УДК 517.947

О РЕШЕНИИ ОДНОМЕРНОГО НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНОМ ВИДЕ

Ларин П.А.

ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный нефтяной технический университет», филиал в г. Октябрьском, Октябрьский, e-mail: larinpa@mail.ru

В данной работе предложен способ интегрирования одномерного неоднородного волнового уравнения, при котором общее решение содержит четыре произвольные функции. Эта идея реализована при получении формулы (7). Наличие четырёх произвольных функций предоставляет широкие возможности при получении решения, когда имеются какие-либо ограничения на искомую функцию. О том, как можно распорядиться этими функциями, показано на примере задачи с начальными и однородными граничными условиями. Решение, содержащее конечное число членов, названо решением в конечном виде, в отличие от обычного способа решения через бесконечный тригонометрический ряд. Удобство решения в конечном виде проявляется в приближённых расчётах, в которых отпадает необходимость выяснять, сколько членов тригонометрического ряда нужно оставить, чтобы достичь требуемой точности решения.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, волновое уравнение, интегрирование, общее решение, тригонометрический ряд, решение в конечном виде

ABOUT SOLUTION OF ONE-DIMENSIAL INHOMOGENEOUS WAVE EQUATION IN THE FINAL FORM

Larin P.A.

The Ufa State Petroleum Technical University, the Department in Oktyabrsky Citi, Oktyabrsky, e-mail: larinpa@mail.ru

In the work there has been presented an integration method of one-dimensional inhomogeneous wave equation in which the general solution contains four arbitrary functions. This idea was realized when deducing a formula (7). Availability of four arbitrary functions provides us with an ample opportunity in obtaining the solution when there are some constraints on the sought-for function. The ways of using these functions are explained by illustration of the problem on initial-value and homogeneous boundary conditions. The solution containing the final number of terms was called solution in the final form unlike a common way of solution by infinite trigonometric series. Convenience of solution in the final form is displayed in approximate calculations, in which there can be dropped the necessity of finding out how many members of trigonometric series must be left to attain the solution of desired precision.

Keywords: differential equation, wave equation, integration, general solution, trigonometric series, solution in the final form

В статье рассматривается дифференциальное уравнение вида

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad a = \text{const}. \tag{1}$$

Оно описывает малые поперечные, продольные и крутильные колебания однородного стержня. Обычный способ решения такого уравнения состоит в отыскании решения в виде бесконечного тригонометрического ряда [1, 3, 5]. В данной работе предлагается метод, дающий решение в конечном виде.

1. Вначале найдём общее решение уравнения (1). Перейдём к новым переменным $\xi,\ \eta$:

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at. \tag{2}$$

Функция $u = u(x,t)$ перейдёт в функцию $w = w(\xi,\eta)$:

$$u(x,t) = u\left(\frac{\eta+\xi}{2}, \frac{\eta-\xi}{2a}\right) = w(\xi,\eta),$$

и уравнение (1) приведётся к виду

$$w_{\xi\eta} = -g(\xi,\eta), \tag{3}$$

в котором

$$g(\xi,\eta) = \frac{1}{4a^2} f\left(\frac{\eta+\xi}{2}, \frac{\eta-\xi}{2a}\right). \tag{4}$$

Интегрирование уравнения (3) по переменной ξ даст

$$w_\eta = -\int_{C_2(\eta)}^{\xi} g(y,\eta)\,dy + C(\eta), \tag{5}$$

где $C(\eta)$, $C_2(\eta)$ – произвольные функции. Проинтегрировав (5) по η, получим

$$w = \int_{C_1(\xi)}^{\eta} dz \int_{\xi}^{C_2(z)} g(y,z)\,dy + \int_{C_1(\xi)}^{\eta} C(z)\,dz + C_3(\xi), \tag{6}$$

где $C_1(\xi)$, $C_3(\xi)$ – произвольные функции.

