УДК 532.517

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В СООБЩАЮЩИХСЯ СОСУДАХ

[1]Байджанов Д.О., [1]Кропачев П.А., [2]Бюнау Е.К., [3]Малышев О.А., [1]Дивак Л.А.

[1]Карагандинский государственный технический университет – вуз Первого Президента РК, Караганда, e-mail: kargtu@kstu.kz;
[2]ОАО «ГАЗПРОМ-ВНИИГАЗ», п. Развилка, e-mail: evgeniy.buenau@yandex.ru;
[3]ЗАО «СТРИМЕР-ЦЕНТР», Москва, e-mail: omalyshev57@mail.ru

Настоящая статья посвящена вопросу фундаментального развития техники физических измерений, а именно: совершенствованию измерений вязкости жидкостей в сообщающихся сосудах, учитывающих свободное, как апериодическое, так и колебательное движение жидкости при разных температурах. Актуальной задачей измерений вязкости жидкостей при различных температурах является возможность экспериментального подтверждения теоретических расчетов с высокой степенью точности. Известны и широко применяются стеклянные капиллярные вискозиметры, в расчётную схему которых положена формула Пуазейля, связывающая расход и перепад давления жидкости с её вязкостью в условиях ламинарного течения в круглой трубе известной геометрии. В данной работе рассматриваются жидкости, ламинарное течение которых в круглой трубе, так же как в стеклянных вискозиметрах, точно или с некоторым приближением удовлетворяют уравнению Пуазейля. Полученные аналитические зависимости, подтвержденные опытным путем, могут быть использованы при проектировании технологических установок и измерительных приборов, в которых используется принцип сообщающихся сосудов.

Ключевые слова: жидкость, апериодический процесс, свободные колебания, измерения, вязкость, сила вязкого трения, вискозиметр

FREE OSCILLATIONS OF VISCOUS LIQUID IN COMMUNICATING VESSELS

[1]Bajdzhanov D.O., [1]Kropachev P.A., [2]Byunau E.K., [3]Malyshev O.A., [1]Divak L.A.

[1]Karaganda State Technical University – university of The First President Republic of Kazakhstan, Karaganda, e-mail: kargtu@kstu.kz;
[2]«GAZPROM-VNIIGAZ», p. Fork, e-mail: evgeniy.buenau@yandex.ru;
[3]«TAPE DRIVE-CENTER», Moscow, e-mail: omalyshev57@mail.ru

The present article deals with the issue of fundamental development of physical measurements techniques, namely: the improvement of measuring liquid viscosity in communicating vessels taking into consideration both aperiodic and oscillatory motion of a fluid at different temperatures. Actual task of measuring the viscosity of liquids at different temperatures is the possibility of experimental verification of theoretical calculations with a high degree of accuracy. Known and widely used glass capillary viscometers, the basis for calculation is Poiseuille's formula, connecting consumption and pressure ratio of liquid, with its viscosity under conditions of laminar flow in a circular tube of known geometry. This paper discusses the liquid laminar flow in a circular tube which, as well as in glass viscometers, exactly or with some approximation, satisfy Poiseuille's equation. The analytical dependence, confirmed by experiment can be used in the design of process units and measuring instruments, which uses the principle of communicating vessels

Keywords: liquid, aperiodic process, free vibrations, measurement, viscosity, the force of viscous friction, viscometer

Наука начинается с тех пор, как начинают измерять.
Д.И. Менделеев

Под апериодическим движением рассматривается переходный процесс в динамической системе, при котором выходная величина, характеризующая переход системы от одного состояния к другому, либо монотонно стремится к установившемуся значению, либо имеет один экстремум. Теоретически может длиться бесконечно большое время.

Не только в основе существования и развития самой науки, но и в развитии технологий всех промышленных отраслей лежат измерения, которые в условиях современной конкурентной среды последовательно проходят путь своего развития от исторических технологий до технологий настоящего и будущего, появляющихся в результате современных научных исследований [1–10, 13–16, 18–21].

