

УДК 517.926

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ФРАНКЛЯ ДЛЯ СМЕШАННОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПРИ МЛАДШИХ ЧЛЕНАХ

¹Лайпанова А.М., ²Желдашева А.О., ²Лесев В.Н.

¹Московский государственный университет путей сообщения, Москва, e-mail: aida7@list.ru;

²ГОУ ВПО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова», Нальчик, e-mail: diff@kbsu.ru

В работе поставлена и исследована краевая задача типа задачи Франкля для обобщенного смешанного уравнения парабола-гиперболического типа с переменными коэффициентами при младших членах в конечной односвязной области. Для исходной задачи была сформулирована и доказана методом «abc» теорема единственности. Выполнение условий этой теоремы обеспечивает тривиальность соответствующей однородной задачи, что и гарантирует единственность решения исследуемой краевой задачи в целом. Доказательство существования явного аналитического решения задачи проведено для одного частного случая исходного уравнения. При этом были использованы метод функций Грина и метод интегральных уравнений. В результате определены условия, при которых вопрос разрешимости задачи в требуемом классе функций может быть эквивалентно редуцирован к вопросу разрешимости соответствующего интегрального уравнения.

Ключевые слова: задача Франкля, смешанное уравнение, метод «abc», однозначная разрешимость

ANALOG OF THE FRANKL PROBLEM FOR THE MIXED SECOND ORDER EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS AT YOUNGER MEMBERS

¹Laypanova A.M., ²Zheldasheva A.O., ²Lesev V.N.

¹Moscow State University of Communications, Department of «service and tourism», Moscow, e-mail: aida7@list.ru;

²Kabardino-Balkar State University. KhM Berbekova, Nalchik, e-mail: diff@kbsu.ru

In the paper we investigate the unique solvability of the boundary value problem for the generalized Frankl mixed parabolic-hyperbolic type with variable coefficients of the lower terms in a finite simply connected domain. The theorem of uniqueness of the solution of the investigated problem has been formulated and proved by the method of «abc». The conditions of this theorem provides the corresponding homogeneous problem is trivial, and that guarantees the uniqueness of solutions investigated boundary-value problem in general. Proof of the existence of explicit analytical solutions is carried out for one particular case of the original equation. At the same time were used Green's function method and the method of integral equations. As a result, the conditions under which the question of the solvability of a class of functions required can be reduced is equivalent to the solvability of the corresponding integral equation.

Keywords: Frankly problem, mixed equation, «abc» method, the single-valued solvability

В связи с появлением все новых приложений уравнений смешанного типа теория краевых задач для них в последние годы получила новый импульс развития. При этом существенную роль в приложениях занимают краевые задачи для парабола-гиперболических уравнений (например [1–5]), отличающиеся от иных в первую очередь специальными методами, применяемыми при их исследовании. Говоря о задаче Франкля и ее аналогах для смешанных парабола-гиперболических уравнений, следует отметить, что их изучение

не носит систематического характера, несмотря на значительную важность подобных исследований [6].

В настоящей работе представлено доказательство единственности решения аналога задачи Франкля для смешанного парабола-гиперболического уравнения с переменными коэффициентами, а также доказано существование частного аналитического решения.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$0 = Lu \equiv \begin{cases} u_{xx} + a_1(x, y)u_x + b_1(x, y)u_y + c_1(x, y)u, & y > 0, \\ u_{yy} - |y|^m u_{xx} + a_2(x, y)u_y + b_2(x, y)u, & m > 0, y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

в конечной односвязной области Ω евклидовой плоскости независимых переменных x, y , ограниченной отрезком $A'A$ оси $x = 0$;

$-1 \leq y \leq 1$; отрезками $B'B, AB$ прямых $x = \ell$, $y = 1$; характеристикой $A'C_m$:

$$x + 2 / (m + 2) (-y)^{(m+2)/2} = \ell_1$$

уравнения (1), где $A'(0, -1)$, $C(\ell_1, 0)$, $\ell_1 \leq \ell$ и отрезком CB' оси x , $\ell_1 \leq x \leq \ell$, $\ell_1 = 2/(m+2)$.

