УДК 513.6

# ВНЕШНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ТЕХНИЧЕСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ

**Виткин А.А.**

*ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина», Институт фундаментального образования (ИнФО), Екатеринбург, e-mail:isit.info@urfu.ru*

Обычное изложение интегрального исчисления функций нескольких переменных в курсах высшей математики для технических университетов, как правило, не использует теорию внешних дифференциальных форм. В данной статье показано, что введение основ этой теории в курс высшей математики весьма желательно. Показаны преимущества этой теории, прежде всего, значительно большие алгоритмические возможности для формальных вычислений по сравнению с нынешним изложением интегрального исчисления. Представляется очень удобным изложение основ этой теории студентам-бакалаврам физико-технических, электро- и теплотехнических специальностей, которые должны использовать интегралы по контуру, интегралы по поверхностям и векторный анализ в своей работе (уравнения Максвелла, термодинамические циклы и т.д.). Тем более важным представляется значение этой теории при введении в преподавание технических университетов элементов дифференциальной геометрии и топологии, более расширенного изложения теории дифференциальных уравнений или теории функций комплексного переменного.

**Ключевые слова: интегральное исчисление функций нескольких переменных, внешние формы, внешнее произведение, дифференциальные формы.**

# EXTERIOR DIFFERENTIAL FORMS IN COURSE OF ANALYSIS FOR ENGINEERS FOR TECHNICAL UNIVERCITIES

**Vitkin A.A.**

*Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Professional Education «Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin» Institute of Fundamental Education, Yekaterinburg, e-mail:isit.info@urfu.ru*

Usual laying out of multivariable integral calculus in courses of analysis for engineers for technical universities, as a rule, doesn't use the theory of exterior differential forms. It is shown here, that the introduction of basis of this theory into the course of analysis for engineers is very desirable. The pluses of this theory are shown, primarily extremely bigger algorithmic possibilities for formal calculating, comparing with present laying out of the the basis of this theory to the students of physical-technical engineering, electrical engineering, and thermal engineering professions seems very convenient. They use line integrals, surface integrals and vector analysis in the work (Maxwell's equations, thermodynamic cycles etc). The importance of this theory at introduction into the teaching at technical universities of elements of differential geometry and topology, more extensive telling of the theory of differential equations or the complex analysis seems all the more important.

**Keywords: multivariable integral calculus, exterior forms, exterior product, differential forms.**

В настоящее время данная теория не излагается для студентов технических вузов и даже в общем курсе анализа для менее продвинутых университетов. Для студентов тех специальностей, где анализ функций нескольких переменных не используется, это понятно. Но даже сейчас знание интегрального исчисления нескольких переменных необходимо, например, для студентов физико-технических специальностей, радио- и электротехников, где требуется знание уравнений Максвелла и для теплотехников, где необходим расчет контурных интегралов на PV-диаграммах[1]. В данной статье будет показано преимущество от введения теории внешних форм при изучении интегрального исчисления нескольких переменных по сравнению с существующими курсами. Начнем с простейшего примера – попробуем преобразовать интеграл с помощью замены переменных.

Для случая одного переменного существующие методы совершенно понятны. Пусть, например, $x=\sin y$. Тогда $dx=\cos y dy$ , а подынтегральное выражение $f(x)dx$ преобразуется совершенно автоматически в $f(\sin y)\cos y dy$.

Это кажется настолько очевидным, что студент так же автоматически может попробовать, например, преобразовать двойной интеграл, выразив его в полярных координатах – $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, тогда будет $dx=\cos\varphi d\rho-\rho\sin\varphi d\varphi$; $dy=\sin\varphi d\rho+\rho\cos\varphi d\varphi$. Имеем формально:

$$dxdy=\cos\varphi\sin\varphi(d\rho)^2+$$
$$+(\rho\cos^2\varphi-\rho\sin^2\varphi)d\rho d\varphi-\rho^2\cos\varphi\ \sin\varphi(d\varphi)^2$$

[1] А также диаграмм в других координатах, например T,S (где T–температура, а S–энтропия).

Остается спросить, что такое, скажем, интеграл от $\cos\varphi\sin\varphi(d\rho)^2$ и… выгнать с экзамена. Понятно, что любой преподаватель знаком со многими подобными примерами.

Теперь, а если студент знает теорию внешних форм? Покажем, как немедленно получается правильная формула.

