

УДК 532.546:536.421

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНЖЕКЦИИ ХОЛОДНОГО ГАЗА В ПОРИСТУЮ СРЕДУ, ЧАСТИЧНО НАСЫЩЕННУЮ ЛЬДОМ

Хасанов М.К., Доровская М.С.

*Стерлитамакский филиал ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет»,
Стерлитамак, e-mail: mari-animiya@mail.ru*

На основе уравнений механики многофазных сред построена математическая модель образования газовых гидратов при инжекции холодного газа в пористую среду, в исходном состоянии заполненную газом и льдом. Построены автомодельные решения осесимметричной задачи, описывающие распределения основных параметров в пласте. Показано, что возможно существование решений, согласно которым образование газового гидрата может происходить как на фронтальной поверхности, так и в протяженной области. Получено условие возникновения протяженной области фазовых переходов. Определены критические значения массового расхода закачки газа, определяющего возникновение объемной области образования газового гидрата. Установлено, что фронтальный режим образования газового гидрата реализуется в высокопроницаемых пористых средах, а также в пластах с низким исходным пластовым давлением.

Ключевые слова: газовые гидраты, фильтрация, гидратообразование, пористый пласт

MATHEMATICAL MODEL OF INJECTION OF COLD GAS ON THE POROUS WEDNESDAY WHICH HAS BEEN PARTIALLY SATED WITH ICE

Khasanov M.K., Dorovskaya M.S.

Sterlitamak branch of Bashkir state university, Sterlitamak, e-mail: mari-animiya@mail.ru

On the basis of the equations of mechanics of multiphase media, a mathematical model for the formation of gas hydrates in the injection of cold gas in a porous medium, in the initial state and the gas-filled with ice. Self-similar solutions of the axisymmetric problem, describing the distribution of the main parameters in the formation. It is shown that the existence of solutions is possible, according to which the formation of gas hydrate can occur both on the front surface, and in the extended region. A condition of a large region of phase transitions. The critical mass flow rate of gas injection, which determines the occurrence of bulk gas hydrate formation region. It has been established that the wheel mode is realized gas hydrate formation in high permeability porous medium and in the layers with low initial reservoir pressure.

Keywords: gas hydrates, filtration, hydrate formation, porous layer

Образование газовых гидратов в пористых структурах в настоящий момент имеет широкие промышленные перспективы, связанные, в первую очередь, с возможностью хранения газа в гидратном состоянии. В основу гидратного способа хранения газа положено то обстоятельство, что при одинаковых условиях в единице объема в гидратном состоянии содержится значительно больше газа, чем в свободном состоянии [1].

В работах [2–8] были построены в прямолинейно-параллельном приближении математические модели образования газогидрата в пористых средах, изначально насыщенных газом и водой. Однако при выборе подходящих геологических объектов для газогидратной консервации газа более перспективной является пористая среда, частично насыщенная льдом. Важным преимуществом такой среды является то, что интенсивность процесса образования газогидрата в высокопроницаемых пористых средах лимитируется, прежде всего, отводом тепла,

а удельная теплота образования газогидрата изо льда в три раза ниже, чем из воды.

В представленной работе в осесимметричном приближении рассмотрены особенности образования гидрата при нагнетании газа в пористый пласт, заполненный в исходном состоянии газом и льдом.

Постановка задачи и основные уравнения. Для описания процессов тепло-массо-переноса при закачке газа в горизонтальный пористый пласт примем следующие допущения. Процесс однопериодический, т.е. температуры пористой среды и насыщающего вещества совпадают. Гидрат является двухкомпонентной системой с массовой концентрацией газа G . Кроме того, скелет пористой среды, газогидрат и лед несжимаемы и неподвижны, пористость постоянна, газ – калорически совершенный.