Актуальной задачей измерений вязкости жидкостей при различных температурах является возможность экспериментального подтверждения теоретических расчетов с высокой степенью точности. Известны [12] и широко применяются стеклянные капиллярные вискозиметры, в расчётную схему которых положена формула Пуазейля, связывающая расход и перепад давления жидкости с её вязкостью в условиях ламинарного течения в круглой трубе известной геометрии.

В подобных приборах о вязкости исследуемой жидкости судят по времени её перетекания из одного сосуда в другой. Внутренний диаметр стеклянного капилляра длиной

100–200 мм такого вискозиметра составляет обычно 0,1 … 0,3 мм, поэтому с его помощью может быть измерена вязкость исключительно чистых и однородных жидкостей, не содержащих включений, соизмеримых с просветом капилляра.

Возможность калибровки по жидкостям с известными значениями плотности и вязкости обеспечила этим конструкциям широкое применение.

Конструкция таких вискозиметров показана на рис. 1.

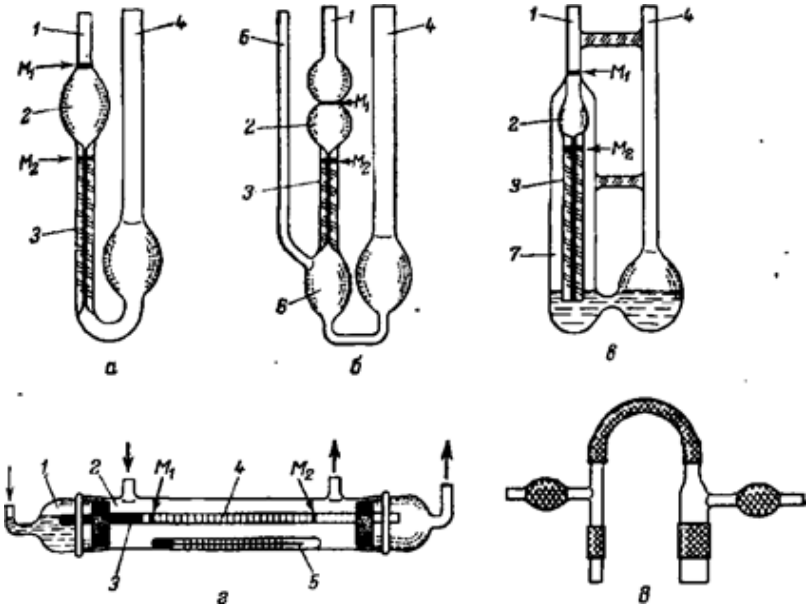

Рис. 1. Вискозиметры Оствальда (а), Уббелоде или ВПЖ-1 (б) Мартина (в). Микровискозиметр (г) и насадка Эппельбея (д)

Основная идея, лежащая в основе таких конструкций – это нестационарное течение (предположительно «ньютоновской») жидкости в сообщающихся сосудах. Она определяет все достоинства и недостатки схемы.

Подкупающая (внешняя) простота и изящество конструкции таких вискозиметров, в особенности схемы Оствальда, вызывает желание рассмотреть расчётную схему такого прибора без ограничений, связанных с размерами трубки (уже не капиллярной, а произвольного диаметра), вязкостью и плотностью исследуемой жидкости, её количеством и качеством.

Под качеством здесь следует понимать возможность содержания в жидкости включений, способных легко «проскакивать» в просвет трубки.

В данной работе рассматриваются жидкости, ламинарное течение которых в круглой трубе, так же как в стеклянных вискозиметрах, точно или с некоторым приближением удовлетворяют уравнению Пуазейля.

Расчётная схема, в виде одинаковых сосудов 1 и 2 радиусом *R,* гидравлически соединённых горизонтальной трубкой 3 длиной *L* и радиусом *r,* показана на рис. 2.