Здесь, во вводной статье, предполагается, что все нижеследующие понятия уже объяснены, а теоремы доказаны. Все определения и доказательства будут даваться в более подробном учебном курсе[2]. В дальнейшем все криволинейные, поверхностные интегралы заменяются одним видом интеграла – интеграла по гладкому многообразию[3] (кусочно-гладкому) от дифференциальной формы.

Интегралы мы будем брать по т.н. внешним или кососимметричным дифференциальным формам. Форма – это линейная (полилинейная) функция от нескольких векторов, а именно

$$A(\ldots\xi+\eta\ldots)= A(\ldots\xi\ldots)+A(\ldots\eta\ldots)$$
$$\text{и } A(\ldots a\xi\ \ldots)=aA(\ldots\xi\ldots),$$

где $\xi$ и $\eta$ – произвольные вектора пространства $R^m$,, а $\alpha$ – число. Количество векторов-аргументов k называется порядком или степенью формы, а сама форма называется k-формой[4]. Кососимметричность означает, что при перестановке двух аргументов форма меняет знак, то есть

$$A(\ldots\xi\ldots\eta\ldots)= -A(\ldots\eta\ldots\xi\ldots)\ .$$

Ясно, что реально кососимметричность определяется только если степень $k\geq 2$ , но по умолчанию считаются кососимметричными форма нулевой степени (просто число) и форма первой степени (линейная функция). Также вводится операция внешнего произведения форм $A\wedge B$, которая для любых кососимметричных форм дает кососимметричное же произведение (почему и возникло название внешней формы). Здесь мы не даем его общего определения, но отметим, что внешнее произведение 1-форм A и B будет 2-формой $(A\wedge B)(x,y)=A(x)B(y)-A(y)B(x)$. Для m-формы A и n-формы B будет верно равенство $A\wedge B =(-1)^{mn}B\wedge A$, самое главное для нас будет то, что для 1-форм A и B из этого следует, что $A\wedge B =-B\wedge A$, откуда $A\wedge A=-A\wedge A =0$

[2] Для читателя статьи все нужное содержится в книгах [1]-[5] списка литературы.

[3] Особой строгости при введении понятия многообразия (с краем или без) в предполагаемом курсе мы не будем придерживаться, но укажем, что 1-многообразием будет кривая, 2-многообразием – поверхность.

[4] Нельзя путать степень формы k с размерностью векторного пространства m.

Если в каждой точке пространства $R^n$ или в области D этого пространства задана некоторая k-форма, то она называется дифференциальной формой. В разных точках пространства форма в общем случае может быть различной. Важнейшим примером 1-формы может служить обычный дифференциал функции от нескольких переменных. Доказывается, что любая внешняя дифференциальная k-форма (мы будем рассматривать только внешние формы) представляет собой сумму внешних произведений дифференциалов координат типа $a(x)\, dx^m\wedge\ldots dx^n$, причем по вышесказанному $dx\wedge dy=-dy\wedge dx$, откуда $dx\wedge dx=0$[5]. Здесь мы покажем удобство от введения данного понятия.

Например, в той же задаче о приведении двойного интеграла к новым переменным попробуем перейти к полярным координатам $\rho,\varphi$.

Имеем:

$$\begin{gathered} dx\wedge dy=(\cos\varphi d\rho-\rho\sin\varphi d\varphi)\wedge \\ \wedge(\sin\varphi d\rho+\rho\cos\varphi d\varphi)= \cos\varphi\sin\varphi d\rho\wedge d\rho + \\ +\cos\rho\cos\varphi d\rho\wedge d\varphi-\rho\sin\varphi\sin\varphi d\varphi\wedge d\rho - \\ -\rho\sin\varphi\rho\cos\varphi d\varphi\wedge d\varphi=\rho\cos^2\varphi d\rho\wedge d\varphi- \\ -\rho\sin\varphi^2 d\varphi\wedge d\rho = (\text{убирая нулевые формы} \\ d\rho\wedge d\rho \text{ и } d\varphi\wedge d\varphi\ ) = \rho\cos^2\varphi d\rho\wedge d\varphi+ \\ +\rho\sin\varphi^2 d\rho\wedge d\varphi = (\text{пользуемся антисимметричностью } d\varphi\wedge d\rho=-d\rho\wedge d\varphi) =\rho\ d\rho\wedge d\varphi \end{gathered}$$

Остается выразить $f(x,y)$ через $\rho$ и $\varphi$ и автоматически сразу получить формулу преобразования двойного интеграла к полярным координатам – якобиан перехода получился «сам» (сейчас студент должен помнить то, что при переходе к новым координатам внутри интеграла появляется якобиан, да и как вычислять определители студенты могут забыть):

$$\iint_C f(x,y)dx\wedge dy =$$
$$= \iint_{C_1} f\big(x(\rho,\varphi),y(\rho,\varphi)\big)\rho d\rho\wedge d\varphi$$

Здесь мы не даем явное определение интеграла по форме $f(x,y)\ dx\wedge dy$, но укажем, что он является просто обычным двойным интегралом от функции f на области C изменений переменных x,y, аналогично интеграл справа является двойным интегралом на области изменений переменных $\rho$ и $\varphi$.

