УДК 51-71:541.13

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МОДЕЛИ ЗОМ ТЕРНАРНОГО ЭЛЕКТРОЛИТА

[1]Хромых А.А., [2]Коваленко А.В., [2]Уртенов М.Х.

[1]ФГКОУ ВПО «Краснодарский университет МВД России», Краснодар, e-mail: AnnXA@mail.ru;
[2]ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный университет», Краснодар,
e-mail: Savanna-05@mail.ru, Urtenovmax@mail.ru

В статье изложено асимптотическое решение двумерной краевой задачи, соответствующей модели переноса тернарного электролита в электромембранных системах в приближении обобщенного закона Ома (ЗОМ). Основной идеей является разбиение исходной области на несколько подобластей: электронейтральности, пространственного заряда, промежуточную, в каждой из них асимптотическое разложение имеет свой вид. В области пространственного заряда для однозначной разрешимости текущего приближения используется условие разрешимости следующего приближения. Границы областей определяются по ходу решения. В случае, когда в качестве электромембранной системы рассматривается канал обессоливания электродиализного аппарата, то область пространственного заряда примыкает к ионообменным мембранам, область электронейтральности расположена в ядре потока, а промежуточная область находится между ними.

Ключевые слова: электромембранные системы, математическое моделирование, асимптотические методы, численные методы, тернарный электролит, система уравнений Нернста – Планка – Пуассона, область электронейтральности, область пространственного заряда

ASYMPTOTIC SOLUTION OF A BOUNDARY PROBLEM OF THE MODEL OF OHM'S LAW TERNARY ELECTROLYTE

[1]Khromyh A.A., [2]Kovalenko A.V., [2]Urtenov M.K.

[1]FGKOU VPO «Ministry of Internal Affairs Krasnodar University of Russia»,
Krasnodar, e-mail: AnnXA@mail.ru;
[2]FGBOU VPO «Kuban State University», Krasnodar,
e-mail: Savanna-05@mail.ru, Urtenovmax@mail.ru

The article describes the asymptotic solution of two-dimensional boundary value problem, corresponding to the models of transfer of ternary electrolyte in electromembrane systems in the approximation of the generalized Ohm's law. The main idea is to split the original region into several sub-regions: electroneutrality, space charge and intermediate. In each of the sub-regions, asymptotic expansion has its own type. In the area of the space charge for the one-valued solvability of the current approximation, it is used the condition of solvability of the next approximation. The borders of the regions ere determined in the process of solving. In case electromembrane systems are regarded as the channel of desalination of electrodialysis apparatus, the area of the space charge is adjacent to the ion-exchange membranes. The area of electroneutrality is located in the core of the flow. The intermediate area is located between them.

Keywords: electromembrane systems, mathematical modeling, asymptotic methods, numerical methods, ternary electrolyte, the system of Nernst-Planck-Poisson equations, the area of electroneutrality, the area of space charge

Электромембранные системы широко используются для обессоливания растворов, для извлечения определенных типов ионов, для создания микро- и нанокинетических устройств [1]. Для повышения эффективности этих процессов и устройств используются математические модели. В настоящее время для математического моделирования процессов переноса в электромембранных системах используется система уравнений Нернста – Планка и Пуассона [2]. Однако эта система уравнений неудобна для численного и асимптотического решения. В работах [3, 4] нами была предложена новая математическая модель переноса тернарного электролита на основе разработанного нами метода декомпозиции системы уравнений Нернста – Планка и Пуассона и обоснована ее адекватность. В данной статье предлагается асимптотическое решение двумерной краевой задачи, соответствующей модели переноса тернарного электролита в приближении обобщенного закона Ома. Основная идея решения заключается в разбиении области решения, например канала обессоливания электродиализного аппарата, на несколько областей: область электронейтральности, область пространственного заряда, промежуточная область. Особенностью предлагаемого асимптотического метода является то, что в области пространственного заряда для однозначной разрешимости уравнений для текущего приближения необходимо использовать условие разрешимости уравнений для следующего приближения. Границы областей электронейтральности и пространственного заряда определяются по ходу решения. Однако для канала обессоливания можно указать, что область электронейтральности расположена в ядре потока, а область пространственного слоя примыкает к границам ионообменная мембрана/раствор (рисунок).

