

УДК 531.395

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КУЛИСНОГО МЕХАНИЗМА С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ С НЕПОДВИЖНЫМИ ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ПАРАМИ

Смирнов Д.А.

ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет
им. Р.Е. Алексеева», Нижний Новгород, e-mail: dmsmir@yandex.ru

Разработана математическая модель кинематики движения кулисного механизма с одной степенью свободы с неподвижными вращательными кинематическими парами. Основой для определения зависимостей между кинематическими характеристиками звеньев механизма служит аппарат математического анализа. Определены зависимости кинематических характеристик звеньев механизма от времени. Представлены графики зависимостей углов поворота, угловых скоростей и угловых ускорений от времени при четырех вариантах начальных условий. Получены аналитические выражения для абсолютных скорости и ускорения, их составляющих в переносном и относительном движении, а также ускорения Кориолиса. На основе анализа результатов расчета сделаны выводы о периодических характерах переносного и относительного движений в случае равномерного и равноускоренного движения кривошипа, а также о неограниченном возрастании абсолютной скорости и абсолютного ускорения в случае равномерного и ускоренного относительного движения кулисного камня. Результаты работы могут быть использованы для разработки и совершенствования современных средств автоматизированного анализа и решения задач теории механизмов и машин.

Ключевые слова: кулисный механизм, кинематический анализ, кинематические характеристики механизмов

KINEMATIC ANALYSIS OF A ONE-DEGREE-OF-FREEDOM SLIDECRANK MECHANISM WITH FIXED TURNING KINEMATIC PAIRS

Smirnov D.A.

Nizhny Novgorod State Technical University
n.a. R. E. Alekseev, Nizhny Novgorod, e-mail: dmsmir@yandex.ru

A mathematical model for motion kinematics of a one-degree-of-freedom slidecrank mechanism with fixed turning pairs is developed. A mathematical analysis body is used to define dependences between motion characteristics of the pieces of the mechanism. Time dependences of kinematic characteristics of the mechanism pieces are defined. Time dependence diagrams for angular displacement, angular rate and angular acceleration at four different initial conditions are represented. Analytical formulae for absolute velocity and acceleration, and for their components at translational and relative motion, are obtained as well as for Coriolis acceleration. Based on the analysis of the calculation results, it is concluded that: the translational and the relative motions show cyclic nature, in case of a steady and uniformly accelerated motion of the crank; the absolute velocity and absolute acceleration increase unlimitedly in case of a steady and accelerated relative motion of a crank block. The results of the present research can be used for development and improvement of contemporary means of computer-aided analysis and solving issues of the theory of mechanisms and machines.

Keywords: slidecrank mechanism, kinematic analysis, and kinematic characteristics of mechanisms

В современных машинах применяется большое количество механизмов, которые могут быть приведены к кинематической схеме кулисного механизма [1, 5, 6]. В частности широкое применение в грузоподъемных и строительных машинах имеют механизмы с гидро- и пневмоцилиндрами. Исследование динамики таких машин является актуальной задачей. Первым этапом в таких исследованиях является кинематический анализ. В теории механизмов и машин используется несколько методов кинематического анализа. Наибольшее распространение получили метод векторных контуров, разработанный В.А. Зинovieвым [3], метод преобразования координат, развитый в работах Г.Ф. Морошкина [4], а также графические и аналитические методы кинематического анализа плоских механизмов [3, 5, 6].

Целью данной работы является развитие аналитических методов кинематического

анализа, а также определение зависимостей между кинематическими параметрами кулисного механизма с одной степенью свободы. В работе приводятся результаты решения частных задач при различных начальных условиях.

Материалы и методы исследования

Рассматривается кулисный механизм (рис. 1) с одной степенью свободы, образованный замкнутой кинематической цепью с тремя подвижными звеньями. Кривошип 1 и кулиса 2 образуют со стойкой неподвижные вращательные кинематические пары O_1 и O_2 .

