

УДК 621.6.04.252

РАСЧЕТ ДВИЖЕНИЯ ДИСПЕРСНЫХ МАТЕРИАЛОВ В УСТРОЙСТВАХ С ВРАЩАЮЩИМСЯ РАБОЧИМ ОРГАНОМ

Козлов М.В., Сидоров В.Н., Ширина Н.Ю., Мурашов А.А.

ГОУ ВПО Ярославский государственный технический университет,
Ярославль, e-mail: s_sidorov@me.com

Предложен расчет движения дисперсной среды в устройствах с вращающимся рабочим органом. При этом поверхностные силы в дисперсной среде подчиняются закону внутреннего трения Кулона при наличии связности. Предложен симметричный тензор напряжений, удовлетворяющий условию изотропности среды. Используются уравнения движения в напряжениях, которые с учетом тензора напряжений записываются в естественной системе координат в форме Эйлера. Уравнения движения дополняются уравнением неразрывности. Полученная система уравнений в частных производных первого порядка требует для своего решения постановки четырех начальных и граничных условий, которые определяются при решении конкретных задач. В качестве конкретного использования модели рассмотрено движение гранулированного материала во вращающемся горизонтальном цилиндре. При этом уравнения движения, записанные для области проскальзывания, сводятся к одному уравнению, которое дополняется уравнением неразрывности в обычных декартовых координатах. Граничные условия для скоростей ставятся на общей границе различных областей поведения гранулированного материала. Для численного интегрирования системы уравнений в области проскальзывания использован стандартный сеточный метод. Рассчитано поле скоростей гранулированного материала в области проскальзывания. Приведено сопоставление расчетных данных с экспериментальными данными, полученными авторами в более ранних работах.

Ключевые слова: дисперсная среда, тензор напряжений, уравнения движения, поле скоростей, сеточный метод

CALCULATE THE FLOW OF DISPERSED MATERIALS IN DEVICES WITH ROTATING WORKING ELEMENT

Kozlov M.V., Sidorov V.N., Shirina N.JU., Murashov A.A.

Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, e-mail: s_sidorov@me.com

Proposed calculate movement dispersed medium in devices with rotating working element. Surface forces in dispersed medium obey Coulomb's internal friction in the presence of connectivity. A symmetric stress tensor satisfying isotropic of medium is proposed. Equations of motion in terms of stresses are used. These equations taking into account the stress tensor are written in a natural coordinate system in the form of Euler. Equation of continuity supplements equations of motion. Received in the first partial derivatives set of equations requires four initial and boundary conditions for its decision. These conditions are determined by solving specific problems. As an example, the movement of the granulated material in the horizontal rotating cylinder was considered in the present article. Slippage area motion equations are reduced to a single equation. This equation is completed with equation of continuity in a Cartesian coordinates. Boundary conditions for velocity era determined on the border between different areas of the behavior of granular material. Numerical integration uses a standard grid method. Also the velocity field of granular material in the slippage area is calculated. The comparison of the calculated data with the experimental data obtained by the authors in earlier works is given.

Keywords: disperse medium, the stress tensor, equations of flow, the velocity field, line current, grid method

Устройства с вращающимся рабочим органом (барабанные машины, шнековые устройства, ленточные грануляторы и т. д.) широко используются в химической промышленности. При этом рабочей средой является твердый дисперсный материал, обладающий связностью и подчиняющийся закону внутреннего трения Кулона. Целью настоящего исследования является описание движения дисперсных материалов в устройствах с вращающимся рабочим органом.

В работе [1] для описания движения твердой дисперсной среды во вращающемся барабане было предложено использовать тензор напряжений, который учитывает внутреннее трение в соответствии с законом Кулона. Главным недостатком предложенного подхода является несимметричность тензора напряжений, что противоречит условию изотропности среды, и отсутствие

учета связности. Этих недостатков лишен тензор напряжений, представленный в виде

$$T_{ij} = -P\delta_{ij} + (\tau_0 + fP)(\tau_i n_j + n_i \tau_j), \quad (1)$$

где P – среднее нормальное напряжение; τ_0 – связность среды; τ_i, n_j – единичные векторы касательной и нормали к линии тока; δ_{ij} – символ Кронекера.