Постановка задачи

Система декомпозиционных уравнений в приближении закона Ома тернарного электролита имеет безразмерный вид [5]:

$$\frac{\partial \tilde{S}_0}{\partial t} = m_{01}\lambda\Delta\tilde{S}_0 + m_{02}\lambda div\left(\tilde{S}_0\vec{E}\right) - div\left(\tilde{S}_0\vec{V}\right) + \lambda m_{03}\Delta\tilde{S}_1 + \lambda m_{04}div\left(\tilde{S}_1\vec{E}\right) + \\ +\lambda m_{05}\varepsilon div\left(\left\|\vec{E}\right\|^2\vec{E}\right) - m_{06}\varepsilon div\left(\left\|\vec{E}\right\|^2\vec{V}\right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial t} = m_{11}\lambda\Delta\tilde{S}_1 + m_{12}\lambda div\left(\tilde{S}_1\vec{E}\right) - div\left(\tilde{S}_1\vec{V}\right) + m_{13}\lambda\Delta\tilde{S}_0 + \\ +m_{14}\lambda div\left(\tilde{S}_0\vec{E}\right) + m_{15}\varepsilon div\left(\left\|\vec{E}\right\|^2\vec{V}\right); \quad (2)$$

$$\tilde{S}_0\vec{E} + m_{06}\varepsilon\left\|\vec{E}\right\|^2\vec{E} - \vec{I} = 0; \quad (3)$$

$$\Delta\eta = \lambda\left(\nabla\left(\tilde{S}_0 + m_{06}\varepsilon\left\|\vec{E}\right\|^2\right), \vec{E}\right)_1, \quad (4)$$

где $\vec{E}$ – искомая напряженность; $\tilde{S}_i$ – обобщенные суммарные концентрации ионов; $\vec{I}$ – плотность тока; η – функция тока для плотности тока $\vec{I}$, т.е. $I_1 = -\eta_y$, $I_2 = -\eta_x$; $\varepsilon > 0$ – безразмерный малый параметр, равный удвоенному квадрату отношения Дебаевской длины к ширине канала; $\lambda = 1/\text{Pe}$, Pe – число Пекле; $\vec{V}$ – заданная скорость протока электролита в камере обессоливания; L – длина канала, $m_{i,j}$ – некоторые постоянные зависящие от зарядовых чисел ионов z_i и коэффициентов диффузии ионов D_i, $(\vec{a}, \vec{b})_1 = a_1b_2 - a_2b_1$ – кососимметрическое скалярное произведение.

Для рассматриваемой системы уравнений (1)–(4) можно поставить различные краевые условия в зависимости от цели конкретного исследования. Мы здесь ограничимся формальным асимптотическим решением без конкретизации краевых условий.

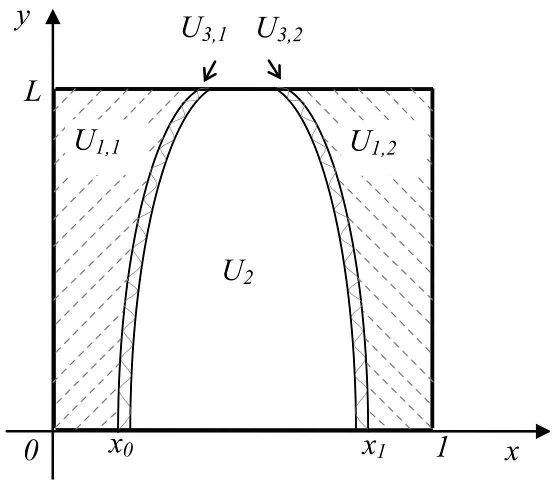

Схема разбиения области решения $U = \{(x, y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le L\}$ на подобласти по знаку функции $\tilde{S}_0$: $\tilde{S}_0(t, x, y) < 0$, при $(x, y) \in U_1 = U_{1,1} \cup U_{1,2}$ для любого $t \ge 0$ (область пространственного заряда, примыкающая к ионообменным мембранам); $\tilde{S}_0(t, x, y) > 0$, при $(x, y) \in U_2$ (область электронейтральности, расположенная в ядре потока); $U_3 = U_{3,1} \cup U_{3,2}$ – промежуточный слой ($\tilde{S}_0(t, x, y) \approx 0$). Здесь x = 0 – соответствует анионообменной, x = 1,– катионообменной x = 1 мембранам, y = 0, – входу, а y = L – выходу из канала обессоливания