В рамках отмеченных допущений запишем для осесимметричной задачи уравнения сохранения массы, закон Дарси, уравнения состояния газа и притока тепла:

$$\frac{\partial}{\partial t}(mS_g \rho_g) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rS_g m v_g \rho_g) = -mG \rho_h \frac{\partial S_h}{\partial t};$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(mS_i\rho_i) = -m(1-G)\rho_h \frac{\partial S_h}{\partial t}; \quad mS_g v_g = -\frac{k_g}{\mu_g} \frac{\partial p}{\partial r}; \quad p = \rho_g R_g T; \quad (1)$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_g c_g mS_g v_g \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + m\rho_h L_h \frac{\partial S_h}{\partial t},$$

где m – пористость; p – давление; T – температура; ρ_j и S_j – истинная плотность и насыщенность пор j -й фазы ($j = h, i, g$); индексы g, i и h относятся к параметрам газа, льда и гидрата соответственно; v_n, k и μ_g – скорость, проницаемость и динамическая вязкость для газовой фазы; L_h – удельная теплота гидратообразования; c_g – удельная теплоемкость Γ ; ρc и λ – удельная объемная теплоемкость и коэффициент теплопроводности системы.

Зависимость коэффициента проницаемости для газа k от газонасыщенности можно задать на основе формулы Козени

$$k_g = k_* \frac{(mS_g)^3}{(1-mS_g)^2} \approx k_0 S_g^3 (k_0 = k_* m^3).$$

Значения температуры и давления в области образования гидрата связаны условием фазового равновесия:

$$T = T_{s0} + T_* \ln \left(\frac{p}{p_{s0}} \right), \quad (2)$$

где p_{s0} – равновесное давление, соответствующее температуре T_{s0} ; T_* – эмпирический параметр, зависящий от вида газогидрата.

При образовании газогидрата в пористом пласте возникают зоны, в которых газ, лед и газогидрат могут находиться в различных состояниях. На поверхностях разрыва между этими зонами, где терпят скачки насыщенности фаз, а также потоки

массы и тепла, должны выполняться условия баланса массы и тепла:

$$\left[m(S_h \rho_h (1-G) + S_i \rho_i) \dot{r}_{(s)} \right] = 0;$$

$$\left[m(\rho_g S_g (v_g - \dot{r}_{(s)}) - \rho_h S_h G \dot{r}_{(s)}) \right] = 0; \quad (3)$$

$$\left[\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right] = \left[m\rho_h L_h \dot{r}_{(s)} \right].$$

Здесь $[\psi]$ – скачок параметра ψ на границе $r_{(s)}$ между областями; $\dot{r}_{(s)}$ – скорость движения этой границы. Температуру и давление на границе между областями будем полагать непрерывными.

Будем полагать, что пласт в начальный момент времени насыщен газом и льдом, давление p_0 и температура T_0 которых в исходном состоянии соответствуют термодинамическим условиям существования их в свободном состоянии ($p_0 \leq p_{s0}$) и изначально одинаковы во всем пласте. Эти условия могут быть записаны следующим образом:

$$t = 0: T = T_0; p = p_0 (r \geq r_w).$$

Пусть через скважину, вскрывшую пласт на всю толщину, закачивается газ (одноименный исходному) с постоянным массовым расходом Q_g (на единицу высоты скважины) при постоянной температуре T_w . С учетом закона Дарси и уравнения состояния для газа условия на границе скважины имеют вид

$$r = r_w: -\frac{k_g \pi}{\mu_g R_g T_w} \left(r \frac{\partial p^2}{\partial r} \right) = Q_g, \quad T = T_w \quad (r_w \rightarrow 0, \quad t > 0).$$

В результате закачки газа вблизи скважины образуется область, насыщенная газом и гидратом. Рассматривая достаточно большие времена после начала нагнетания газа, когда размеры данной области значительно превышают радиус скважины ($r_{(s)} \gg r_w$), будем полагать, что размер скважины слабо сказывается на особенностях протекания процесса. Сформулированная задача имеет автомодельное решение.

Рассмотрим решение с фронтальной поверхностью образования гидратов. В данном случае возникают две характерные области. В первой области, находящейся

вблизи скважины, лед полностью перешел в газогидратное состояние, поэтому в порах присутствуют только газ и газогидрат. Во второй (дальней) области поры пласта заполнены газом и льдом. Таким образом, в данном случае образование газогидрата полностью происходит на фронтальной поверхности между этими областями, а промежуточная область отсутствует.

Автомодельное решение. Введем автомодельную переменную

$$\xi = \frac{r}{\sqrt{\kappa^{(T)} t}},$$

где $\kappa^{(T)} = \frac{\lambda}{\rho c}$ – коэффициент температуропроводности пласта.