Обозначим через $\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}$; OP – часть характеристики уравнения (1), исходящей из точки $O(0,0)$ до пересечения с $A'C$ в точке P ; Ω_2 – область, ограниченная кривыми OP , PC и OC ; Ω_3 – область, ограниченная кривыми OA' , $A'P$ и PO .

Относительно коэффициентов уравнения (1) предполагается, что

$$a_1 \in C^1(\bar{\Omega}_1); \quad b_1 \in C^2(\bar{\Omega}_1); \\ c_1 \in C(\bar{\Omega}_1); \quad a_2, b_2 \in C^1(\bar{\Omega}_2 \cup \bar{\Omega}_3),$$

причем $b_1(x, y) < 0$, $c_1(x, y) \leq 0$, $a_1(x, y) \leq 0$, $b_2(x, y) \leq 0$.

Задача Ф. Требуется найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

$$1) u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup A'A \setminus OP) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3);$$

$$2) Lu(x, y) = 0, \quad (x, y) \in (\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3);$$

$$3) u(x, y) \text{ удовлетворяет краевым условиям:}$$

$$u_x|_{AA'} = 0; \quad (2)$$

$$u|_{CB'} = \Psi_1(x), \quad \ell_1 \leq x \leq \ell; \quad (3)$$

$$u|_{B'B} = \Psi_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (4)$$

$$u(0, y) - u(0, -y) = f(y), \quad -1 \leq y \leq 1, \quad (5)$$

где $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(y)$, $f(y)$ – заданные функции, удовлетворяющие условию Гельдера.

Доказательство единственности решения задачи Ф

Покажем, что однородная задача Ф ($\Psi_1 = \Psi_2 = f = 0$) имеет только нулевое решение. Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условию

$$a_{1x} + b_{1y} + kb_1 - 2c_1 \geq 0,$$

где

$$k = \text{const} < \max_{\Omega_1} \{2c_1 - a_{1x} - b_{1y}\} / b_1;$$

$$b_1^2(b_1'' - a_1b_1) + b_1^3(a_1' - 2c_1) - 2b_1b_1'^2 \leq 0;$$

$$b_1'(0,0) - a_1(0,0)b_1(0,0) \leq 0;$$

$$0 \leq a_2(x,0) \leq m/2; \quad b_2(x, y) \leq 0.$$

Тогда решение $u(x, y)$ однородной задачи Ф в области Ω тождественно равно нулю.

Для доказательства теоремы 1 применим метод «абс». Умножим уравнение (1) на выражение

$$\alpha(x, y)u + \beta(x, y)u_x + \gamma(x, y)u_y,$$

где α , β , γ – пока произвольные достаточно гладкие функции, и проинтегрируем полученное соотношение по области Ω .

В результате, принимая во внимание, что $u_x = x_n u_n$, $u_y = y_n u_n$ на $B'B$, где x_n и y_n – направляющие косинусы внешней нормали $\vec{n} = (x_n, y_n)$ к границе области Ω , $dx = (-y)^{m/2} dy$ на характеристике $A'C$ и учитывая однородные граничные условия, приходим к равенству

$$0 = \int_{\Omega} (\alpha u + \beta u_x + \gamma u_y) Lu \, dx dy = \sum_{n=1}^{15} I_n + F, \quad (6)$$

где I_n – интегралы от искомой функции, а F – слагаемые, содержащие квадраты искомой функции в явном виде.

Выбирая функции α , β , γ таким образом, чтобы все интегралы I_n в (6) были неотрицательны. Для этого достаточно положить в Ω_1 $\alpha = -\exp(ky)$; $\beta = 0$, $\gamma = 0$, а в Ω_i , $i = 2, 3$,

$$\alpha = (1+y)\alpha_0^-; \quad \beta = \beta_0^-(-y)^{m/2};$$

$$\gamma = \gamma_0^- = \text{const} > 0,$$

где $\alpha_0^- = \text{const} < 0$; $\beta_0^- = \text{const} < 0$; $\gamma_0^- = \text{const} > 0$ таковы, что выполняются неравенства:

$$[(2b_2 - a_{2y})(1+y) - a_2] \alpha_0^- - \beta_0^- [(-y)^m b_{2x} + \gamma_0^- b_{2y}] \geq 0;$$

$$[k - a_2(x, -0)] \exp(ky) - \gamma_0^- b_2(x, -0) + b_1(x, +0) \geq 0;$$

$$\beta_0^- + \gamma_0^- < 0; \quad \beta_0^{-2}(2a_2 + my)y + 8a_2\gamma_0^- [\gamma_0^- m - 2y(1+y)] \geq 0.$$

Тогда нетрудно убедиться в том, что при выполнении условий теоремы 1, $u \equiv 0$ в Ω . Следовательно, в силу тривиальности решения однородной задачи решение задачи Ф единственно.