Асимптотическое решение в области электронейтральности

Асимптотическое разложение

Для нахождения решения в области U_2 используем разложение:

$$\vec{E} = \vec{E}^{(0)} + \vec{E}^{(1)}\varepsilon + \vec{E}^{(2)}\varepsilon^2 + \ldots + \vec{E}^{(i)}\varepsilon^i + \ldots;$$

$$\eta = \eta^{(0)} + \eta^{(1)}\varepsilon + \eta^{(2)}\varepsilon^2 + \ldots + \eta^{(i)}\varepsilon^i + \ldots;$$

$$\tilde{S}_0 = \tilde{S}_0^{(0)} + \tilde{S}_0^{(1)}\varepsilon + \tilde{S}_0^{(2)}\varepsilon^2 + \ldots + \tilde{S}_0^{(i)}\varepsilon^i + \ldots;$$

$$\tilde{S}_1 = \tilde{S}_1^{(0)} + \tilde{S}_1^{(1)}\varepsilon + \tilde{S}_1^{(2)}\varepsilon^2 + \ldots + \tilde{S}_1^{(i)}\varepsilon^i + \ldots$$

Ниже приведены уравнения для начального приближения и показан алгоритм их решения. Уравнения произвольного приближения выписываются и решаются аналогично и здесь не приводятся из-за их громоздкости.

Алгоритм решения начального приближения

Для начального приближения получается следующая система уравнений:

$$\frac{\partial \tilde{S}_0^{(0)}}{\partial t} = m_{01}\lambda\Delta\tilde{S}_0^{(0)} + m_{02}\lambda div\left(\tilde{S}_0^{(0)}\vec{E}^{(0)}\right) - \\ -div\left(\tilde{S}_0^{(0)}\vec{V}\right) + \lambda m_{03}\Delta\tilde{S}_1^{(0)} + \lambda m_{04} div\left(\tilde{S}_1^{(0)}\vec{E}^{(0)}\right); \quad (5)$$

$$\frac{\partial \tilde{S}_1^{(0)}}{\partial t} = m_{11}\lambda\Delta\tilde{S}_1^{(0)} + m_{12}\lambda div\left(\tilde{S}_1^{(0)}\vec{E}^{(0)}\right) - \\ -div\left(\tilde{S}_1^{(0)}\vec{V}\right) + m_{13}\lambda\Delta\tilde{S}_0^{(0)} + m_{14}\lambda div\left(\tilde{S}_0^{(0)}\vec{E}^{(0)}\right); \quad (6)$$

$$\tilde{S}_0^{(0)}\vec{E}^{(0)} - \vec{I}^{(0)} = 0; \quad (7)$$

$$\Delta\eta^{(0)} = \lambda\left(\nabla\tilde{S}_0^{(0)}, \vec{E}^{(0)}\right)_1. \quad (8)$$

После ряда преобразований получаем систему уравнений для начального приближения:

$$\frac{\partial \tilde{S}_0^{(0)}}{\partial t} = m_{01}\lambda\Delta\tilde{S}_0^{(0)} - div\left(\tilde{S}_0^{(0)}\vec{V}\right) + \lambda m_{03}\Delta\tilde{S}_1^{(0)} + \lambda m_{04} div\left(\tilde{S}_1^{(0)}\vec{E}^{(0)}\right); \quad (9)$$

$$\frac{\partial \tilde{S}_1^{(0)}}{\partial t} = m_{11}\lambda\Delta\tilde{S}_1^{(0)} + m_{12}\lambda div\left(\tilde{S}_1^{(0)}\vec{E}^{(0)}\right) - div\left(\tilde{S}_1^{(0)}\vec{V}\right) + m_{13}\lambda\Delta\tilde{S}_0^{(0)}; \quad (10)$$

$$\Delta\eta^{(0)} = \lambda\frac{1}{\tilde{S}^{(0)}}\left(\nabla\tilde{S}^{(0)}, \nabla\eta^{(0)}\right); \quad (11)$$

$$\vec{E}^{(0)} = \frac{1}{\tilde{S}_0^{(0)}}\vec{I}^{(0)}. \quad (12)$$

Заметим, что (9)–(12) является системой нестационарных квазилинейных уравнений второго порядка в каноническом виде и поэтому их исследование и решения возможны с использованием стандартных методов математической физики.

Асимптотическое решение в области пространственного заряда

Асимптотическое разложение

Для удобства асимптотического разложения в системе декомпозиционных уравнений (1)–(4) сделаем замену $\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\tilde{E}$,, тогда система примет вид

$$\sqrt{\varepsilon}\frac{\partial \tilde{S}_0}{\partial t} = \sqrt{\varepsilon}m_{01}\lambda\Delta\tilde{S}_0 + m_{02}\lambda div\left(\tilde{S}_0\tilde{E}\right) - \sqrt{\varepsilon}div\left(\tilde{S}_0\vec{V}\right) + \sqrt{\varepsilon}\lambda m_{03}\Delta\tilde{S}_1 + \\ +\lambda m_{04} div\left(\tilde{S}_1\tilde{E}\right) + \lambda m_{05} div\left(\left\|\tilde{E}\right\|^2\tilde{E}\right) - \sqrt{\varepsilon}m_{06} div\left(\left\|\tilde{E}\right\|^2\vec{V}\right); \quad (13)$$