Уравнение движения сплошной среды в напряжениях записывается в виде

$$\rho a_i = F_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad (2)$$

где ρ – плотность среды; F_i – вектор объемных сил; a_i – вектор ускорения; x_i – вектор координат. Подставляя выражение (1) в уравнение (2), получим уравнения движения в форме Эйлера:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial \tau} + f \frac{\partial P}{\partial n} = -\rho g \sin(\alpha) + \frac{\partial P}{\partial \tau}, \quad (3)$$

$$\rho u^2 \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} + \frac{\partial P}{\partial n} = \rho g \cos(\alpha) - f \frac{\partial P}{\partial \tau}, \quad (4)$$

где $\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial n}$ – производные в направлении соответственно касательной и нормали к линии тока; u – модуль скорости в точке среды; α – угол между вектором скорости и осью Ox , которая расположена горизонтально; f – коэффициент внутреннего трения.

Система уравнений (3)-(4) дополняется уравнением неразрывности, которое может быть записано в форме Эйлера:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial n} = 0. \quad (5)$$

Система уравнений (3)-(5) является системой уравнений в частных производных первого порядка. Для ее решения необходимо постановка четырех граничных условий, которые во многом определяют способ решения задачи.

Рассмотрим на примере движения сыпучего материала во вращающемся цилиндре. В работах [2, 3] указывается, что при движении сыпучего материала во вращающемся цилиндре в режиме переката, существуют две области различного поведения материала: в области, непосредственно примыкающей к стенке цилиндра (область I), проскальзывание между слоями сыпучего материала отсутствует; в верхней области (область II) имеет место проскальзывание слоев сыпучего материала. Общая граница областей при малых скоростях вращения цилиндра может быть представлена в виде плоскости, параллельной поверхности естественного откоса сыпучего материала

в неподвижном цилиндре. Расчетная схема представлена на рис. 1.

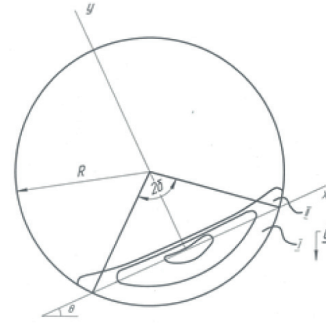


Рис. 1. Расчетная схема движения дисперсного материала во вращающемся цилиндре

В выбранной системе координат система уравнений (3)-(4) для области II может быть приведена к виду:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial \tau} + f \frac{\partial P}{\partial n} = -\rho g \sin(\alpha + \theta), \quad (6)$$

$$\rho u^2 \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} + \frac{\partial P}{\partial n} = \rho g \cos(\alpha + \theta). \quad (7)$$

При получении уравнений (6),(7) предполагается, что величины поверхностных сил $\frac{\partial P}{\partial \tau}$ и $f \frac{\partial P}{\partial \tau}$ малы по сравнению с проекциями силы тяжести. Система уравнений (5),(6) полностью совпадает с уравнениями, приведенными в работе [3].

Система уравнений (6),(7) может быть приведена к одному уравнению и записана в более удобных для решения переменных:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{[v_x^2 v_y^2 - f(v_x^2 + v_y^2)v_x v_y]}{[v_x^4 + f(v_x^2 + v_y^2)v_x v_y]} \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{f(v_x^2 + v_y^2)}{[v_x^4 + f(v_x^2 + v_y^2)v_x v_y]} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{g\sqrt{1+f^2}v_x^3}{[v_x^4 + f(v_x^2 + v_y^2)v_x v_y]}, \quad (8)$$

где v_x и v_y соответственно проекции вектора скорости на координатные оси в выбранной системе координат.

Уравнение (8) замыкается уравнением неразрывности:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (9)$$

Граничные условия для системы уравнений (8),(9) составляются из условия, что в области I сыпучий материал движется как

твердое тело и записываются в виде:

$$y = 0; \quad v_y = \omega \cdot x; \quad v_x = \omega \cdot R \cos(\delta), \quad (10)$$

где ω – угловая скорость вращения цилиндра; R – радиус цилиндра; 2δ – угол загрузки материала в цилиндре.

Для численного решения системы уравнений (8), (9) с граничными условиями (10) использовался стандартный метод сеток [4]. В соответствии с этим методом значения координат определяются формулами:

$$x_i = h_x \cdot i; \quad (i = -n \div n); \quad y_j = h_y \cdot j; \quad (j = 0 \div m); \quad (11)$$

где h_x, h_y – соответственно шаги интегрирования по координатам x и y ; n и m соответственно число точек сетки.