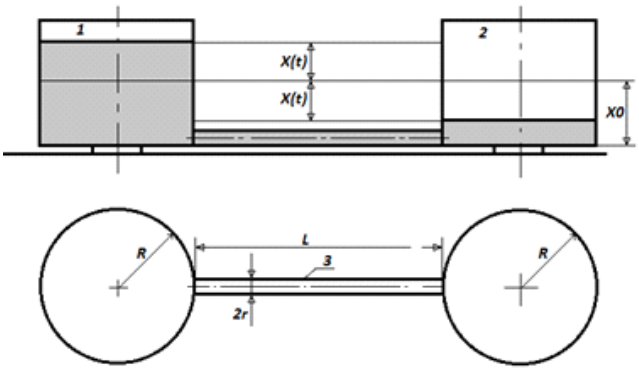

Рис. 2. Расчетная схема вискозиметра

На рис. 2 показаны: жидкость, выведенная тем или иным способом из равновесия так, что она из сосуда 1 перетекает в сосуд 2 под действием только силы тяжести; X_0 – уровень, соответствующий положению равновесия жидкости в сосудах 1 и 2; *X(t)* – текущее отклонения уровня жидкости от положения равновесия – понижается в сосуде 1 и повышается в сосуде 2.

Масса жидкости, размещённой в сосудах 1 и 2 и трубке 3, равна

$$m_0 = 2\pi\rho R^2 X_0 \cdot \left[1+\left(\frac{r}{R}\right)^2 \cdot \frac{L}{2X_0}\right], \quad (1)$$

где ρ, $\frac{кг}{м^3}$ – плотность жидкости; *R, м* – радиус сосудов 1 и 2; *r, L, м* – радиус и длина трубки.

За координату, характеризующую изменения сил в системе, примем *X(t)* – текущее отклонение уровня жидкости в сосудах 1 и 2 от положения равновесия.

В неустановившемся движении перетекания участвует вся жидкость массы m_0.

Поэтому силу инерции, препятствующую изменению скорости восстановления равновесия жидкости, представим в виде

$$m_o \cdot \ddot{X}, H. \quad (2)$$

Сила, стремящаяся вернуть систему в состояние равновесия, равна всей неуравновешенной части жидкости в виде

$$c \cdot X = 2\pi\rho g R^2 \cdot X, H, \quad (3)$$

где *g*, $\frac{м}{c^2}$ – ускорение силы тяжести.

Полагаем, что силой, препятствующей перетеканию жидкости их сосуда 1 в сосуд 2, является сила вязкого трения в трубке 3.

Для её аналитического представления рассмотрим уравнение Пуазейля

$$Q = \frac{\pi r^4}{8\mu \cdot L} \cdot (P_H - P_K) = \frac{\pi r^4}{8\mu \cdot L} \cdot \Delta P, \frac{м^3}{c}, \quad (4)$$

где *Q*, $\frac{м^3}{c}$ – объёмный расход жидкости с вязкостью *μ, Па·с;*

$P_H - P_K = \Delta P$, *Па* – перепад давлений жидкости в начале и в конце трубки.

Из физических соображений (условие неразрывности) объёмный расход жидкости через трубку 3 равен убыли её объёма во времени в сосуде 1 и соответственно увеличению объёма в сосуде 2, то есть характеризует силу вязкого трения, препятствующей перемещению неуравновешенной массы жидкости со скоростью изменения уровня $\dot{X}$ через трубку 3.

$$Q = \pi R^2 \cdot \dot{X}, \frac{м^3}{c}. \quad (5)$$

Произведение

$$\Delta P \cdot \pi r^2, \text{Н}. \quad (6)$$

Из уравнения (4) с учётом (5) и (6) следует выражение для силы вязкого трения, препятствующего достижению положения равновесия в виде

$$\beta \cdot \dot{X} = \frac{8\pi R^2 \cdot \mu L}{r^2} \cdot \dot{X}, \text{Н}. \quad (7)$$