$$\sqrt{\varepsilon}\frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial t} = \sqrt{\varepsilon}m_{11}\lambda\Delta\tilde{S}_1 + m_{12}\lambda div\left(\tilde{S}_1\tilde{E}\right) - \sqrt{\varepsilon}div\left(\tilde{S}_1\vec{V}\right) + \sqrt{\varepsilon}m_{13}\lambda\Delta\tilde{S}_0 + \\ +m_{14}\lambda div\left(\tilde{S}_0\tilde{E}\right) + \sqrt{\varepsilon}m_{15} div\left(\left\|\tilde{E}\right\|^2\vec{V}\right); \quad (14)$$

$$\tilde{S}_0\tilde{E} + m_{06}\left\|\tilde{E}\right\|^2\tilde{E} - \sqrt{\varepsilon}\vec{I} = 0; \quad (15)$$

$$\sqrt{\varepsilon}\Delta\eta = \lambda\left(\nabla\left(\tilde{S}_0 + m_{06}\left\|\tilde{E}\right\|^2\right)\tilde{E}\right)_1. \quad (16)$$

Для асимптотического решения используем разложения искомых функций в ряд по дробным степеням малого параметра ε:

$$\tilde{S}_0 = \tilde{S}_0^{(0)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\tilde{S}_0^{(1)} + \varepsilon\tilde{S}_0^{(2)} + \ldots + \varepsilon^{\frac{i}{2}}\tilde{S}_0^{(i)} + \ldots; \quad (17)$$

$$\tilde{S}_1 = \tilde{S}_1^{(0)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\tilde{S}_1^{(1)} + \varepsilon\tilde{S}_1^{(2)} + \ldots + \varepsilon^{\frac{i}{2}}\tilde{S}_1^{(i)} + \ldots; \quad (18)$$

$$\tilde{E} = \tilde{E}^{(0)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \tilde{E}^{(1)} + \varepsilon \tilde{E}^{(2)} + \ldots + \varepsilon^{\frac{i}{2}} \tilde{E}^{(i)} + \ldots; \qquad (19)$$

$$\eta = \eta^{(0)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \eta^{(1)} + \varepsilon \eta^{(2)} + \ldots + \varepsilon^{\frac{i}{2}} \eta^{(i)} + \ldots \qquad (20)$$

Ниже будет показано, что для нахождения начального приближения необходимо использовать уравнения для следующего приближения, поэтому необходимо записать системы уравнений для первых двух приближений.

Алгоритм решения начального приближения

Система уравнений, полученная подстановкой (17)–(20) в (13)–(16) и приравниванием слагаемых, не содержащих малого параметра, имеет вид

$$0 = m_{02}\lambda div\left(\tilde{S}_0^{(0)}\tilde{E}^{(0)}\right) + \lambda m_{04} div\left(\tilde{S}_1^{(0)}\tilde{E}^{(0)}\right) + \lambda m_{05} div\left(\left\|\tilde{E}^{(0)}\right\|^2 \tilde{E}^{(0)}\right); \qquad (21)$$

$$0 = m_{12}\lambda div\left(\tilde{S}_1^{(0)}\tilde{E}^{(0)}\right) + m_{14}\lambda div\left(\tilde{S}_0^{(0)}\tilde{E}^{(0)}\right); \qquad (22)$$

$$\tilde{S}_0^{(0)}\tilde{E}^{(0)} + m_{06}\left\|\tilde{E}^{(0)}\right\|^2 \tilde{E}^{(0)} = 0; \qquad (23)$$

$$0 = \left(\nabla\left(\tilde{S}_0^{(0)} + m_{06}\left\|\tilde{E}^{(0)}\right\|^2\right), \tilde{E}^{(0)}\right)_1. \qquad (24)$$