Пусть $F(z)$ – первообразная функция от $C(z)$. В этом случае

$$\int_{C_1(\xi)}^{\eta} C(z)\,dz = F(z)\Big|_{C_1(\xi)}^{\eta} = F(\eta) - F(C_1(\xi)),$$

и (6) запишется в виде

$$w = \int_{C_1(\xi)}^{\eta} dz \int_{\xi}^{C_2(z)} g(y,z)\,dy + F(\eta) - F(C_1(\xi)) + C_3(\xi),$$

Введём обозначения

$$u_1(\xi) = C_3(\xi) - F(C_1(\xi)),\ u_2(\eta) = F(\eta).$$

Тогда

$$w(\xi,\eta) = \int_{C_1(\xi)}^{\eta} dz \int_{\xi}^{C_2(z)} g(y,z)\,dy + u_1(\xi) + u_2(\eta). \qquad (7)$$

Заменив ξ, η по формулам (2), получим общее решение исходного уравнения

$$u(x,t) = w(x-at, x+at).$$

2. В качестве примера применения данного метода решим уравнение (1), в котором положим $a = \text{const} > 0$, взяв область изменения переменных

$$0 \le x \le l,\ \ t \ge 0, \qquad (8)$$

начальные условия

$$u(x,0) = \phi(x),\ \ u_t(x,0) = \psi(x) \qquad (9)$$

и однородные граничные условия

$$u(0,t) = 0,\ \ u(l,t) = 0. \qquad (10)$$

Выполнив в (1) замену

$$\xi = x - at,\ \ \eta = x + at, \qquad (11)$$

получим уравнение вида (3):

$$w_{\xi\eta} = g(\xi,\eta), \qquad (12)$$

общее решение которого даётся равенством (7). Представим это равенство в виде

$$w(\xi,\eta) = F(\xi,\eta) + u_1(\xi) + u_2(\eta), \qquad (13)$$

где

$$F(\xi,\eta) = \int_{\eta}^{C_1(\xi)} dz \int_{C_2(z)}^{\xi} g(y,z)\,dy. \qquad (14)$$

Из (11) следует

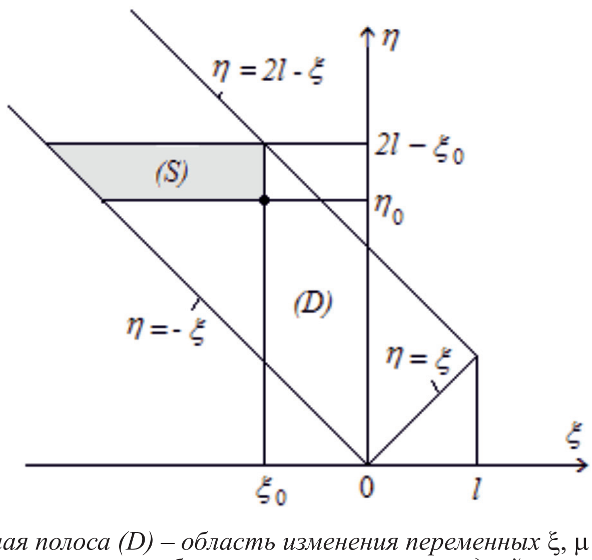
$$x = \frac{\eta+\xi}{2},\ \ t = \frac{\eta-\xi}{2a}.$$

Из этих равенств вытекают соответствия:

$$\begin{cases} \text{значению } x = 0 \text{ соответствует } \eta = -\xi, \\ \text{значению } x = l \text{ соответствует } \eta = 2l - \xi, \\ \text{значению } t = 0 \text{ соответствует } \eta = \xi,\ x = \eta. \end{cases} \qquad (15)$$

Поэтому из (8) получается следующая область (D) изменения переменных ξ, η (рисунок):

$$(D): \begin{cases} 0 \le \eta + \xi \le 2l, \\ \eta \ge \xi \end{cases}$$



Неограниченная полоса (D) – область изменения переменных ξ, μ (S) – область, принятая в качестве области интегрирования в двойном интеграле

Внутри (D) возьмём произвольную точку (ξ_0,η_0) и построим участок (S), как показано на рисунке. Этот участок задаётся системой неравенств

$$(S):\begin{cases}\eta_0\le\eta\le 2l-\xi_0,\\ -\eta\le\xi\le\xi_0,\end{cases}\qquad(16)$$

В соответствии с (14) значение функции F в точке (ξ_0,η_0) равно

$$F(\xi_0,\eta_0)=\int\limits_{\eta_0}^{C_1(\xi_0)}d\eta\int\limits_{C_2(\eta)}^{\xi_0}g(\xi,\eta)\,d\xi.$$