Доказательство существования решения задачи Ф

Проведем доказательство существования решения для случая

$$a_1 = c_1 = a_2 = b_2 = 0, \\ b_1 = -1.$$

Решение уравнения (1) при $y < 0$, удовлетворяющее условиям Коши

$$u(x, 0) = \tau(x),$$

$$u_y(x, 0) = \nu(x),$$

имеет вид [7]:

$$u(x, y) = \bar{\gamma}_1 \int_0^1 \tau \left[x + (1 - 2\bar{\beta})(-y)^{\frac{m+2}{2}} (2t-1) \right] [t(1-t)]^{\bar{\beta}-1} dt + \\ + \bar{\gamma}_2 y \int_0^1 \nu \left[x + (1 - 2\bar{\beta})(-y)^{\frac{m+2}{2}} (2t-1) \right] [t(1-t)]^{-\bar{\beta}} dt, \quad (7)$$

где $\bar{\gamma}_1 = \Gamma(2\bar{\beta})/\Gamma^2(\bar{\beta}); \quad \bar{\gamma}_2 = \Gamma(2-2\bar{\beta})/\Gamma^2(1-\bar{\beta}); \quad \bar{\beta} = \frac{m}{2(m+2)}.$

Учитывая условие (6), получим соотношение между $\tau(x)$, $\nu(x)$, $\phi(y) = u(0, y)$, $0 \leq y \leq 1$. Для этого положим в равенстве (7) $x = 0$, затем заменим $(-y)$ на $[y/(1-2\bar{\beta})]^{1-2\bar{\beta}}$,

полученное выражение умножим на $y^{2\bar{\beta}}/(x^2 - y^2)^{\bar{\beta}}$, проинтегрируем по y от 0 до x и, наконец, продифференцируем полученное равенство по x . Получим

$$\tau(x) = \rho_0 \int_0^x \frac{\nu(t) dt}{(x-t)^{2\bar{\beta}}} + \\ + \rho_1 \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y^{2\bar{\beta}} \phi[y/(1-2\bar{\beta})]^{1-2\bar{\beta}}}{(x^2 - y^2)^{\bar{\beta}}} dy + g(x), \quad (8)$$

где $\rho_0 = [(1-2\bar{\beta})^{2\bar{\beta}} \sin \bar{\beta} \pi] / [2^{1-2\bar{\beta}} \bar{\gamma}_1 \pi]; \quad \rho_1 = \sin \bar{\beta} \pi / [2^{1-2\bar{\beta}} \bar{\gamma}_1 \pi];$

$$g(x) = -\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y^{2\bar{\beta}} f[(y/(1-2\bar{\beta}))^{1-2\bar{\beta}}]}{(x^2 - y^2)^{\bar{\beta}}} dy; \quad 0 \leq x \leq 1-2\bar{\beta}.$$

Решая в параболической части Ω_1 смешанную задачу $u_x(0, y) = 0$, $u(x, 0) = \tau(x)$,

$u(\ell, y) = \Psi_2(y)$ для уравнения (1) при $y > 0$, получим

$$2\sqrt{\pi} u(x, y) = \int_0^{1-2\bar{\beta}} \tau(\xi) G(\xi, 0; x, y) d\xi + \\ + \int_{1-2\bar{\beta}}^{\ell} \Psi_1(\xi) G(\xi, 0; x, y) d\xi - \int_0^y \Psi_2(\eta) G_{\xi}(\ell, \eta; x, y) d\eta, \quad (9)$$

где $G(\xi, \eta; x, y) = (y-\eta)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(y-\eta)} \right] + \exp \left[-\frac{(x+\xi+2n)^2}{4(y-\eta)} \right] - \right. \\ \left. - \exp \left[-\frac{(x-\xi+2n-2\ell)^2}{4(y-\eta)} \right] + \exp \left[-\frac{(x+\xi+2n-2\ell)^2}{4(y-\eta)} \right] \right\} \quad (10)$

– функция Грина смешанной задачи уравнения теплопроводности.