Выполним следующие преобразования:

$$v_x(x_i, y_j) = U_{ij}; \quad v_y(x_i, y_j) = V_{ij}. \quad (12)$$

Тогда частные производные заменяются приближенными значениями:

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} \approx \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{h_y}; \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} \approx \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{h_x}; \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} \approx \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{h_y}; \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} \approx \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h_x}. \quad (13)$$

В соответствии с выражениями (11)-(13) система уравнений (8), (9) приводится к виду

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} - \frac{h_y}{h_x} \cdot [\gamma(U_{i,j}, V_{i,j}) + \lambda(U_{i,j}, V_{i,j}) \cdot (V_{i+1,j} - V_{i,j}) + \beta(U_{i,j}, V_{i,j}) \cdot (U_{i+1,j} - U_{i,j})], \quad (14)$$

где

$$\gamma(U_{i,j}, V_{i,j}) = \frac{g\sqrt{1+f^2}U_{i,j}^3}{[U_{i,j}^4 + f(U_{i,j}^2 + V_{i,j}^2)U_{i,j}V_{i,j}]}; \quad (15)$$

$$\beta(U_{i,j}, V_{i,j}) = \frac{f(U_{i,j}^2 + V_{i,j}^2)}{[U_{i,j}^4 + f(U_{i,j}^2 + V_{i,j}^2)U_{i,j}V_{i,j}]}; \quad (16)$$

$$\lambda(U_{i,j}, V_{i,j}) = \frac{U_{i,j}^2 \cdot V_{i,j}^2 - f \cdot (U_{i,j}^2 + V_{i,j}^2) \cdot U_{i,j}V_{i,j}}{[U_{i,j}^4 + f(U_{i,j}^2 + V_{i,j}^2)U_{i,j}V_{i,j}]}; \quad (17)$$

$$V_{i,j+1} = V_{i,j} - \frac{h_y}{h_x} (U_{i+1,j} - U_{i,j}). \quad (18)$$

Уравнение (14) имеет особенность при значении $U_{ij} = 0$. Это соответствует физике задачи, поскольку данная точка является точкой поворота. Устранение данной особенности производилось стандартным для метода сеток способом [4].

На рис. 2 представлены расчетные зависимости проекции скорости v_x от координаты y . Они хорошо согласуются с экспериментальными данными, представленными авторами в более ранней работе [3].

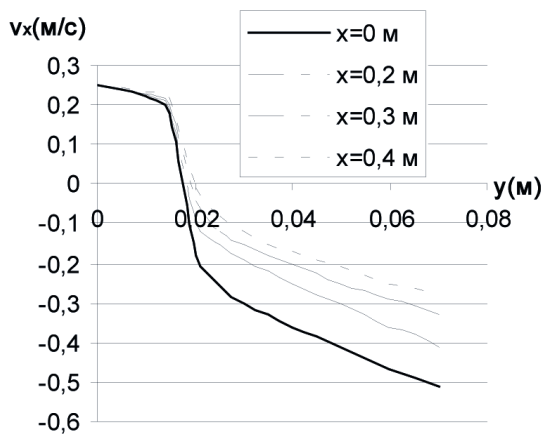


Рис. 2. Распределение скоростей дисперсной среды во вращающемся барабане $R = 0,4$; $2\delta = 120^\circ$; $\omega = 1,1$ рад/с; $f = 0,57$. 1 — $x = 0$; 2 — $x = 0,2$ м; 3 — $x = 0,3$ м; 4 — $x = 0,4$ м

Представленные данные хорошо согласуются с экспериментальными данными,

представленными авторами в более ранней работе [3].

Используя полученное распределение скоростей, определим уравнение свободной поверхности материала в области II исходя из равенства расходов в областях I и II.

Расход материала в некотором сечении, определяемым координатой x , записывается в виде

$$Q(x) = \rho \int_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} v_x(x, y) dy, \quad (19)$$

где ρ — плотность материала; $y_{\min}(x)$, $y_{\max}(x)$ — соответственно минимальное и максимальное значение координаты y в сечении.

В области I материал совершает вращательное движение и в выбранной системе координат проекция скорости v_x определяется выражением:

$$v_x = \omega \cdot (R \cos \delta - y). \quad (20)$$

Для сечения с заданной координатой x для величин $y_{\min}(x)$, $y_{\max}(x)$ в области I получим:

$$y_{\min}(x) = -\sqrt{R^2 - x^2} + R \cdot \cos \delta; \quad y_{\max}(x) = 0. \quad (21)$$

Для сечения с заданной координатой x для величин $y_{\min}(x)$, $y_{\max}(x)$ в области II получим:

$$y_{\min}(x) = 0; \quad y_{\max}(x) = h(x), \quad (22)$$

где $h(x)$ — уравнение свободной поверхности.

С учетом формул (19) – (22) в результате получим:

$$\int_{-\sqrt{R^2-x^2}+R\cos\delta}^0 \omega \cdot (R\cos\delta - y) dy = - \int_0^{h(x)} v_x(x, y) dy, \quad (23)$$

где $v_x(x, y)$ – проекция вектора скорости в области Π , которая определяется из решения уравнения (14). На рис 3. представлена общая картина движения сыпучего материала в соответствии с уравнением (23) и близка к реальной картине движения [2].