Таким образом, сумма выражений (2), (3) и (7) представляет собой дифференциальное уравнение свободных колебаний уровня жидкости в сообщающихся сосудах в виде

$$m_0 \cdot \ddot{X} + \beta \cdot \dot{X} + c \cdot X = 0. \quad (8)$$

Разделив слагаемые уравнения (8) на m_0, получим дифференциальное уравнение свободных колебаний системы с одной степенью свободы в стандартном виде

$$\ddot{X} + 2n \cdot \dot{X} + \omega^2 \cdot X = 0. \quad (9)$$

Коэффициент *n*, характеризующий диссипативные свойства колебательной системы выражается через вышеуказанные параметры и имеет вид

$$n = \frac{2\mu \cdot L}{\rho \cdot r^2 \cdot X_0 \cdot \left[1+\left(\frac{r}{R}\right)^2 \cdot \frac{L}{2X_0}\right]}, \frac{1}{c}. \quad (10)$$

Коэффициент ω характеризует собственную частоту колебаний недемпфированной колебательной системы *(μ = 0)* в виде

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{X_0 \cdot \left[1+\left(\frac{r}{R}\right)^2 \cdot \frac{L}{2X_0}\right]}}, \frac{1}{c}. \quad (11)$$

В соответствии с [11], для случая $\omega^2 - n^2 > 0$ и начальных условий при *t = 0*, $X(0) = h_0$ и $\dot{X}(0) = 0$ решение уравнения (9) имеет вид затухающих колебаний

$$X = h_0 \cdot e^{-nt}\left(cos\omega_1 t + \frac{n}{\omega_1} sin\omega_1 t\right), м, \quad (12)$$

где h_0 –высота начального подъёма уровня жидкости в сосуде 1;

$$\omega_1^2 = \omega^2 - n^2.$$

Выражение для скорости изменения уровня жидкости для тех же начальных условий имеет вид

$$\dot{X} = -h_0 \frac{\omega^2}{\omega_1} \cdot e^{-nt} \cdot sin\omega_1. \quad (13)$$

Для случая $n^2 - \omega^2 \geq 0$ и начальных условий при $t = 0$, $X(0) = h_0$ и $\dot{X}(0) = 0$ решение уравнения (9) имеет апериодический характер

$$X = \frac{h_0}{k_1 - k_2}\left(k_1 e^{k_2 t} - k_2 e^{k_1 t}\right), \qquad (14)$$

где k_1, k_2 – действительные отрицательные корни характеристического уравнения, вычисляемые по формуле

$$k_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2}. \qquad (15)$$

Выражение для скорости изменения уровня жидкости для тех же начальных условий в этом случае имеет вид

$$\dot{X} = h_0 \frac{k_1 k_2}{k_1 - k_2}\left(e^{k_2 \cdot t} - e^{k_1 \cdot t}\right). \qquad (16)$$

Из соотношения величин (10) и (11) может быть составлено условие, например, отсутствия периодических движений жидкости в сообщающихся сосудах в виде неравенства

$$\frac{\mu}{\rho} \geq \frac{r^2}{2L}\sqrt{g \cdot X_0 \cdot \left[1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cdot \frac{L}{2X_0}\right]}. \qquad (17)$$

В левой части неравенства (17) отношение динамической вязкости μ к плотности ρ представляет собой кинематическую вязкость жидкости, а правая часть содержит размеры r, L, X_0, R, соответствующие рис. 2.

Полученные выше аналитические зависимости могут быть использованы при проектировании технологических установок и измерительных приборов, в которых используется принцип сообщающихся сосудов.

Эффективность применения неочевидного условия (17) можно показать на примере выбора конструктивных размеров устройства по схеме рис. 2, в которой для одной и той же жидкости при разных температурах возможны как апериодическое, так и колебательное движение.