Введем операцию взятия дифференциала (или внешнего дифференциала) формы,

[5] У нас дифференциал координаты dxi (i – здесь индекс, а не показатель степени!) – это функция, сопоставляющая вектору его i-ю координату. Очевидно, что это форма первой степени.

которая будет переводить дифференциальную k-форму в форму степени k+1.

Для формы ω(x)=f(x) нулевой степени (функции в пространстве $R^m$) дифференциал формы является просто дифференциалом функции f, а именно:

$$df=f'_{x1}\,dx^1+\ldots+f'_{xm}\,dx^m.$$

Для внешней формы-одночлена k-й степени

$$\omega(x) = a(x)dx^{i^1} \wedge dx^{i^2} \ldots dx^{i^k}$$

(x точка в $R^n$) ее дифференциалом будет:

$$d\omega(x) = da(x) \wedge dx^{i^1} \wedge dx^{i^2} \ldots dx^{i^k}$$

где da(x) – обычный дифференциал функции. От суммы таких форм-одночленов (любая форма, как мы упоминали, представляется в виде суммы таких форм) дифференциал берется по линейности. Ясно, что дифференцирование переводит кососимметричные формы в кососимметричные (в силу свойства внешнего произведения) и повышает степень формы на единицу.

Одно из важнейших свойств дифференциала: d(dω)=0 для любой формы[6] ω.

Теперь приведем несколько примеров, показывающих простоту использования теории внешних форм. Вспомним, например, формулу Грина, связывающую криволинейный интеграл с двойным:

$$\int_{\partial C} F_x\,dx + F_y dy = \iint_C \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) dxdy$$

(В данном случае мы не ставим при левом интеграле кружок, означающий замкнутый контур, а границу многообразия С запишем как ∂C по причинам, которые объясняются в более подробном курсе, хотя прямо сейчас укажем, что граница от границы ∂∂C=0, что тесно связано с равенством ddA=0).

Обычную формулу Грина трудно запомнить (почему, например, стоит знак минуса или почему под скобкой берется частная производная по x от $F_y$), а, не зная или позабыв вывод, трудно вспомнить саму формулу. Знание теории внешних форм резко упрощает дело. Мы имеем т.н. общую формулу Стокса (Стокса-Пуанкаре)[7]:

$$\int_{\partial C} F = \int_C dF$$

где ∂C – граница многообразия C, F – дифференциальная форма, а dF – ее дифференциал. В данном случае мы не указываемем кратность интегралов, надо только отметить, что она, как и размерность области интегрирования, на единицу меньше для левого интеграла.

Теперь перейдем к доказательству формулы Грина. Найдем дифференциал $F_x dx+F_y dy$,:

$$\text{d(Fxdx)=} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}dx + \frac{\partial F_x}{\partial y}dy\right)\wedge dx =$$

$$= \frac{\partial F_x}{\partial x}dx\wedge dx + \frac{\partial F_x}{\partial y}dy\wedge dx =$$

$$= \frac{\partial F_x}{\partial y}dy\wedge dx = -\frac{\partial F_x}{\partial y}dx\wedge dy$$

Аналогично $d(F_y dy)$ равна $(\partial F_y)/\partial x\; dx\wedge dy$ и окончательно сама формула Грина:

$$\int_{\partial C} F_x\,dx + F_y dy = \iint_C \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) dxdy$$

(вспоминая, что интеграл по 2-форме f(x,y) $dx\wedge dy$ является просто обычным двойным интегралом).