Ниже будет показано, что этой системы уравнений недостаточно для нахождения начального приближения. Для этого потребуется еще система уравнений приравниванием слагаемых при $\sqrt{\varepsilon}$, которая имеет вид

$$\frac{\partial \tilde{S}_0^{(0)}}{\partial t} = m_{01}\lambda\Delta\tilde{S}_0^{(0)} + m_{02}\lambda div\left(\tilde{S}_0^{(0)}\tilde{E}^{(1)} + \tilde{S}_0^{(1)}\tilde{E}^{(0)}\right) -$$
$$- div\left(\tilde{S}_0^{(0)}\vec{V}\right) + \lambda m_{03}\Delta\tilde{S}_1^{(0)} + \lambda m_{04} div\left(\tilde{S}_1^{(0)}\tilde{E}^{(1)} + \tilde{S}_1^{(1)}\tilde{E}^{(0)}\right) + \qquad (25)$$
$$+ \lambda m_{05} div\left(\left\|\tilde{E}^{(0)}\right\|^2 \tilde{E}^{(1)} + 2\left(\tilde{E}^{(0)}, \tilde{E}^{(1)}\right)\tilde{E}^{(0)}\right) - m_{06} div\left(\left\|\tilde{E}^{(0)}\right\|^2 \vec{V}\right);$$

$$\frac{\partial \tilde{S}_1^{(0)}}{\partial t} = m_{11}\lambda\Delta\tilde{S}_1^{(0)} + m_{12}\lambda div\left(\tilde{S}_1^{(0)}\tilde{E}^{(1)} + \tilde{S}_1^{(1)}\tilde{E}^{(0)}\right) - div\left(\tilde{S}_1^{(0)}\vec{V}\right) +$$
$$+ m_{13}\lambda\Delta\tilde{S}_0^{(0)} + m_{14}\lambda div\left(\tilde{S}_0^{(0)}\tilde{E}^{(1)} + \tilde{S}_0^{(1)}\tilde{E}^{(0)}\right) + m_{15} div\left(\left\|\tilde{E}^{(0)}\right\|^2 \vec{V}\right); \qquad (26)$$

$$\tilde{S}_0^{(0)}\tilde{E}^{(1)} + \tilde{S}_0^{(1)}\tilde{E}^{(0)} + m_{06}\left(\left\|\tilde{E}^{(0)}\right\|^2 \tilde{E}^{(1)} + 2\left(\tilde{E}^{(0)}, \tilde{E}^{(1)}\right)\tilde{E}^{(0)}\right) = \vec{I}^{(0)}; \qquad (27)$$

$$\Delta\eta^{(0)} = \lambda\left(\nabla\left(\tilde{S}_0^{(0)} + m_{06}\left\|\tilde{E}^{(0)}\right\|^2\right), \tilde{E}^{(1)}\right)_1 +$$
$$+ \lambda\left(\nabla\left(\tilde{S}_0^{(1)} + m_{06} 2\left(\tilde{E}^{(1)}, \tilde{E}^{(0)}\right)\right), \tilde{E}^{(0)}\right)_1. \qquad (28)$$

1. Рассмотрим уравнения (21), (22) для функций $\tilde{S}_0$ и $\tilde{S}_1$:

$$div\left(m_{02}\tilde{S}_0^{(0)}\tilde{E}^{(0)} + m_{04}\tilde{S}_1^{(0)}\tilde{E}^{(0)} + m_{05}\left\|\tilde{E}^{(0)}\right\|^2 \tilde{E}^{(0)}\right) = 0;$$

$$div\left(m_{14}\tilde{S}_0^{(0)}\tilde{E}^{(0)} + m_{12}\tilde{S}_1^{(0)}\tilde{E}^{(0)}\right) = 0.$$

Из этих уравнений, после ряда преобразований с учетом $\frac{m_{05}\, m_{12}}{\left(m_{02}m_{12} - m_{04}m_{14}\right)} = m_{06}$, получаем:

$$div\left(\left(\tilde{S}_0^{(0)} + m_{06}\left\|\tilde{E}^{(0)}\right\|^2\right)\tilde{E}^{(0)}\right) = 0;$$

$$div\left(m_{12}\tilde{S}_1^{(0)}\tilde{E}^{(0)} - m_{14}\tilde{S}_0^{(0)}\tilde{E}^{(0)}\right) = 0. \qquad (29)$$

С учетом уравнения (23) первое уравнение является тождеством.

Следовательно, система уравнений (21)–(24) не позволяет однозначно найти решение для начального приближения системы.

Из уравнения (23) для функции $\vec{E}^{(0)}$ получаем уравнение, имеющее физический смысл:

$$\tilde{S}_0^{(0)} + m_{06}\left\|\tilde{E}^{(0)}\right\|^2 = 0. \qquad (30)$$

Уравнение (30) не позволяет однозначно определить нулевое приближение для функции $\vec{E}^{(0)}$, поэтому необходимо еще одно скалярное уравнение, которое получается из условия разрешимости следующего приближения.

