4(62), Вып. 4. – С. 96–100.

References

1. Tarshis M.Yu., Korolev L.V., Zajcev A.I. Theory and modeling principles of mixing bulk materials and creation of devices with flexible elements for its implementation: Monograph, Jaroslavl: izd-vo YGTU, 2011. 100 p.

2. Tarshis M.Yu., Zajcev A.I., Korolev L.V., Volkov M.V., Mixer // Patent of Russia 2466778, B01F9/06. publ. 20.11.12, Bul. no. 32.

3. Fan L.T., Chen Y.M., Lai F.S. Recent developments in solid mixing // Powder Technology. 1990. Vol. 61. pp. 255–287.

4. Prigozhin L., Kalman H. Radial mixing and segregation of a binary mixture in a rotating drum: Model and experiment // Phys. Rev. E 57. 1998. pp. 2073–2080.

5. Volkov M.V., Tarshis M.Yu., Korolev L.V. Research of the grain material movement mechanics in a cross section of a tumbler mixer // Fundamentalnye issledovaniya no. 5 (part 4) 2014, pp. 692–696.

6. Pridatko M.Yu., Korolev L.V., Gotovtsev V.M. Modeling of close packed particles arrangement in composite material // Vestnik SGTU no. 4 (62) 2011, pp. 96–100.

Рецензенты:

Бачурин В.И., д.ф.-м.н., профессор, Ярославский филиал Московского института инженеров транспорта (университет), г. Ярославль;

Мурашов А.А., д.т.н., профессор, Ярославский филиал Московской финансово-юридической академии, г. Ярославль.

Работа поступила в редакцию 15.07.2014.