Аналогичный пример для формулы Гаусса-Остроградского:

Имеем, пользуясь кососимметричностью внешнего произведения, в частности, равенством нулю внешнего произведения одинаковых форм:

$$d(F_x dy\wedge dz) = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}dx + \frac{\partial F_x}{\partial y}dy + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial F_x}{\partial z}dz\right)\wedge dy\wedge dz = \frac{\partial F_x}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dz$$

Аналогично

$$d(F_y dz\wedge dx) = \frac{\partial F_y}{\partial y}dx\wedge dy\wedge dz$$

$$d(F_z dx\wedge dy) = \frac{\partial F_y}{\partial y}dx\wedge dy\wedge dz$$

Наконец, сама формула:

$$\iint_{\partial C} F_x\,dy\wedge dz + F_y dz\wedge dx + F_z dx\wedge dy =$$

$$= \iiint_C \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) dx\wedge dy\wedge dz$$

(интеграл по форме $Fdx\wedge dy$ на поверхности ∂C – это то, что в обычных курсах называет-

[6] Формы, дифференциал которых равен нулю, называются замкнутыми, формы, являющиеся дифференциалом других форм, – точными. Согласно вышесказанному, все точные формы замкнуты, но, как правило, не наоборот.

[7] Доказательство этой формулы представляет собой самую сложную часть теории, но обратим внимание читателя на предельную простоту самой этой формулы!

ся интегралом второго рода, а в правой части интеграл по форме $Fdx\wedge d\wedge dz$ будет обычным тройным интегралом, то у нас есть наша искомая формула).

Аналогично выводится и обычная (необобщенная) формула Стокса.

С помощью дифференциальных форм очень легко выражаются понятия векторного анализа, необходимого студентам изучающих электродинамику, гидро- или аэродинамику.

Введем 4 следующие формы на обычном (трехмерном) пространстве – функции от 0,1,2 и 3 векторов:

0-форма $\omega^0_f = f(x)$ (обычная функция на трехмерном пространстве)

1-форма $\omega^1_F(\xi)=(F,\xi)$ – обычное скалярное произведение векторов

2-форма $\omega^2_V(\xi_1,\xi_2)=(V,\xi_1,\xi_2)=(V,[\xi_1,\xi_2])$ – смешанное произведение векторов V, $\xi_1$ и $\xi_2$

3-форма $\omega^3_\rho(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\rho(x)(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ – функция ρ, умноженная на смешанное произведение $(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$

Нетрудно видеть, что любая кососимметричная 0-,1-,2-,или 3-форма представляется однозначно в виде указанных форм с некоторыми f,F,V или ρ[8].

Теперь основные операторы векторного анализа grad, rot и div определяются следующим образом (вспоминая, что дифференцирование повышает степень формы на 1) .

Градиент f – это такой вектор grad f, что

$$d\omega^0_f(\xi)=df(x)(\xi)=\omega^1_{\mathrm{grad}\, f(\xi)}$$

Ротор F – это такой вектор rot F, что

$$d\omega^1_F(\xi_1,\xi_2)=\omega^2_{\mathrm{rot}\,F}(\xi_1,\xi_2)=(\mathrm{rot}\,F,\xi_1,\xi_2)$$

Дивергенция V – это такой скаляр div V что

$$d\omega^2_V(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\omega^3_{\mathrm{div}V}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\mathrm{div}\,V^*(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$$

Отсюда, например, следует, что rot grad f=0

В самом деле, $\omega^2_{\mathrm{rot\,grad}\,f}= d\omega^1_{\mathrm{grad}\,f}=dd\,\omega^0_f=0$, то есть равенство rot F=0 является необходимым (не достаточным!) чтобы F выражался как grad f. Если F выражается через градиент, то в электродинамике такое поле называется потенциальным.

Также легко доказать, что div rot F=0

В самом деле, $\omega^3_{\mathrm{div\,rot}\,F}= d\omega^2_{\mathrm{rot}\,F}=dd\,\omega^1_F=0$, то есть равенство div A=0 является необходимым (не достаточным!) чтобы A выражался как rot F. Если div A=0, то в электродинамике такое поле называется соленоидальным.

Теперь рассмотрим, например, самое сложное выражение – ротора F. Форма $\omega^1_F(\xi)$ определяется как $(F,\xi)=F^1\xi^1+F^2\xi^2+F^3\xi^3$, то есть она равна $F^1dx^1+F^2dx^2+F3dx^3$.

[8] Для 2- и 3-форм только в обычном трехмерном пространстве.