Из уравнения (27) для функции $\tilde{E}^{(1)}$ с учетом уравнения (23) имеем

$$\left(\tilde{S}_0^{(1)} + 2m_{06}\left(\tilde{E}^{(0)}, \tilde{E}^{(1)}\right)\right)\tilde{E}^{(0)} = \vec{I}^{(0)}. \qquad (31)$$

Это уравнение можно записать в виде

$$A\,\tilde{E}^{(1)} = \frac{1}{2m_{06}}\vec{I}^{(0)} - \frac{1}{2m_{06}}\tilde{S}_0^{(1)}\tilde{E}^{(0)}, \qquad (32)$$

где $A = \begin{pmatrix} \tilde{E}_1^{(0)}\tilde{E}_1^{(0)} & \tilde{E}_1^{(0)}\tilde{E}_2^{(0)} \\ \tilde{E}_1^{(0)}\tilde{E}_2^{(0)} & \tilde{E}_2^{(0)}\tilde{E}_2^{(0)} \end{pmatrix}$, причем $\det A = 0$.

Условие разрешимости (32) имеет вид

$$\left(\frac{1}{2m_{06}}\vec{I}^{(0)} - \frac{1}{2m_{06}}\tilde{S}_0^{(1)}\tilde{E}^{(0)}\right) \perp Ker\,A$$

или, с учетом $\left(\tilde{E}^{(0)}, \tilde{E}^{(0)}\right)_1 = 0$, получаем следующее условие разрешимости:

$$\left(\vec{I}^{(0)}, \tilde{E}^{(0)}\right)_1 = 0. \qquad (33)$$

Итак, для $\tilde{E}^{(0)}$ имеем систему, состоящую из уравнений (30) и (33), откуда

$$\tilde{E}^{(0)} = \frac{1}{\left\|\vec{I}^{(0)}\right\|}\sqrt{-\frac{\tilde{S}_0^{(0)}}{m_{06}}}\,\vec{I}^{(0)}. \qquad (34)$$

Из уравнения (28) для функции $\eta^{(0)}$ с учетом (23), имеем

$$\Delta\eta^{(0)} = \lambda\left(\nabla\left(\tilde{S}_0^{(1)} + 2m_{06}\left(\tilde{E}^{(1)}, \tilde{E}^{(0)}\right)\right), \tilde{E}^{(0)}\right)_1. \qquad (35)$$

В правой части этого уравнения избавляемся от функций $\tilde{S}_0^{(1)}$ и $\tilde{E}^{(1)}$ и получаем

$$\Delta\eta^{(0)} = \lambda\left(\nabla\left(\frac{1}{\left\|\tilde{E}^{(0)}\right\|^2}\left(\vec{I}^{(0)}, \tilde{E}^{(0)}\right)\right), \tilde{E}^{(0)}\right)_1 \qquad (36)$$

или с учетом (34), имеем

$$\Delta\eta^{(0)} = \lambda\frac{1}{\left\|\vec{I}^{(0)}\right\|}\sqrt{-\frac{\tilde{S}_0^{(0)}}{m_{06}}}\left(\nabla\left(\sqrt{-\frac{m_{06}}{\tilde{S}_0^{(0)}}}\left\|\vec{I}^{(0)}\right\|\right), \nabla\eta^{(0)}\right). \qquad (37)$$

Рассмотрим уравнения (25), (26) и выведем из них еще одно уравнение для функций $\tilde{S}_0^{(0)}$ и $\tilde{S}_1^{(0)}$. В уравнении (26) избавимся от слагаемого $div\left(\tilde{S}_1^{(1)}\tilde{E}^{(0)}\right)$. После ряда преобразований получим

$$\frac{\partial\tilde{S}_2^{(0)}}{\partial t} = \frac{m_{04}\left(m_{01}m_{12} - m_{04}m_{13}\right) + m_{12}\left(m_{03}m_{12} - m_{04}m_{11}\right)}{m_{04}}\lambda\Delta\tilde{S}_0^{(0)} -$$

$$-\frac{m_{03}m_{12} - m_{04}m_{11}}{m_{04}}\lambda\Delta\tilde{S}_2^{(0)} - div\left(\tilde{S}_2^{(0)}\vec{V}\right) + \frac{m_{06}m_{12} + m_{04}m_{15}}{m_{06}}div\left(\tilde{S}_0^{(0)}\vec{V}\right),$$

где

$$\tilde{S}_2^{(0)} = m_{12}\tilde{S}_0^{(0)} - m_{04}\tilde{S}_1^{(0)}. \qquad (38)$$