Область интегрирования определяется системой неравенств

$$\begin{cases}\eta_0\le\eta\le C_1(\xi_0),\\ C_2(\eta_0)\le\xi\le\xi_0,\end{cases}\qquad(17)$$

В силу произвольности функций $C_1(\xi)$, $C_2(\eta)$, выберем их такими, чтобы система неравенств (17) совпала с (16): $C_1(\xi)=2l-\xi$, $C_2(\eta)=-\eta$. Выражение (14) примет вид

$$F(\xi,\eta)=\int\limits_{\eta}^{2l-\xi}dz\int\limits_{-z}^{\xi}g(y,z)\,dy.\qquad(18)$$

Из (18) следует

$$F(2l-\eta,\eta)=0.\qquad(19)$$

Привлечём условия (9) – (10), чтобы найти оставшиеся функции u_1 и u_2:

$$\begin{cases}u_1(\xi)\ \text{при}\ \xi\le l;\\ u_2(\eta)\ \text{при}\ \eta\ge 0.\end{cases}\qquad(20)$$

Запишем условия (9)–(10) в переменных $\xi,\ \eta,$ используя соответствия (15):

$$w(\eta,\eta)=\phi(\eta)\ \text{при}\ 0\le\eta\le l,\qquad(21)$$

$$w_\eta(\eta,\eta)-w_\xi(\eta,\eta)=\frac{\psi(\eta)}{a}\ \text{при}\ 0\le\eta\le l,\qquad(22)$$

$$w(-\eta,\eta)=0\ \text{при}\ \eta\ge 0,\qquad(23)$$

$$w(2l-\eta,\eta)=0\ \text{при}\ \eta\ge l.\qquad(24)$$

Подставим эти значения в (13):

$$F(\eta,\eta)+u_1(\eta)+u_2(\eta)=\phi(\eta)\ \text{при}\ 0\le\eta\le l,\qquad(25)$$

$$F_\eta(\eta,\eta)+u_2'(\eta)-F_\xi(\eta,\eta)-u_1'(\eta)=\frac{\psi(\eta)}{a}\ \text{при}\ 0\le\eta\le l,\qquad(26)$$

$$u_1(-\eta)+u_2(\eta)=-F(-\eta,\eta)\ \text{при}\ \eta\ge 0,\qquad(27)$$

$$u_1(2l-\eta)+u_2(\eta)=0\ \text{при}\ \eta\ge l.\qquad(28)$$

При получении (28) учтено равенство (19). Запишем первые два уравнения в виде

$$u_1(\eta)+u_2(\eta)=2A(\eta),\qquad(29)$$

$$-u_1'(\eta)+u_2'(\eta)=\Phi(\eta),\qquad(30)$$

где обозначено

$$2A(\eta)=\phi(\eta)-F(\eta,\eta),\ \ \Phi(\eta)=\frac{\psi(\eta)}{a}-F_\eta(\eta,\eta)+F_\xi(\eta,\eta)\qquad(31)$$

при $0\le\eta\le l$. Проинтегрировав (30) в пределах от 0 до η, будем иметь

$$-u_1(\eta)+u_2(\eta)=2B(\eta),\qquad(32)$$

где

$$2B(\eta)=\int\limits_0^{\eta}\Phi(\eta)\,d\eta.\qquad(33)$$

Из (29) и (32) находим

$$U_1(\eta)=A(\eta)-B(\eta),\ \text{при}\ 0\le\eta\le l,\qquad(34)$$

$$U_2(\eta)=A(\eta)+B(\eta)\ \text{при}\ 0\le\eta\le l.\qquad(35)$$

Получились формулы, определяющие функции $u_1(\xi)$, $u_2(\eta)$ при ξ, $\eta\in[0,l]$. Они обозначены $U_1(\eta)$, $U_2(\eta)$, потому что, опираясь на них, далее будем искать формулы, определяющие $u_1(\xi)$, $u_2(\eta)$ при остальных значениях $\xi,\eta,$ лежащих в (D).