Покажем это на примере *этиленгликоля* ($HO\text{-}CH_2CH_2\text{-}OH$), широко используемого в качестве антифриза.

На основании табличных данных, приведенных в [17], зависимость кинематической вязкости этиленгликоля от температуры показана на графике рис. 3.

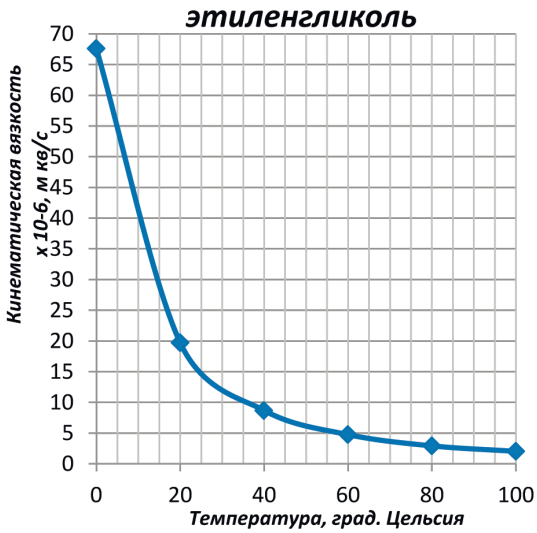

Рис. 3. Зависимость кинематической вязкости этиленгликоля от температуры

Как видно из графика на рис. 3, при увеличении температуры от 0 до + 100 °С кинематическая вязкость этиленгликоля уменьшается в 33 раза.

Выберем значения размеров, показанных на рис. 2, R = 0,02 м, r = 0,02 м, X_0 = 0,1 м, h_0 = 0,05 м, L = 0,07 м, удовлетворяющие условиям

$$\frac{r^2}{2L}\sqrt{g \cdot X_0 \cdot \left[1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cdot \frac{L}{2X_0}\right]} = 28 \cdot 10^{-6}\,\frac{м^2}{с},$$

и $56 \cdot 10^{-6}\,\frac{м^2}{с} > 28 \cdot 10^{-6}\,\frac{м^2}{с} > 2 \cdot 10^{-6}\,\frac{м^2}{с}$,

где крайние значения соответствуют кинематической вязкости этиленгликоля при + 5 °С и + 100 °С соответственно.

Для «холодного» этиленгликоля апериодический закон изменения уровня и скорости его изменения во времени показан на рисунках 4 и 5.

Для «горячего» этиленгликоля колебательный закон изменения уровня и его скорости во времени показан на рис. 6 и 7.