Уравнение (25) для функции $\tilde{S}_0^{(0)}$ с учетом (46) запишется в виде

$$div\left(\left(\tilde{S}_0^{(0)} - \frac{m_{12}}{\left(m_{12}m_{12} - m_{04}m_{14}\right)}\tilde{S}_2^{(0)}\right)\tilde{E}^{(0)}\right) = 0. \qquad (39)$$

Таким образом, для нахождения начального приближения имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \tilde{S}_2^{(0)}}{\partial t} = \frac{m_{04}\left(m_{01}m_{12} - m_{04}m_{13}\right) + m_{12}\left(m_{03}m_{12} - m_{04}m_{11}\right)}{m_{04}} \lambda \Delta \tilde{S}_0^{(0)} -$$

$$-\frac{m_{03}m_{12} - m_{04}m_{11}}{m_{04}} \lambda \Delta \tilde{S}_2^{(0)} - div\left(\tilde{S}_2^{(0)}\vec{V}\right) + \frac{m_{06}m_{12} + m_{04}m_{15}}{m_{06}} div\left(\tilde{S}_0^{(0)}\vec{V}\right);$$

$$div\left(\left(\tilde{S}_0^{(0)} - \frac{m_{12}}{\left(m_{12}m_{12} - m_{04}m_{14}\right)}\tilde{S}_2^{(0)}\right)\tilde{E}^{(0)}\right) = 0;$$

$$\tilde{E}^{(0)} = \frac{1}{\left\|\vec{I}^{(0)}\right\|}\sqrt{-\frac{\tilde{S}_0^{(0)}}{m_{06}}}\ \vec{I}^{(0)}; \quad \tilde{S}_2^{(0)} = m_{12}\tilde{S}_0^{(0)} - m_{04}\tilde{S}_1^{(0)};$$

$$\Delta\eta^{(0)} = \lambda \frac{1}{\left\|\vec{I}^{(0)}\right\|}\sqrt{-\frac{\tilde{S}_0^{(0)}}{m_{06}}}\left(\nabla\left(\sqrt{-\frac{m_{06}}{\tilde{S}_0^{(0)}}}\left\|\vec{I}^{(0)}\right\|\right), \nabla\eta^{(0)}\right).$$

Промежуточные слои

Из асимптотических решений, приведенных выше, следует, что они не могут быть справедливыми в некоторой области (промежуточном слое), где $-\delta(\varepsilon) \le \tilde{S}_0 \le \delta(\varepsilon)$, причем $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Для построения асимптотического разложения в этой области воспользуемся малостью функции $\tilde{S}_0$, тогда для нулевого приближения получим систему уравнений

$$\tilde{S}_0 \equiv 0;$$

$$\frac{\partial \tilde{S}_1^{(0)}}{\partial t} = m_{11}\lambda\Delta\tilde{S}_1^{(0)} + m_{12}\lambda div\left(\tilde{S}_1^{(0)}\vec{E}^{(0)}\right) - div\left(\tilde{S}_1^{(0)}\vec{V}\right) + m_{15}\varepsilon div\left(\left\|\vec{E}^{(0)}\right\|^2\vec{V}\right); \tag{40}$$

$$m_{06}\varepsilon\left\|\vec{E}^{(0)}\right\|^2\vec{E}^{(0)} - \vec{I}^{(0)} = 0; \tag{41}$$

$$\Delta\eta^{(0)} = \lambda m_{06}\varepsilon\left(\nabla\left\|\vec{E}^{(0)}\right\|^2, \vec{E}^{(0)}\right)_1. \tag{42}$$

Систему уравнений после ряда преобразований можно привести к виду

$$\begin{gathered}\frac{\partial \tilde{S}_1^{(0)}}{\partial t} = m_{11}\lambda\Delta\tilde{S}_1^{(0)} + m_{12}\lambda div\left(\frac{1}{\sqrt[3]{m_{06}\varepsilon\left\|\vec{I}^{(0)}\right\|^2}}\tilde{S}_1^{(0)}\vec{I}^{(0)}\right) - div\left(\tilde{S}_1^{(0)}\vec{V}\right) + \\ + m_{15}\varepsilon^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\sqrt[3]{m_{06}^2\left\|\vec{I}^{(0)}\right\|^4}} div\left(\left\|\vec{I}^{(0)}\right\|^{\frac{2}{3}}\vec{V}\right);\end{gathered} \tag{43}$$