Исходными данными для кинематического анализа являются длина кривошипа l и координаты неподвижных кинематических пар x_1, y_1 (пара O_1) и x_2, y_2 (пара O_2).

В качестве обобщенных координат рассматриваемой механической системы могут быть выбраны углы поворота кривошипа φ_1 и кулисы φ_2 , а также закон относительного движения кулисного камня S .

Связь между этими параметрами можно выразить уравнениями: где A и B определяются выражениями:

$$A = x_1 - x_2; \quad B = y_1 - y_2.$$

$$S \cos \varphi_2 - l \cos \varphi_1 = A; \quad (1)$$

$$S \sin \varphi_2 - l \sin \varphi_1 = B, \quad (2)$$

Рассмотрим случай, когда движение механизма задано законом вращения кривошипа, то есть известна зависимость обобщенной координаты φ_1 от времени t .

$$\varphi_1 = \varphi_1(t). \quad (3)$$

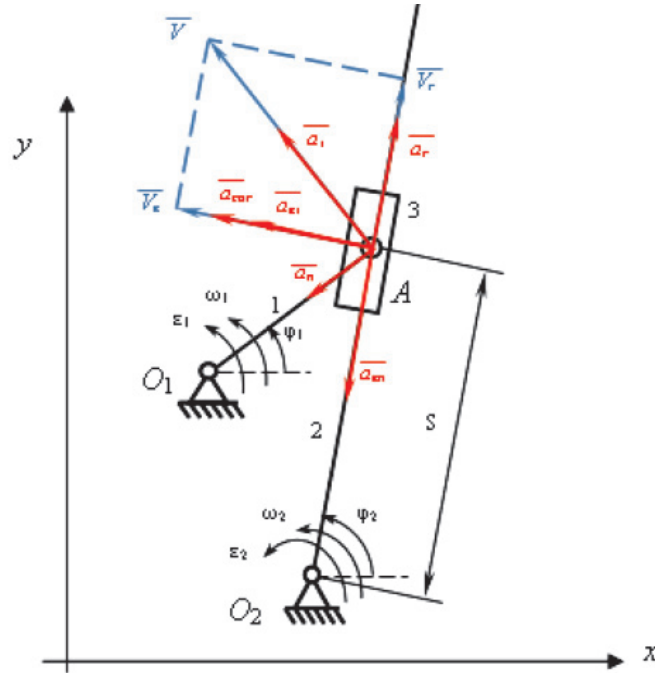


Рис. 1. Кинематическая схема механизма:
1 – кривошип; 2 – кулиса; 3 – кулисный камень

Выражая закон относительного движения кулисного камня S из уравнений (1) и (2), через обобщенную координату φ_1 , получим кинематическую зависимость

$$S = \sqrt{C + 2Dl \sin(\varphi_1 + \alpha)}, \quad (4)$$

где C , D и α определяются выражениями

$$C = A^2 + B^2 + l^2; \quad D = \sqrt{A^2 + B^2};$$

$$\alpha = \arctg \frac{A}{B}.$$

Параметр D – представляет собой расстояние между неподвижными кинематическими парами O_1 и O_2 .

Кинематическая зависимость между углом поворота кулисы и углом поворота кривошипа может определяться по одному из выражений

$$\varphi_2 = \arctg \left(\frac{B + l \sin \varphi_1}{A + l \cos \varphi_1} \right); \quad (5)$$

$$\varphi_2 = \arccos \left(\frac{A + l \cos \varphi_1}{S} \right); \quad (6)$$

$$\varphi_2 = \arcsin \left(\frac{B + l \sin \varphi_1}{S} \right). \quad (7)$$

Дифференцируя по времени выражения (4) и (5), получим зависимости для относительной скорости кулисного камня V_r и угловой скорости кулисы ω_2 :

$$V_r = \frac{dS}{dt} = \frac{Dl}{S} \cos(\varphi_1 + \alpha) \frac{d\varphi_1}{dt}; \quad (8)$$

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{l^2 + Dl \sin(\varphi_1 + \alpha)}{S^2} \frac{d\varphi_1}{dt}, \quad (9)$$

где $\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1$ – угловая скорость кривошипа.