Полагая в (9) $x = 0$ и учитывая условие (2) после замены переменной ξ по формуле $\xi = (1 - 2\bar{\beta})t$ в первом интеграле, получим

$$2\sqrt{\pi}u(0, y) = 2\sqrt{\pi}\phi(y) = q_0(y) + (1 - 2\bar{\beta}) \int_0^1 G((1 - 2\bar{\beta})t, 0; 0, y) \tau((1 - 2\bar{\beta})t) dt, \quad (11)$$

где

$$q_0(y) = \int_{1-2\bar{\beta}}^{\ell} \Psi_1(\xi) G(\xi, 0; 0, y) d\xi - \int_0^y \Psi_2(\eta) G(\ell, \eta; 0, y) d\eta.$$

В равенстве (11) y заменим через $y^{2\bar{\beta}} / (x^2 - y^2)^{\bar{\beta}}$ и проинтегрируем от 0 до x $[y / (1 - 2\bar{\beta})]^{1-2\bar{\beta}}$, затем умножим обе части на $y^{2\bar{\beta}} / (x^2 - y^2)^{\bar{\beta}}$ и проинтегрируем по y и, наконец, полученное выражение продифференцируем по x , получим

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y^{2\bar{\beta}}}{(x^2 - y^2)^{\bar{\beta}}} \phi \left[\left(\frac{y}{1 - 2\bar{\beta}} \right)^{1-2\bar{\beta}} \right] dy = \int_0^1 \Im(x, t) \tau[(1 - 2\bar{\beta})t] dt + q_1(x), \quad (12)$$

где

$$\Im(x, t) = \frac{1 - 2\bar{\beta}}{2\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y^{2\bar{\beta}}}{(x^2 - y^2)^{\bar{\beta}}} G \left[(1 - 2\bar{\beta})t, 0; 0, \left(\frac{y}{1 - 2\bar{\beta}} \right)^{1-2\bar{\beta}} \right] dy;$$

$$q_1(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y^{2\bar{\beta}}}{(x^2 - y^2)^{\bar{\beta}}} q_0 \left[\left(\frac{y}{1 - 2\bar{\beta}} \right)^{1-2\bar{\beta}} \right] dy.$$

В силу свойств функции Грина (10) и заданных функций $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(y)$ заключаем, что

$$q_0(y) \in C[0, 1] \cap C^2]0, 1[, \quad q_1(x) \in C[0, \ell] \cap C^2]0, \ell[, \quad \Im(x, t) \in C[0, \ell] \cap C^2]0, \ell[$$

по переменным x и t .
Исключая $\phi(y)$ из (8) и (12), будем иметь

$$\tau(x) = \rho_0 \int_0^x \frac{v(t) dt}{(x - t)^{2\bar{\beta}}} + \rho_1 \int_0^1 \Im(x, t) \tau[(1 - 2\bar{\beta})t] dt + g(x) + \rho_1 q_1(x). \quad (13)$$

Решая задачу: $\tau''(x) - v(x) = 0$, $\tau'(0) = \tau(\ell_1) = 0$, получим соотношение между $\tau(x)$ и $v(x)$ на линии $y = 0$ из параболической части Ω_1 в виде

$$\tau(x) = \int_0^{\ell_1} G_0(x, t) v(t) dt, \quad (14)$$

где $G_0(x, t)$ — функция Грина.
Подставим значение $\tau(x)$ из (14) в (13)

$$\int_0^x \frac{v(t) dt}{(x - t)^{2\bar{\beta}}} = \frac{1}{\rho_0} \int_0^{\ell_1} G_0(x, t) v(t) dt - \frac{\rho_1}{\rho_0} \int_0^1 \Im(x, t_1) dt_1 \int_0^{\ell_1} G_0((1 - 2\bar{\beta})t_1, t) dt - P(x), \quad (15)$$

где
$$P(x) = \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right) q_1(x) + g(x).$$

Обозначая правую часть уравнения (15) через $\rho(x)$ и обращая полученное уравнение Абеля, будем иметь

$$v(x) = \frac{\sin 2\beta\pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\rho(t)dt}{(x-t)^{1-2\beta}}. \quad (16)$$

Возвращаясь от $\rho(x)$ к $v(x)$ и $P(x)$, в результате элементарных преобразований, получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно $v(x)$:

$$v(x) = \int_0^{\ell_1} Q(x,t)v(t)dt + \tilde{P}(x), \quad (17)$$

где $Q(x, t)$ и $\tilde{P}(x)$ выражаются через заданные функции.