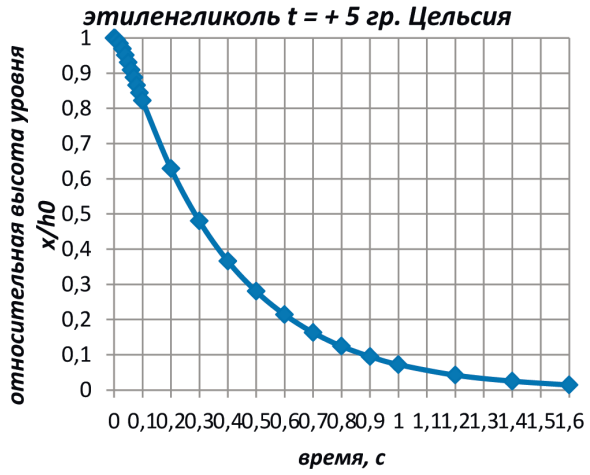

Рис. 4. График изменения уровня жидкости в сосуде во времени

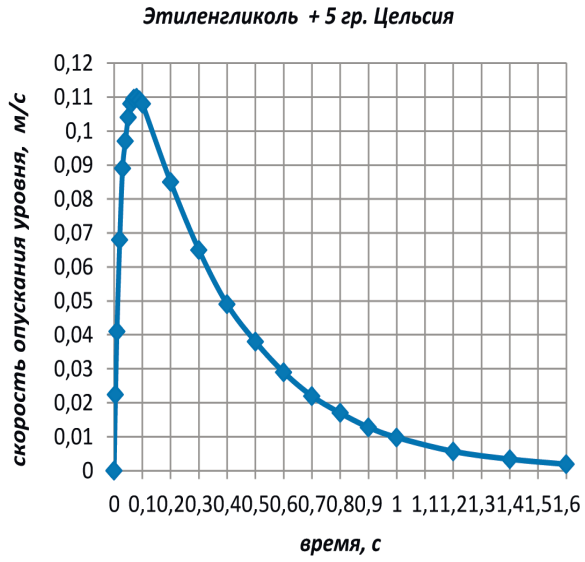

Рис. 5. График скорости изменения уровня жидкости в сосуде во времени

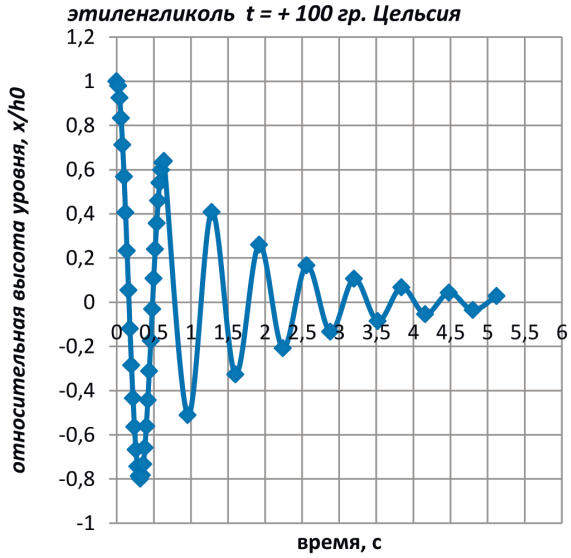

Рис. 6. График изменения уровня жидкости в сосуде во времени

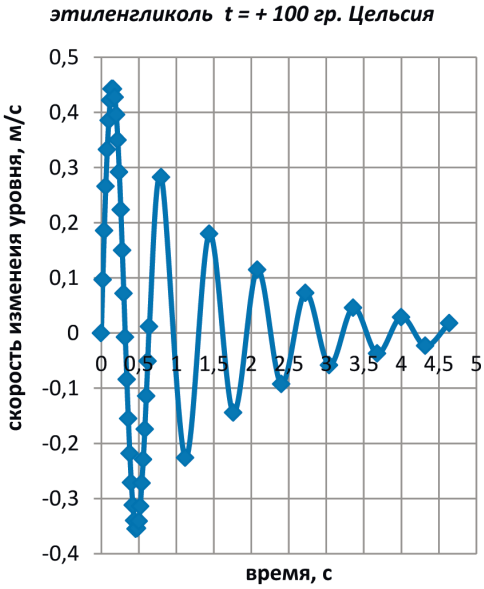

Рис. 7. График скорости изменения уровня жидкости в сосуде во времени

Полученные выше аналитические зависимости, подтвержденные опытным путем, могут быть использованы при проектировании технологических установок и измерительных приборов, в которых используется принцип сообщающихся сосудов, а рассмотренный пример с колебаниями этиленгликоля в сообщающихся сосудах представлен в учебном пособии по изучению основ гидравлики и теории колебаний для студентов, магистрантов, аспирантов и докторантов.

Список литературы

1. Барботажный объемометрический метод контроля вязкости жидкостей. Мордасов М.М., Козадаева М.М., Баршутина М.Н. Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2008. – Т. 74. № 12. – С. 11–12.

2. Бесконтактный неразрушающий аэрогидродинамический контроль вязкости жидкостей. Мордасов М.М., Савенков А.П. Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2008. – Т. 74. № 2. – С. 22–25.