Скорость кулисного камня в переносном движении V_e , а также его абсолютная скорость V_a (рис. 1) определяются выражениями:

$$V_e = \omega_2 S = \frac{l^2 + Dl \sin(\varphi_1 + \alpha)}{S} \frac{d\varphi_1}{dt}; \quad (10)$$

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{\left(\frac{Dl}{S} \cos(\varphi_1 + \alpha) \frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{l^2 + Dl \sin(\varphi_1 + \alpha)}{S} \frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2} = \frac{d\varphi_1}{dt} l = \omega_1 l. \quad (11)$$

Дифференцируя по времени выражения (8) и (9), получим зависимости для относительного ускорения кулисного камня a_r и углового ускорения кулисы ε_2 :

$$a_r = \frac{dV_r}{dt} = E_1 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} - F_1 \left(\frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2; \quad (12)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = G_1 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + H_1 \left(\frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 - K_1 \frac{d\varphi_1}{dt} \frac{dS}{dt}, \quad (13)$$

где $\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = \varepsilon_1$ – угловое ускорение кривошипа, а переменные E_1, F_1, G_1, H_1 и K_1 определяются выражениями:

$$E_1 = \frac{Dl}{S} \cos(\varphi_1 + \alpha);$$

$$F_1 = \frac{(Dl)^2}{S^3} \cos^2 \varphi (\varphi_1 + \alpha) + \frac{Dl}{S} \sin(\varphi_1 + \alpha);$$

$$G_1 = \frac{(l^2 + Dl \sin(\varphi_1 + \alpha))}{S^2};$$

$$H_1 = \frac{1}{S^2} Dl \cos(\varphi_1 + \alpha);$$

$$K_1 = \frac{2}{S^3} (l^2 + Dl \sin(\varphi_1 + \alpha)).$$

Нормальная a_e^n и касательная a_e^τ составляющие ускорения кулисного камня в переносном движении, а также ускорение Кориолиса a_{cor} (рис. 1) определяются выражениями:

$$a_e^n = \omega_2^2 S = \left(\frac{l^2 + Dl \sin(\varphi_1 + \alpha)}{S^2} \frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 S; \quad (14)$$

$$a_e^\tau = \varepsilon_2 S = \left(G_1 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + H_1 \left(\frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 - K_1 \frac{d\varphi_1}{dt} \frac{dS}{dt} \right) S; \quad (15)$$

$$a_{cor} = 2\omega_2 V_r = \frac{2Dl(l^2 + Dl \sin(\varphi_1 + \alpha))}{S^3} \cos(\varphi_1 + \alpha) \left(\frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2. \quad (16)$$

Рассмотрим случай, когда движение механизма задано законом относительного движения кулисного камня, то есть известна зависимость обобщенной координаты S от времени t

$$S = S(t). \quad (17)$$

К этому случаю сводится большинство задач о движении механизмов с гидро- и пневмоцилиндрами. Кинематическая зависимость угла поворота кривошипа φ_1 от расстояния S может быть выражена из уравнений (1) и (2)

$$\varphi_1 = \arcsin \left(\frac{S^2 - D^2 - l^2}{2Dl} \right) - \alpha. \quad (18)$$

Для определения угла поворота кулисы φ_2 может использоваться кинематическая зависимость (5), где φ_1 определяется выражением (18).

Дифференцируя по времени выражения (18) и (5), получим зависимости для угловых скоростей кривошипа ω_1 и кулисы ω_2 :

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{S}{Dl} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{S^2 - D^2 - l^2}{2Dl} \right)^2}} \frac{dS}{dt}; \quad (19)$$

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{S^2 - D^2 + l^2}{2SDl \sqrt{1 - \left(\frac{S^2 - D^2 - l^2}{2Dl} \right)^2}} \frac{dS}{dt}, \quad (20)$$

где $\frac{dS}{dt} = V_r$ – относительная скорость кулисного камня.