Решена известная задача в новой постановке. Использован более простой численный метод, позволивший получить решение с хорошей точностью. Полученные данные хорошо согласуются с экспериментальными данными, представленными авторами в более ранних работах.

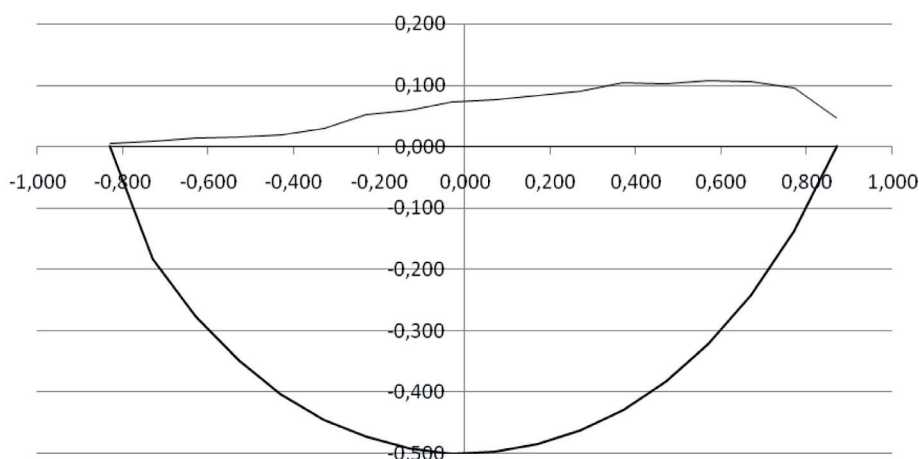


Рис. 3. Общая картина движения сыпучего материала во вращающемся цилиндре $\omega = 1,0 \text{ рад/с}$; $R = 1 \text{ м}$; $2\delta = 120^\circ$

Список литературы

1. Жуков В.П., Мизонов В.Е. Оптимальное распределение размеров мелющих тел по длине барабанных мельниц // Теор. основы хим. технологии. – 1995. т.29, №6. – С. 64–650.
2. Мурашов А.А., Сидоров В.Н., Кравцов А.В. Расчет ленточного гранулятора// Интенсификация процессов механической переработки сыпучих материалов: межвуз. сб. науч. тр. – ИХТИ. – Иваново, 1987. – С. 117–120.
3. Овчинников П.Ф., Лисицын Б.М., Михайленко В.М. Высшая математика.– К.: Выща школа, 1989. – 559 с.
4. Таршис М.Ю., Мурашов А.А., Зайцев А.И. К расчету движения сыпучего материала в устройствах с движущейся гибкой лентой // Изв. ВУЗов «Химия и химическая технология». – 1989. т.32, Вып. 1. – С.108–112.
5. Murashov A.A., Bytev D.O., Zaitsev A.I., Severtsev V.A. A continuum theory for the flow of granular materials in a rotary cylinder // Ist. European Symposium on the Stress and Strain Behavior of Particulate Solids. – Czechoslovakia, 1984. – PP. 21–22.

References

1. Zhukov V.P., Mizonov V.E., Teor. osnovy him. tehnologii. – 1995. vol. 29, no. 6. – PP. 646–650.

2. Murashov A.A., Sidorov V.N., Kravcov A.V. Raschet lentochного granuljatora. Intensifikacija processov mehanicheskoj pererabotki sypuchih materialov: mezhvuzovskij sbornik nauchnyh trudov. IHТИ. – Ivanovo, 1987. – PP. 117–120.
3. Ovchinnikov P.F., Lisicyn B.M., Mihajlenko V.M. Vysshaja matematika. /– K.: Vyshha shkola, 1989. – 559 p.
4. Tarshis M.Ju., Murashov A.A., Zajcev A.I., Izv. VUZov «Himija i himicheskaja tehnologija». – 1989. vol. 32, no. 1. – PP. 108–112.
5. Murashov A.A., Bytev D.O., Zaitsev A.I., Severtsev V.A. A continuum theory for the flow of granular materials in a rotary cylinder // Ist. European Symposium on the Stress and Strain Behavior of Particulate Solids. – Czechoslovakia, 1984. – PP. 21–22.

Рецензенты:

Бачурин В.И., д.ф.-м.н., профессор кафедры «Высшая и прикладная математика» Ярославского филиала МИИТ, г. Ярославль;
Гвоздев А.А., д.ф.-м.н., доцент Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова, г. Ярославль.
Работа поступила в редакцию 24.06.2014.