3. Вискозиметр с двумя восходящими трубками и одним капилляром (варианты) и способ измерения вязкости жидкостей (варианты). Кенсей К., Хогенауер В.Н., Чо Ю., Ким С. Патент на изобретение RUS 2256164 от 12.10.2000.

4. Измерение динамической вязкости жидкостей по затуханию колебаний камертона. Жданов А.Г., Пятаков А.П. Физическое образование в ВУЗах. – 2002. – Т. 8. № 4. – С. 117–126.

5. Контроль вязкости жидкости по времени формирования пузырька газа с постоянной массой. Голосницкая М.М., Мордасов М.М., Савенков А.П. Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2012. – Т. 78. № 3. – С. 34–38.

6. Простой прибор для измерения поверхностного натяжения и вязкости жидкостей. Singh M. Приборы и техника эксперимента. – 2005. – № 2. – С. 143–145.

7. Способ измерения вязкости жидкостей. Савенков А.П., Мордасов М.М. патент на изобретение RUS 2417363 от 09.03.2010.

8. Способ измерения вязкости Ньютоновских жидкостей. Алашкевич Ю.Д., Ковалев В.И., Ерофеева А.А. Патент на изобретение RUS 2441217 от 28.10.2010.

9. Способ контроля вязкости жидкостей. Баршутина М.Н., Козадаева М.М., Мордасов Д.М., Мордасов М.М. патент на изобретение RUS 2368886 от 29.11.2007.

10. Способ одновременного измерения плотности и вязкости жидкости. Тетерин Е.П., Потехин Д.С., Тарасов И.Е. Патент на изобретение RUS 2247357 от 10.11.2003.

11. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: НАУКА, 1967.

12. Фрайфелдер Д. Физическая химия.- М.: МИР, 1980.

13. Abbas K.A., Abdulkarim S.M., Saleh A.M. and Ebrahimian M. Suitability of viscosity measurement methods for liquid food variety and applicability in food industry – A review. Journal: Food, Agriculture and Environment (JFAE). Received 18 July 2009, accepted 8 October 2009.

14. Behic Mert, Hartono Sumali, Osvaldo Y. Campanella. A new method to determine viscosity of liquids using vibration principles. Rheologica Acta. November 2003, Volume 42, Issue 6, pp 534–543.

15. Ben-Yuan Lin. Measurement of Viscosity in a Vertical Falling Ball Viscometer. American Laboratory. October 27, 2008.

16. Coles, D. (1965), Transition in circular Couette flow, J. of Fluid Mechanics, 21, 91. DOI: 10.1017/S0022112065000241.

17. http://www.highexpert.ru/content/liquids/eg_gl.html.

18. Janet L. Lane and Kenneth O. Henderson. Viscosity Measurement. So Easy, Yet So Difficult. Standardization News. June. 2004.

19. Patent USA 6152888. Viscosity measuring apparatus and method of use. 11.28.2000.

20. Patent USA 6805674. Viscosity measuring apparatus and method of use. 19.10.2004.

21. Patent USA 7578782. Methods and systems for determining a viscosity of a fluid. 08.25.2009.

22. Wu Jian and Luo Rongmo. Standard for High Viscosity and Multiphase Liquid Flow Measurement. 16th International Congress of Metrology, 02009 (2013).

References

1. Barbotazhnyiy ob'emometricheskiy metod kontrolya vyazkosti zhidkostey. Mordasov M.M., Kozadaeva M.M., Barshutina M.N. Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov. 2008. T. 74. no. 12. pp. 11–12.

2. Beskontaktnyiy nerazrushayuschiy aerogidrodinamicheskiy kontrol vyazkosti zhidkostey. Mordasov M.M., Savenkov A.P. Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov. 2008. T. 74. no. 2. pp. 22–25.