Дифференцируя по времени выражения (19) и (20), получим зависимости для угловых ускорений кривошипа ε_1 и кулисы ε_2 :

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = E_2 \frac{d^2S}{dt^2} + F_2 \left(\frac{dS}{dt} \right)^2; \quad (21)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = G_2 \frac{d^2S}{dt^2} + H_2 \left(\frac{dS}{dt} \right)^2, \quad (22)$$

где $\frac{d^2S}{dt^2} = a_r$ – относительное ускорение кулисного камня, а переменные E_2, F_2, G_2, H_2 определяются выражениями:

$$E_2 = \frac{S}{\sqrt{D^2 l^2 - \frac{(S^2 - D^2 - l^2)^2}{4}}};$$

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{D^2 l^2 - \frac{(S^2 - D^2 - l^2)^2}{4}}} + \frac{S^2 (S^2 - D^2 - l^2)}{2 \sqrt{\left(D^2 l^2 - \frac{(S^2 - D^2 - l^2)^2}{4} \right)^3}};$$

$$G_2 = \frac{S^2 - D^2 + l^2}{2S\sqrt{D^2 l^2 - \frac{(S^2 - D^2 - l^2)^2}{4}}};$$

$$H_2 = \frac{S^2 + D^2 - l^2}{2S^2\sqrt{D^2 l^2 - \frac{(S^2 - D^2 - l^2)^2}{4}}} + \frac{(S^2 - D^2 + l^2)(S^2 - D^2 - l^2)}{4\sqrt{\left(D^2 l^2 - \frac{(S^2 - D^2 - l^2)^2}{4}\right)^3}}.$$

Нормальная a_e^n и касательная a_e^τ составляющие ускорения кулисного камня в переносном движении, а также ускорение Кориолиса a_{cor} для рассматриваемого случая, определяются выражениями:

$$a_e^n = \omega_2^2 S = \frac{(S^2 - D^2 + l^2)}{2SD^2 l^2 \left(1 - \left(\frac{S^2 - D^2 - l^2}{2Dl}\right)^2\right)} \left(\frac{dS}{dt}\right)^2; \quad (23)$$

$$a_e^\tau = \varepsilon_2 S = \left(G_2 \frac{d^2 S}{dt^2} + H_2 \left(\frac{dS}{dt}\right)^2\right) S; \quad (24)$$

$$a_{cor} = 2\omega_2 V_r = \frac{S^2 - D^2 + l^2}{SDl\sqrt{1 - \left(\frac{S^2 - D^2 - l^2}{2Dl}\right)^2}} \left(\frac{dS}{dt}\right)^2. \quad (25)$$

Нормальное a_n и касательное a_τ ускорения кулисного камня, а также его полное ускорение a (рис. 1), определяются выражениями:

$$a_n = \omega_1^2 l = \frac{S}{D\sqrt{1 - \left(\frac{S^2 - D^2 - l^2}{2Dl}\right)^2}} \frac{dS}{dt}; \quad (26)$$

$$a_\tau = \varepsilon_1 l = \left(E_2 \frac{d^2 S}{dt^2} + F_2 \left(\frac{dS}{dt}\right)^2\right) l; \quad (27)$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\frac{S^2}{D^2 \left(1 - \left(\frac{S^2 - D^2 - l^2}{2Dl}\right)^2\right)} \left(\frac{dS}{dt}\right)^2 + \left(E_2 \frac{d^2 S}{dt^2} + F_2 \left(\frac{dS}{dt}\right)^2\right)^2 l^2}. \quad (28)$$

Полученные зависимости для кинематических характеристик являются общими для различных законов вращения кривошипа и относительного движения кулисного камня.