Таким образом, в силу единственности решения задачи Ф убеждаемся в однозначной разрешимости уравнения (17).

Определив из (17) $v(x)$, а затем по формуле (15) и $\tau(x)$, находим решение задачи Ф в области Ω_1 , которое будет иметь вид (9), а в области Ω_2 – вид (7). В области Ω_3 решение задачи Ф можно продолжить как решение задачи Дарбу.

Заключение

В работе установлены единственность решения нелокальной краевой задачи для смешанного уравнения второго порядка в замкнутой области. Для доказательства единственности решения применен метод «abc». Доказательство существования частного решения поставленной задачи проведено на основе методов функции Грина и интегральных уравнений.

Список литературы

1. Елеев В.А., Лайпанова А.М. О существовании и единственности решения задачи Ф.И. Франкля для смешанного уравнения гипербола-параболического типа // Известия КБНЦ РАН. – 2000. – № 2 (5). – С. 50–56.
2. Елеев В.А., Лесев В.Н. О двух краевых задачах для смешанных уравнений с перпендикулярными линиями из-

менения типа // Владикавказский математический журнал. – 2001. – Т. 3. – № 4. – С. 9–22.

3. Лайпанова А.М., Лесев В.Н. Об однозначной разрешимости краевой задачи для модельного уравнения второго порядка // Сборник научных трудов Северо-Кавказского государственного технического университета. Серия: Естественные науки. – 2007. – С. 31.

4. Лесев В.Н., Желдашева А.О. Неклассическая краевая задача для смешанного модельного уравнения второго порядка с нелокальными условиями сопряжения // Сборник научных трудов Sworld. – 2012. – Т. 2. – № 3. – С. 99–104.

5. Лесев В.Н., Желдашева А.О. Неклассическая краевая задача для смешанного уравнения второго порядка с интегральными условиями сопряжения // Известия Смоленского государственного университета. – 2013. – № 3 (23). – С. 379–386.

6. Псху А.В. Задачи Франкля для уравнений смешанного типа: автореф. канд. дис. ... – Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 1999.

7. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Высшая школа, 1985. – 304 с.

References

1. Eleev V.A., Laypanova A.M. On the existence and uniqueness of solutions of F.I. Frankl equation for mixed hyperbolic-parabolic type // News KBSC RAS. 2000. no. 2 (5). pp. 50–56.
2. Eleev V.A., Lesev V.N. Two boundary value problems for mixed equations with perpendicular lines change the type // Vladikavkaz Mathematical Journal. 2001. T. 3. no. 4. pp. 9–22.
3. Laypanova A.M., Lesev V.N. On the unique solvability of the boundary value problem for second-order model equation // Proceedings of the North Caucasus State Technical University. Series: Natural Sciences. 2007. pp. 31.
4. Lesev V.N., Zheldasheva A.O. Nonclassical boundary value problem for a mixed model equation with nonlocal conditions conjugation // Proceedings Sworld. 2012. T. 2. no. 3. pp. 99–104.
5. Lesev V.N., Zheldasheva A.O. Nonclassical boundary value problem for a mixed second-order equation with integral conditions conjugation // Proceedings of the Smolensk State University. 2013. no. 3 (23). pp. 379–386.
6. Pskhu A.V. Frankl problem for equations of mixed type. Ph. D. diss. Nalchik, SRI PMA KBNSC RAN, 1999.
7. Smirnov M.M. Mixed-type equation. – Moscow: Higher School, 1985. 304.

Рецензенты:

Журтов А.Х., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой ГиВА, КБГУ им. Х.М. Бербекова, г. Нальчик;

Хаширова Т.Ю., д.т.н., профессор кафедры ИМОАС, КБГУ им. Х.М. Бербекова, г. Нальчик.

Работа поступила в редакцию 28.07.2014.