Из (27) имеем

$$u_1(-\eta)=-u_2(\eta)-F(-\eta,\eta)\ \text{при}\ \eta\ge 0.\qquad(36)$$

При $\eta\in[0,l]$ правая часть определяется по формуле (35), поэтому

$$u_1(-\eta)=-U_2(\eta)-F(-\eta,\eta)\ \text{при}\ \eta\in[0,l],$$

отсюда

$$u_1(\eta)=-U_2(-\eta)-F(\eta,-\eta)\ \text{при}\ \eta\in[-l,0].$$

Таким образом,

$$u_1(\eta)=\begin{bmatrix} -U_2(-\eta)-F(\eta,-\eta) \text{ при } \eta\in[-l,0]; \\ U_1(\eta) \text{ при } \eta\in[0,l]. \end{bmatrix} \tag{37}$$

Мы нашли формулу, задающую $u_1(\eta)$ при $\eta\in[-l,l]$. По этой формуле получим

$$u_1(2l-\eta)=\begin{bmatrix} -U_2(-2l+\eta)-F(2l-\eta,-2l+\eta) \text{ при } 2l-\eta\in[-l,0], \text{ или } \eta\in[2l,3l]; \\ U_1(2l-\eta) \text{ при } 2l-\eta\in[0,l], \text{ или } \eta\in[l,2l]. \end{bmatrix} \tag{38}$$

Из (28) имеем

$$u_2(\eta)=-u_1(2l-\eta) \text{ при } \eta\geq l. \tag{39}$$

Подставим (38) в (39):

$$u_2(\eta)=\begin{bmatrix} -U_1(2l-\eta) & \text{при } \eta\in[l,2l]; \\ U_2(-2l+\eta)+F(2l-\eta,-2l+\eta) & \text{при } \eta\in[2l,3l]. \end{bmatrix} \tag{40}$$

Подставим (40) в правую часть равенства (36) и заменим η на $-\eta$:

$$u_1(\eta)=\begin{bmatrix} -U_2(-2l-\eta)-F(2l+\eta,-2l-\eta)-F(\eta,-\eta) & \text{при } \eta\in[-3l,-2l]; \\ U_1(2l+\eta)-F(\eta,-\eta) & \text{при } \eta\in[-2l,-l]. \end{bmatrix} \tag{41}$$

Эта формула определяет $u_1(\eta)$ при $\eta\in[-3l,-l]$. В (41) заменим η на $2l-\eta$ и потребуем, чтобы $2l-\eta\in[-3l,-l]$. Будем иметь

$$u_1(2l-\eta)=\begin{bmatrix} -U_2(-4l+\eta)-F(4l-\eta,-4l+\eta)-F(2l-\eta,-2l+\eta) & \text{при } \eta\in[4l,5l]; \\ U_1(4l-\eta)-F(2l-\eta,-2l+\eta) & \text{при } \eta\in[3l,4l]. \end{bmatrix}$$

Подставим это выражение в (39):

$$u_2(\eta)=\begin{bmatrix} -U_1(4l-\eta)+F(2l-\eta,-2l+\eta) & \text{при } \eta\in[3l,4l]; \\ U_2(-4l+\eta)+F(4l-\eta,-4l+\eta)+F(2l-\eta,-2l+\eta) & \text{при } \eta\in[4l,5l]. \end{bmatrix}$$

И так далее. Обнаруживаются следующие закономерности, определяющие $u_1(\xi)$ и $u_2(\eta)$:

$$u_1(\xi)=\begin{bmatrix} -U_2(-2kl-\xi)-\sum_{n=0}^{k}F(2nl+\xi,-2nl-\xi) & \text{при } \xi\in[-2kl-l,-2kl]; \\ U_1(2kl+\xi)-\sum_{n=0}^{k-1}F(2nl+\xi,-2nl-\xi) & \text{при } \xi\in[-2kl,-2kl+l], \end{bmatrix} \tag{42}$$

$$u_2(\eta)=\begin{bmatrix} U_2(-2kl+\eta)+\sum_{n=0}^{k-1}F(2nl+2l-\eta,-2nl-2l+\eta) & \text{при } \eta\in[2kl,2kl+l]; \\ -U_1(2kl+2l-\eta)+\sum_{n=0}^{k-1}F(2nl+2l-\eta,-2nl-2l+\eta) & \text{при } \eta\in[2kl+l,2kl+2l], \end{bmatrix} \tag{43}$$

Формулы (42), (43) дают решение задачи. В них считается, что $\sum_{n=0}^{k-1}F_n=0$ при $k-1<0$. Непрерывность этих функций на концах интервалов обеспечивают соотношения

$$u_1(0)+u_2(0)+F(0,0)=0,\ \ u_1(l)+u_2(l)=0,$$

вытекающие из (27) и (28).