Тогда решение задачи может быть записано в виде

$$p_{(1)}^2 = p_{(s)}^2 + \frac{Q_g \mu_g R_g T_w}{\pi k_{(1)}} \int_{\xi}^{\xi_{(s)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_{(1)}}\right) d\xi;$$

$$T_{(1)} = T_{(s)} + \frac{(T_w - T_{(s)}) \int_{\xi}^{\xi_{(s)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{42} - \frac{Pe_{(1)}}{p_0^2} p_{(1)}^2\right) d\xi}{\int_0^{\xi_{(s)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{42} - \frac{Pe_{(1)}}{p_0^2} p_{(1)}^2\right) d\xi}; \quad (4)$$

$$p_{(2)}^2 = p_0^2 + \frac{(p_{(s)}^2 - p_0^2) \int_{\xi}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_{(2)}}\right) d\xi}{\int_{\xi_{(s)}}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_{(2)}}\right) d\xi};$$

$$T_{(2)} = T_0 + \frac{(T_{(s)} - T_0) \int_{\xi}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{42} - \frac{Pe_{(2)}}{p_0^2} p_{(2)}^2\right) d\xi}{\int_{\xi_{(s)}}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{42} - \frac{Pe_{(2)}}{p_0^2} p_{(2)}^2\right) d\xi}, \quad (5)$$

где $\eta_{(i)} = \frac{\kappa^{(p)}}{\kappa^{(T)}}$; $\kappa^{(p)} = \frac{k_{(i)} p_0}{\mu_g m S_{g(i)}}$;

$Pe_{(i)} = \frac{\rho_{g0} c_g k_{(i)} p_0}{\lambda \mu_g}$; $k_{(i)} = k_0 S_{g(i)}^3$. Параметры

первой области $S_{h(1)}$ определяется из условия баланса массы льда:

$$S_{h(1)} = \frac{\rho_i S_{i0}}{\rho_h (1-G)},$$

первой и второй областей снабжены нижними индексами в скобках $i = 1, 2$. Отметим, что решение для распределения давления получено с использованием линеаризации Лейбензона [5].

На поверхности, разделяющей ближнюю и дальнюю области, происходит скачок гидратонасыщенности от $S_h^- = S_{h(1)}$ до $S_h^+ = 0$. Величина гидратонасыщенности

где S_{i0} – начальная льдонасыщенность. Для значений температуры и давления на границе между областями выполняется условие фазового равновесия (2).

На основе условий (3) с учетом полученных решений (4) и (5) получим уравнения для определения координаты границы фазовых переходов ($\xi = \xi_{(s)}$) и значений параметров на ней:

$$k_{(2)} \frac{p_0^2 - p_{(s)}^2}{\int_{\xi_{(s)}}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_{(2)}}\right) d\xi} \exp\left(-\frac{\xi_{(s)}^2}{4\eta_{(2)}}\right) + \frac{Q_g \mu_g R_g T_w}{\pi} \exp\left(-\frac{\xi_{(s)}^2}{4\eta_{(1)}}\right) = K S_{h(1)} \xi_{(s)}^2;$$

$$\frac{(T_{(s)} - T_e) \exp\left(-\frac{\xi_{(s)}^2}{4} - \frac{Pe_{(1)}}{2p_0^2} p_{(s)}^2\right)}{\int_0^{\xi_{(s)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{42} - \frac{Pe_{(1)}}{p_0^2} p_{(1)}^2\right) d\xi} - \frac{(T_0 - T_{(s)}) \exp\left(-\frac{\xi_{(s)}^2}{4} - \frac{Pe_{(2)}}{2p_0^2} p_{(s)}^2\right)}{\int_{\xi_{(s)}}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{42} - \frac{Pe_{(2)}}{p_0^2} p_{(2)}^2\right) d\xi} = \frac{\Delta T_{h(1)}}{2} \xi_{(s)}, \quad (6)$$

где $\Delta T = \frac{m\rho_h L_h}{\rho c}$;

$$K = m\mu_g \mathfrak{K}^{(T)} p_0 \left(\frac{\rho_h G}{\rho_{g0}} + \frac{\rho_h (1-G)}{\rho_i} - 1 \right)$$