Тогда

$$d\omega^1_F=\left(\frac{\partial F^3}{\partial x^2}-\frac{\partial F^2}{\partial x^3}\right)dx^2\wedge dx^3+$$

$$+\left(\frac{\partial F^1}{\partial x^3}-\frac{\partial F^3}{\partial x^1}\right)dx^3\wedge dx^1+$$

$$\left(\frac{\partial F^2}{\partial x^1}-\frac{\partial F^1}{\partial x^2}\right)dx^1\wedge dx^2$$

На векторах $\xi_1=(\xi_1^{\,1},\xi_1^{\,2},\xi_1^{\,3})$ и $\xi_2=(\xi_2^{\,1},\xi_2^{\,2},\xi_2^{\,3})$ форма $d\omega^1$ будет равна значению смешанного произведения 3 векторов, а именно вектора-ротора:

$$\boldsymbol{rot\,F}=\left(\frac{\partial F^3}{\partial x^2}-\frac{\partial F^2}{\partial x^3}\right)\boldsymbol{e_1}+\left(\frac{\partial F^1}{\partial x^3}-\frac{\partial F^3}{\partial x^1}\right)\boldsymbol{e_2}$$

$$+\left(\frac{\partial F^2}{\partial x^1}-\frac{\partial F^1}{\partial x^2}\right)\boldsymbol{e_3}$$

и наших $\xi_1$ и $\xi_2$ .

В заключение заметим, что теория внешних форм не упрощает, хотя и не усложняет, изложение анализа от нескольких переменных. Почему же мы считаем внедрение ее в преподавание в технических вузах определенно полезным, а в некоторых случаях даже совершенно необходимым? Укажем следующие преимущества:

• Значительно большие, чем при обычном изложении, алгоритмические возможности теории внешних форм для формальных вычислений, которые увеличивают безошибочность выкладок и удобны для запоминания студентами, как было показано выше.

• Связанные с этим открывающиеся возможности автоматизации вычисления в САПР с помощью программ наподобие Mathcad.

• Многие необходимые (например, в термодинамике) понятия, которые сейчас с трудом понимаются студентами, такие как полные дифференциалы, становятся весьма понятными – полный дифференциал является точной формой.

• При требовании развития курса высшей математики с включением в него элементов дифференциальной геометрии, топологии, теории функций комплексного переменного, более подробного изложения теории дифференциальных уравнений, теория внешних форм может стать вообще необходимой. Это будет, например, в случае более подробного изложения теоретической механики, механики сплошных сред или даже чисто прикладных, но более продвинутых, чем обычно, технических дисциплин, в которых бы вводились многомерные пространства с размерностью более 3.

Поэтому можно считать, что если студенту вообще необходимо для конкретных технических дисциплин знание интегрального исчисления нескольких переменных, то ему было бы полезно знать теорию внешних форм, причем учитывая учебные программы для физико-технических, электро- и теплотехнических факультетов уже на первых курсах бакалавриата.

## Список литературы

1. Ефимов Н.В. Введение в теорию внешних форм. – М.: Изд-во Наука, 1977.

2. Зорич В.А. Математический анализ. ч.I. – 2-е изд. испр. и доп. – М.: Изд-во МЦНМО, 1998.

3. Зорич В.А. Математический анализ. ч.II. – 2-е изд. испр. и доп. – М.: Изд-во МЦНМО, 1998.

4. Мищенко А.С. Фоменко А.Т. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. – 2-е. изд. – М.: Физматлит, 2009.

5. Спивак М. Математический анализ на многообразиях. – 2-е. изд. – СПб.; М.; Краснодар: Изд-во Лань, 2005

## References

1.Yefimov N. V, Vvedeniye v teoriyu vneshnikh form. [Introduction in the Theory of External Forms] Moscow: Nauka ed. 1977

2.Zorich V.A. Matematicheskiy analiz part I [Mathematical Analysis: v. I]. Moscow: MTZNMO ed. 1998

3.Zorich V.A. Matematicheskiy analiz part II [Mathematical Analysis: v. II]. Moscow: MTZNMO ed. 1998

4.Mischenko A. S. Fomenko A. T. Kratkiy kurs differentsialnoy geometrii i topologii. Moscow: Fizmatlit ed. 2009 [Fomenko A. T., Mischenko A. S. A Short Course of Differential Geometry and Topology. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, ed. 2009.]

5.Spivak M. Calculus on manifolds. NY, Amsterdam: W.A.Benjamin ed.1965

**Рецензенты:**

Долинер Л.И., д.п.н., профессор, профессор кафедры ИСиТ, УРФУ, ИнФО, г. Екатеринбург;

Матвеева Т.А., д.п.н., профессор, зав. кафедрой ИСиТ, УРФУ, ИнФО, г. Екатеринбург.

Работа поступила в редакцию 29.07.2014.