Результаты исследования и их обсуждение

На рис. 2, *а* представлены зависимости кинематических характеристик механизма от времени в случае равномерного вращения кривошипа с угловой скоростью ω_1 ,

равной 1 рад/с, а на рис. 2, *б* в случае равноускоренного вращения кривошипа с угловым ускорением ε_1 , равным 0,1 рад/с².

На рис. 3, *а* представлены зависимости кинематических характеристик механизма от времени в случае равномерного относительного движения кулисного камня со скоростью V_r , равной 0,00664 м/с, а на рис. 3, *б* в случае равноускоренного относительного движения кулисного камня с ускорением a_r , равным 0,001 м/с².

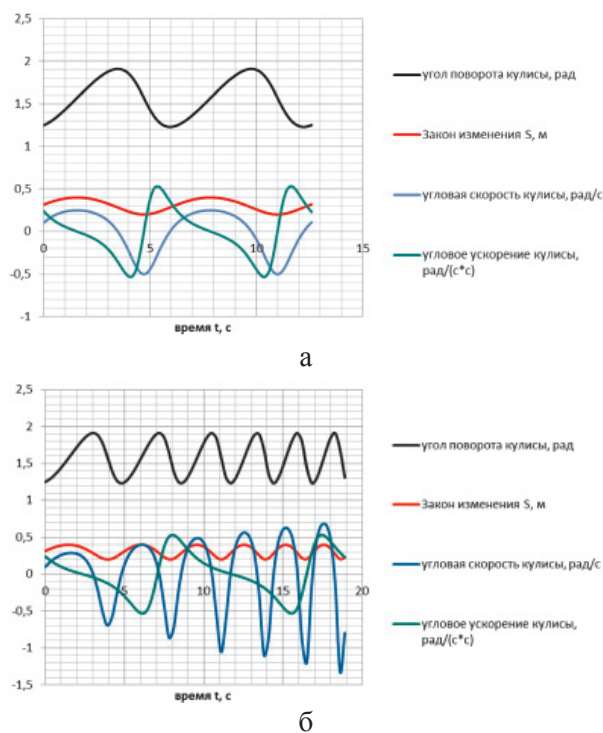


Рис. 2. Кинематические характеристики механизма:
 а – кинематические характеристики при равномерном вращении кривошипа;
 б – кинематические характеристики при равноускоренном вращении кривошипа

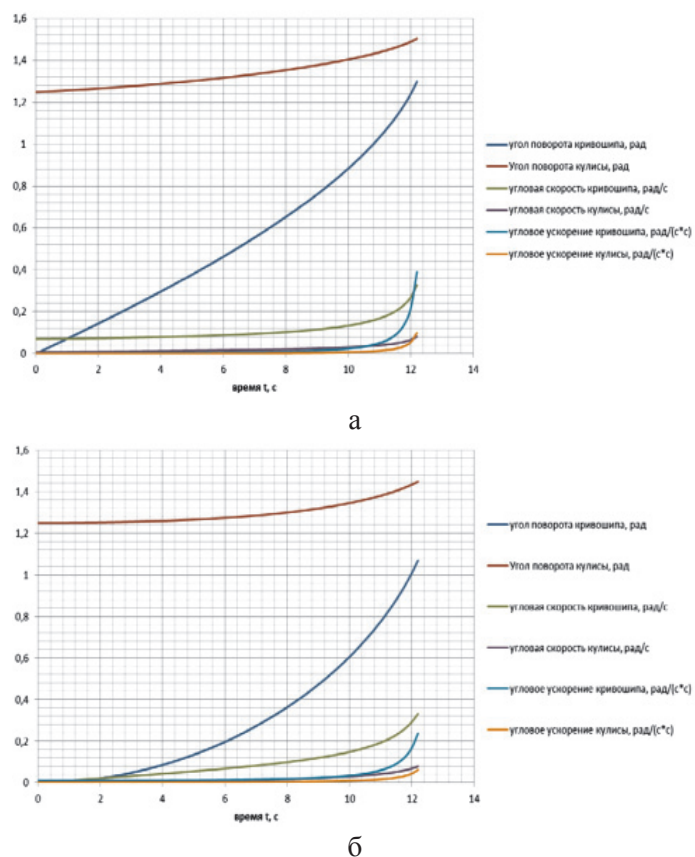


Рис. 3. Зависимость углов поворота стержней от времени:
 а – кинематические характеристики при равномерном относительном движении кулисного камня;
 б – кинематические характеристики при равноускоренном относительном движении кулисного камня