Результаты расчетов. На основе решений (4) и (5), а также трансцендентных уравнений (6) проведены численные расчеты для случая газогидрата на основе лед – метан. На рис. 1, а представлены распределения температуры и давления при нагнетании газа с массовым расходом $Q_g = 0,004$ кг/(м·с) и с температурой $T_w = 265$ К в пласт с начальным давлением $p_0 = 2$ МПа и исходной льдонасыщенностью $S_{i0} = 0,2$. Для остальных параметров, характеризующих систему, приняты следующие значения: $m = 0,1$, $G = 0,12$, $T_0 = 271$ К, $T_* = 30$ К, $p_{s0} = 2,38$ МПа, $T_{s0} = 270$ К, $k_0 = 10^{-14}$ м², $\rho_h = 900$ кг/м³, $\rho_i = 900$ кг/м³, $R_g = 520$ Дж/(К·кг), $c_g = 1560$ Дж/(К·кг), $\rho_g^s = 2,5 \cdot 10^6$ Дж/(К·кг), $\lambda = 2$ Вт/(м·К), $\mu_g = 10^{-5}$ кг/(м·с), $L_h = 1,66 \cdot 10^5$ Дж/кг. Ли-

ния 2 показывает равновесную температуру, соответствующую полученному распределению давления. Из данного рисунка видно, что температура пласта перед фронтом гидратообразования ниже равновесной температуры, а за фронтом – выше этой температуры, что является физически непротиворечивым. Следовательно, в этом случае можно говорить о существовании решения с фронтальной поверхностью образования гидрата.

На рис. 1, б приведены распределения температуры и давления при нагнетании газа с массовым расходом $Q_g = 0,008$ кг/(м·с) и с температурой $T_w = 265$ К. Видно, что температура пласта за фронтом гидратообразования опускается ниже равновесной температуры (линия 2), т.е. в этой области наблюдается переохлаждение льда. Таким образом, при данном массовом расходе модель с фронтальной поверхностью образования гидрата не позволяет построить физически непротиворечивое решение. Для устранения этого противоречия необходимо вводить протяженную область гидратообразования.