3. Viskozimetr s dvumya voshodyaschimi trubkami i odnim kapillyarom (variantyi) i sposob izmereniya vyazkosti zhidkostey (variantyi). Kensey K., Hogenauer V.N., Cho Yu., Kim S. Patent na izobretenie RUS 2256164 ot 12.10.2000.

4. Izmerenie dinamicheskoy vyazkosti zhidkostey po zatuhaniyu kolebaniy kamertona. Zhdanov A.G., Pyatakov A.P. Fizicheskoe obrazovanie v VUZah. 2002. T. 8. no. 4. pp. 117–126.

5. Kontrol vyazkosti zhidkosti po vremeni formirovaniya puzyirka gaza s postoyannoy massoy. Golosnitskaya M.M., Mordasov M.M., Savenkov A.P. Zavodskaya laboratoriya. Diagno-stika materialov. 2012. T. 78. no. 3. pp. 34–38.

6. Prostoy pribor dlya izmereniya poverhnostnogo natyazheniya i vyazkosti zhidkostey. Singh M. Priboryi i tehnika eksperimenta. 2005. no. 2. pp. 143–145.

7. Sposob izmereniya vyazkosti zhidkostey. Savenkov A.P., Mordasov M.M. patent na izobretenie RUS 2417363 ot 09.03.2010.

8. Sposob izmereniya vyazkosti Nyutonovskih zhidkostey. Alashkevich Yu.D., Kovalev V.I., Erofeeva A.A. patent na izobretenie RUS 2441217 ot 28.10.2010.

9. Sposob kontrolya vyazkosti zhidkostey. Barshutina M.N., Kozadaeva M.M., Mordasov D.M., Mordasov M.M. patent na izobretenie RUS 2368886 ot 29.11.2007.

10. Sposob odnovremennogo izmereniya plotnosti i vyazkosti zhidkosti. Teterin E.P., Potehin D.S., Tarasov I.E. patent na izobretenie RUS 2247357 ot 10.11.2003.

11. Timoshenko S.P. Kolebaniya v inzhenernom dele. M.: NAUKA, 1967.

12. Frayfelder D. Fizicheskaya himiya.- M.: MIR, 1980.

13. Abbas K.A., Abdulkarim S.M., Saleh A.M. and Ebrahimian M. Suitability of viscosity measurement methods for liquid food variety and applicability in food industry – A review. Journal: Food, Agriculture and Environment (JFAE). Received 18 July 2009, accepted 8 October 2009.

14. Behic Mert, Hartono Sumali, Osvaldo Y. Campanella. A new method to determine viscosity of liquids using vibration principles. Rheologica Acta. November 2003, Volume 42, Issue 6, pp 534–543.

15. Ben-Yuan Lin. Measurement of Viscosity in a Vertical Falling Ball Viscometer. American Laboratory. October 27, 2008.

16. Coles D. (1965), Transition in circular Couette flow, J. of Fluid Mechanics, 21, 91. DOI: 10.1017/S0022112065000241.

17. http://www.highexpert.ru/content/liquids/eg_gl.html.

18. Janet L. Lane and Kenneth O. Henderson. Viscosity Measurement. So Easy, Yet So Difficult. Standardization News. June. 2004.

19. Patent USA 6152888. Viscosity measuring apparatus and method of use. 11.28.2000.

20. Patent USA 6805674. Viscosity measuring apparatus and method of use. 19.10.2004.

21. Patent USA 7578782. Methods and systems for determining a viscosity of a fluid. 08.25.2009.

22. Wu Jian and Luo Rongmo. Standard for High Viscosity and Multiphase Liquid Flow Measurement. 16th International Congress of Metrology, 02009 (2013).

Рецензенты:

Утенов Е.С., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой «Строительство и ЖКХ» Карагандинского государственного технического университета, г. Караганда;

Жакулин А.С., д.т.н., профессор кафедры «Строительство и ЖКХ» Карагандинского государственного технического университета, г. Караганда.

Работа поступила в редакцию 08.09.2014.