3. Итак, задачу

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t),\ \ a = \text{const} > 0,\ \ 0 \le x \le l,\ \ t \ge 0,$$

$$u(x,0) = \phi(x),\ \ u_t(x,0) = \psi(x),\ \ u(0,t) = 0,\ \ u(l,t) = 0$$

можно решить последовательным нахождением следующих величин:

$$F(\xi,\eta) = \frac{1}{4a^2}\int_{\eta}^{2l-\xi} dz \int_{-z}^{\xi} f\left(\frac{z+y}{2}, \frac{z-y}{2a}\right) g(y,z)dy.$$

$$A(\eta) = \frac{1}{2}[\phi(\eta) - F(\eta,\eta)],$$

$$B(\eta) = \frac{1}{2}\int_0^{\eta}\left[\frac{\psi(\eta)}{a} - F_{\eta}(\eta,\eta) + F_{\xi}(\eta,\eta)\right]d\eta,$$

$$U_1(\eta) = A(\eta) - B(\eta),\ \text{при}\ \ 0 \le \eta \le l,$$

$$U_2(\eta) = A(\eta) + B(\eta)\ \ \text{при}\ \ 0 \le \eta \le l,$$

$$u_1(\xi) = \left[\begin{array}{ll} -U_2(-2kl-\xi) - \sum\limits_{n=0}^{k} F(2nl+\xi, -2nl-\xi) & \text{при}\ \ \xi \in [-2kl-l, -2kl]; \\ U_1(2kl+\xi) - \sum\limits_{n=0}^{k-1} F(2nl+\xi, -2nl-\xi) & \text{при}\ \ \xi \in [-2kl, -2kl+l], \end{array}\right.$$

$$u_2(\eta) = \left[\begin{array}{ll} U_2(-2kl+\eta) + \sum\limits_{n=0}^{k-1} F(2nl+2l-\eta, -2nl-2l+\eta) & \text{при}\ \ \eta \in [2kl, 2kl+l]; \\ -U_1(2kl+2l-\eta) + \sum\limits_{n=0}^{k-1} F(2nl+2l-\eta, -2nl-2l+\eta) & \text{при}\ \ \eta \in [2kl+l, 2kl+2l], \end{array}\right.$$

$$w(\xi,\eta) = F(\xi,\eta) + u_1(\xi) + u_2(\eta),$$

и находим, наконец,

$$u(x,t) = w(x-at, x+at). \qquad (44)$$

Список литературы

1. Араманович И.Г. и Левин В.И. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1964. – 288 с.

2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. – 832 с.

3. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.

4. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. – 800 с.

5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. – 724 с.

References

1. Aramanovich I.G. and Levin V.I. Equations of Mathematical Physics. M.: Science, 1964, p. 288.

2. Corn G., Corn T. Reference Book on Maths for scientific workers and engineers. M.: Science, 1974, p. 832.

3. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. Equations of Mathematical Physics Partial derivatives. M.: Higher School, 1970, p. 712.

4. Prudnikov A.P., Brychkov Y.A., Maritchev O.I. Integrals and serits. M.: Science, 1981, p. 800.

5. Tikhonov A.N., Samarsky A.A. Equations of Mathematical Physics. M.: Science, 1966, p. 724.

Рецензенты:

Габдрахимов М.С., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой «Нефтепромысловые машины и оборудование» филиала ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный нефтяной технический университет», г. Октябрьский;

Арсланов И.Г., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой «Механики и технологии машиностроения» филиала ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный нефтяной технический университет», г. Октябрьский;

Шамолин М.В., д.ф.-м.н., профессор ведущий научный сотрудник Института механики МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва.

Работа поступила в редакцию 02.09.2014.