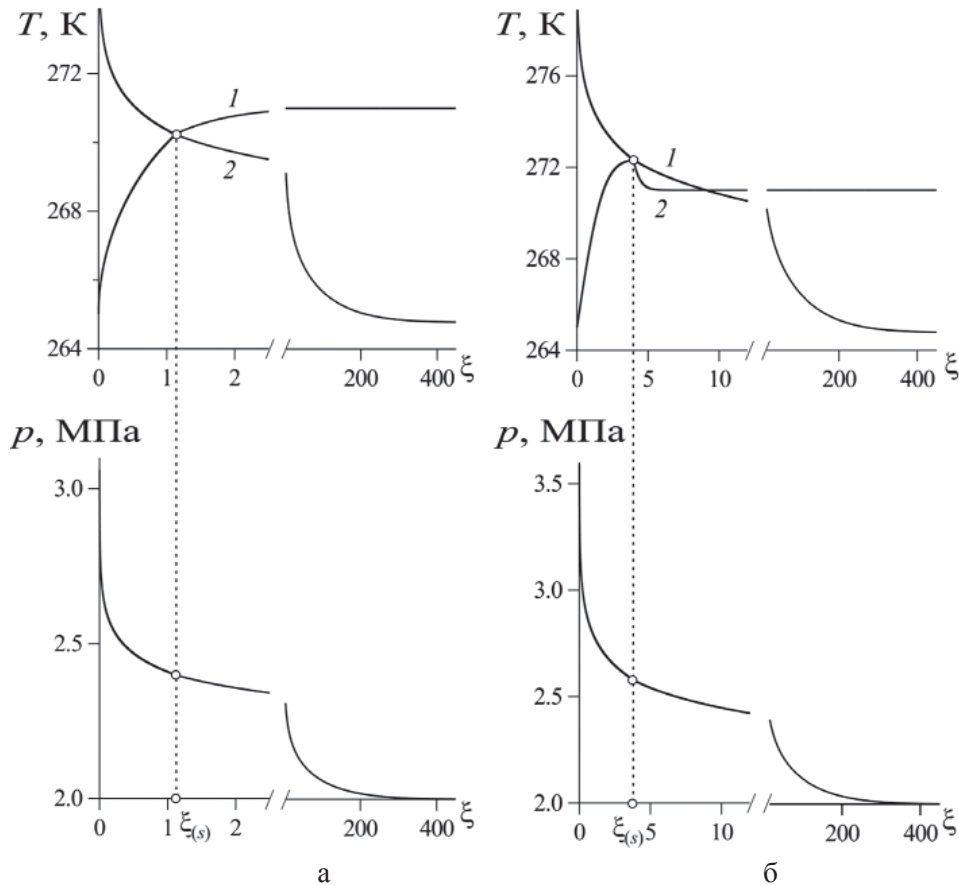


Рис. 1. Распределение температуры пласта (1), равновесной температуры (2) и давления. $Q_g = 0,004$ кг/(м·с) (а) и $0,008$ кг/(м·с) (б)

Объемная область возникает в том случае, когда на границе фазовых переходов ($\xi = \xi_{(s)}$) выполняется условие

$$\frac{dT_{(2)}s}{d\xi} < \frac{dT_{(2)s}}{d\xi},$$

где $T_{(2)s}$ – температура гидратообразования, соответствующая давлению $p_{(2)}$. Из условия фазового равновесия (2) имеем:

$$\frac{dT_{(2)s}}{d\xi} = \frac{T_*}{2p_{(s)}^2} \frac{dp_{(2)}^2}{d\xi}.$$

Тогда с учетом полученных решений (4), (5) и системы граничных условий (6) имеем следующее условие существования решения с фронтальной границей образования гидрата:

$$\frac{(T_{(s)} - T_e) \exp\left(-\frac{\xi_{(s)}^2}{42} - \frac{Pe_{(1)}}{p_0^2} p_{(s)}^2\right)}{\int_0^{\xi_{(s)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{42} - \frac{Pe_{(1)}}{p_0^2} p_{(1)}^2\right)} - \frac{\Delta T_{h(1)} \xi_{(s)}^2}{2} > \frac{T_*}{2k_{(2)} p_{(s)}^2} \times \left(-\frac{Q_g \mu_g R_g T_g}{\pi} \exp\left(-\frac{\xi_{(s)}^2}{4\eta_{(1)}}\right) + KS_{h(1)} \xi_{(s)}^2 \right). \quad (7)$$

На основе неравенства (7) и системы граничных условий (6) были проведены численные эксперименты в широком диапазоне параметров. Опираясь на результаты численных расчетов, можно сделать вывод

о том, что для каждого значения проницаемости существует критическое значение Q_{cr} массового расхода газа, при превышении которого возникает объемная область образования гидрата.

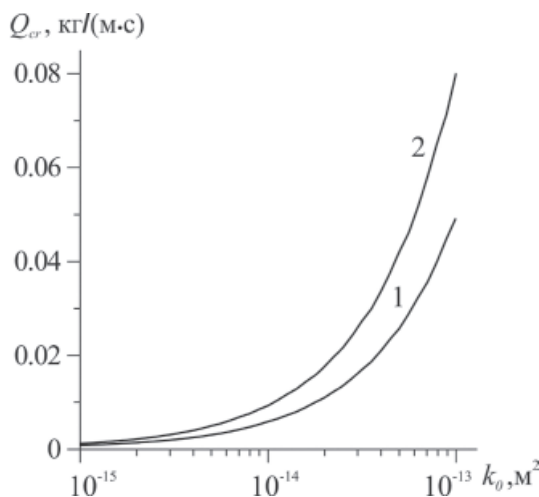


Рис. 2. Критическая диаграмма на плоскости (Q_g, k_0). $p_0 = 2$ МПа (1) и 1,7 МПа (2)

На рис. 2 показана зависимость критического значения массового расхода от абсолютной проницаемости пласта. Кривые 1 и 2 соответствуют двум разным значениям начального давления пласта: $p_0 = 2$ МПа (1) и $p_0 = 1,7$ МПа (2). Из данного рисунка видно, что критическое значение массового расхода Q_{cr} повышается с увеличением про-

ницаемости, причем тем быстрее, чем ниже исходное давление.

Выводы

Таким образом, при инъекции газа в пористую среду, частично насыщенную льдом, образование газогидрата может происходить как на фронтальной поверхности,

так и в протяженной области в зависимости от величины массового расхода, проницаемости и исходного пластового давления.

Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-31089).

Список литературы

1. Бык С.Ш., Макогон Ю.Ф., Фомина В.И. Газовые гидраты. – М.: Химия, 1980. – 296 с.
2. Доровская М.С., Хасанов М.К. Математическая модель фильтрации газа с учетом гидратообразования // Сборник научных трудов Sworld. – 2013. – Т. 4. № 4. – С. 3–4.
3. Доровская М.С., Хасанов М.К. Математическое моделирование образования газогидратов в пористой среде // Сборник научных статей международной молодежной школы семинара «Ломоносовские чтения на Алтае». – 2013. – Т. 1 – С. 125–128.
4. Хасанов М.К., Гималтдинов И.К., Столповский М.В. Особенности образования газогидратов при нагнетании холодного газа в пористую среду, насыщенную газом и водой // Теоретические основы химической технологии. – 2010. – Т. 44, № 4. – С. 442–449.
5. Хасанов М.К., Доровская М.С. Особенности течений в пористых средах, сопровождающихся образованием газогидрата // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 3. URL: www.science-education.ru/117-13519 (дата обращения 11.06.2014).
6. Хасанов М.К., Столповский М.В., Кильдибаева С.Р. Численное моделирование образования газогидрата в пористой среде при инъекции газа // Вестник Башкирского университета. – 2013. – Т. 18. № 4. – С. 969–972.
7. Шагапов В.Ш., Мусакаев Н.Г., Хасанов М.К. Нагнетание газа в пористый резервуар, насыщенный газом и водой // Теплофизика и аэромеханика. – 2005. – Т. 12, № 4. – С. 645–656.
8. Шагапов В.Ш. Численное моделирование образования газогидрата в пористой среде конечной протяженности при продувке газом / Хасанов М.К., Гималтдинов И.К., Столповский М.В. // Прикладная механика и техническая физика. – 2011. – Т. 52, № 4. – С. 116–126.

References

1. Byk S.Sh., Makogon Yu.F., and Fomina V.I., Gas Hydrates, Khimiya, Moscow, 1980.

2. Dorovskaja M.S., Khasanov M.K., Mathematical model filter gas based hydrate, The Collection of scientific works Sworld, 2013, Vol. 4, no. 4, pp. 3–4.

3. Dorovskaja M.S., Khasanov M.K., Mathematical modeling of formation of gas hydrates in the porous environment, The Collection of scientific articles of the international youth school of a seminar «Lomonosov readings in Altai», 2013, Vol 1, pp. 125–128.

4. Khasanov M.K., Gimaltdinov I.K. and Stolpovsky M.V., Specific features of the formation of gas hydrates during the injection of a cold gas into a porous medium saturated with a gas and water, Theoretical Foundations of Chemical Engineering, 2010, Vol. 44, no. 4, pp. 424–431.

5. Khasanov M.K., Dorovskaja M.S., Features of currents in the porous environments, being accompanied formation of gas hydrate, Modern problems of science and education, 2014, no. 3, URL: www.science-education.ru/117-13519 (accessed 11 June 2014).

6. Khasanov M.K., Stolpovsky M.V. and Kildibayev S.R., Numerical modeling of formation of gas hydrate in the porous environment at gas injection, The Messenger of the Bashkir university, 2013, Vol. 18, no. 4, pp. 969–972.

7. Shagapov V. Sh., Musakaev N.G. and Khasanov M. K., Gas injection into porous reservoir saturated with gas and water, Thermofysics and Aeromechanics, 2005, Vol. 12., no. 4., pp. 605–616.

8. Shagapov V.Sh., Numerical modeling of formation of gas hydrate in the porous environment of final extent at a purge gas / Khasanov M.K., Gimaltdinov I.K., Stolpovsky M.V. / Applied mechanics and technical physics, 2011, Vol. 52, no. 4, pp. 599–607.

Рецензенты:

Мустафина С.А., д.ф.-м.н., профессор, декан физико-математического факультета Стерлитамакского филиала Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак;

Биккулова Н.Н., д.ф.-м.н., профессор, заведующая кафедрой общей физики Стерлитамакского филиала Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак.

Работа поступила в редакцию 10.07.2014.