Представленные зависимости получены при следующих исходных данных и начальных условиях:

$$x_{O_1} = x_{O_2} = y_{O_2} = 0; \quad y_{O_1} = 0,3 \text{ (м)};$$

$$l = 0,1 \text{ (м)}; \quad t_0 = 0; \quad \varphi_1(t_0) = 0.$$

Заключение

Анализ зависимостей кинематических характеристик от времени (рис. 2), полученных для случая задания движения механизма законом вращения кривошипа, показывает, что кинематические характеристики кулисы (φ_2 , ω_2 , ε_2), а также кинематические характеристики кулисного камня (S , V_r , a_r) носят периодический характер.

В случаях равномерного и равноускоренного движения кулисного камня, анализ зависимостей кинематических характеристик от времени (рис. 3) показывает, что угловые скорости кривошипа ω_1 и кулисы ω_2 , а также угловые ускорения кривошипа ε_1 и кулисы ε_2 неограниченно возрастают при $\varphi_1 = \varphi_2$.

Результаты работы могут быть использованы для разработки математических моделей движения кулисных механизмов и разработки алгоритмов автоматизации соответствующих расчетов.

Список литературы

1. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1988. – 640 с.
2. Зиновьев В.А. Теория механизмов и машин. – М.: Машгиз, 1959. – 144 с.
3. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин / А.Б. Ваганов, И.В. Воробьева, А.Н. Гушин и др. – Н. Новгород. НГТУ им. Р.Е. Алексеева, 2009. – 168 с.

4. Морошкин Г.Ф. Уравнения динамики простых систем с интегрируемыми связями. – М.: Наука, 1981. – 116 с.

5. Смирнов Д.А. Анализ кинематических характеристик кулисного механизма: Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. – Т. 78, № 5. – Н. Новгород, 2013. – С. 135–141.

6. Тимофеев Г.А., Кузенков В.В., Самойлова М.В. Теория механизмов и машин. Курсовое проектирование. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 169 с.

References

1. Artobolevskiy I.I. Theory of Mechanisms and Machines. Moscow, Nauka, 1988. 640 p.
2. Zinovyev V.A. Theory of Mechanisms and Machines. Moscow, Mashgiz, 1959. 144 p.
3. Vaganov A.B., Vorobyeva I.V., Gushin A. N. and others. Course Design Works on the Theory of Mechanisms and Machines. Nizhny Novgorod, NGTU n. a. R.E. Alekseev, 2009. 168 p.
4. Moroshkin G.F. Equations of Dynamics of Simple Systems with Integrable Constraints. Moscow, Nauka, 1981. 116 p.
5. Smirnov D.A. Analysis of the kinematic characteristics of rocker mechanism. Nizhny Novgorod, Works of NGTU n.a. R.E. Alekseev, T. 78, no. 5, 2013. 135–141 p.
6. Timofeev G.A., Kuzenkov V.V., Samoylova M.V. Theory of Mechanisms and Machines. Course Design Works. Moscow, MGТУ n. a. N. E. Bauman Publishing House, 2012. 169 p.

Рецензенты:

Панов А.Ю., д.т.н., заведующий кафедрой «Теоретическая и прикладная механика», ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева», г. Нижний Новгород;

Ваганов А.Б., д.т.н., профессор кафедры «Аэрогидродинамика, прочность машин и сопротивление материалов», ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева», г. Нижний Новгород.

Работа поступила в редакцию 02.06.2014.