$$\begin{gathered}\left(\left(1-\frac{2}{3}\lambda\right)\left(\frac{\partial\eta^{(0)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta^{(0)}}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2\eta^{(0)}}{\partial x^2} - \lambda\frac{4}{3}\frac{\partial\eta^{(0)}}{\partial y}\frac{\partial\eta^{(0)}}{\partial x}\frac{\partial^2\eta^{(0)}}{\partial x\partial y} + \\ + \left(\left(\frac{\partial\eta^{(0)}}{\partial x}\right)^2 + \left(1-\frac{2}{3}\lambda\right)\left(\frac{\partial\eta^{(0)}}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2\eta^{(0)}}{\partial y^2} = 0;\end{gathered} \tag{44}$$

$$\vec{E}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt[3]{m_{06}\varepsilon \left\| \vec{I}^{(0)} \right\|^2}} \vec{I}^{(0)}; \qquad (45)$$

$$\tilde{S}_0^{(0)} \equiv 0. \qquad (46)$$

Из условия сращивания решений из области электронейтральности и промежуточного слоя, а также из области пространственного заряда и промежуточного слоя следует, что

$$\delta(\varepsilon) = \delta_0 \varepsilon^{\frac{1}{3}} + \delta_1 \varepsilon^{\frac{2}{3}} + \ldots,$$

где δ_0, δ_1, ... произвольные постоянные.

Заключение

Основная идея асимптотического решения заключается в разбиении области решения на несколько областей: область электронейтральности, область пространственного заряда, промежуточная область, границы которых определяются по ходу решения [5]. Особенностью предлагаемого асимптотического метода является то, что в области пространственного заряда для однозначной разрешимости уравнений для текущего приближения необходимо использовать условие разрешимости уравнений для следующего приближения.

Предложенное выше асимптотическое решение, в отличие от метода численного решения, позволяет находить решение при произвольно малых значениях параметра ε. Уравнения для коэффициентов разложения являются стандартными уравнениями математической физики, что упрощает их исследование, приближенное аналитическое и численное решения. Кроме того, формулы (12) и (34) дают аналитическое соотношение между плотностью тока и напряженностью электрического поля в областях электронейтральности и пространственного заряда.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 13-08-93106-НЦНИЛ_а, 13-08-93105-НЦНИЛ_а и № 13-08-00464 А.

Список литературы

1. Заболоцкий В.И. Перенос ионов в мембранах / В.И. Заболоцкий, В.В. Никоненко. – М.: Наука, 1996.

2. Ньюмен Дж. Электрохимические системы: пер. с англ. / под ред. Ю.А. Чизмаджева. – М.: Мир, 1977.

3. Хромых А.А. Декомпозиция системы уравнений Нернста-Планка-Пуассона для тернарного электролита / А.А. Хромых, А.В. Коваленко, М.Х. Уртенов // Известия Краснодарского государственного университета. Естественные науки. – 2013. – Вып. № 1(2). – С. 30–33.

4. Хромых А.А. Математические модели переноса для тернарного электролита/ А.А. Хромых, А.В. Коваленко, М.Х. Уртенов // Известия Краснодарского государственного университета. Естественные науки. – 2013. – Вып. № 1(2). – С. 33–38.

5. Хромых А.А. Двумерные математические модели переноса тернарного электролита в мембранных системах: монография / А.А. Хромых, А.В. Коваленко, М.Х. Уртенов. – Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 2014.

References

1. Zabolockij V.I. Perenos ionov v membranah / V.I. Zabolockij, V.V. Nikonenko. M.: Nauka, 1996.

2. N'jumen Dzh. Jelektrohimicheskie sistemy: per. s angl. // pod red. Ju.A. Chizmadzheva. M.: Mir, 1977.

3. Khromykh A.A. Dekompozicija sistemy uravnenij Nernsta-Planka-Puassona dlja ternarnogo jelektrolita / A.A. Khromykh, A.V. Kovalenko, M.H. Urtenov // Nauchnyj zhurnal «Izvestija Krasnodarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki», vypusk no. 1(2) 2013. pp. 30–33.

4. Khromykh A.A. Matematicheskie modeli perenosa dlja ternarnogo jelektrolita/ A.A. Khromykh, A.V. Kovalenko, M.H. Urtenov // Nauchnyj zhurnal «Izvestija Krasnodarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki», vypusk no. 1(2) 2013. pp. 33–38.

5. Khromykh A.A. Dvumernye matematicheskie modeli perenosa ternarnogo jelektrolita v membrannyh sistemah: monografija / A.A. Khromykh, A.V. Kovalenko, M.H. Urtenov. Krasnodar: Kubanskij gos. un-t, 2014.

Рецензенты:

Семенчин Е.А., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов, Кубанский государственный университет, г. Краснодар;

Лебедев К.А., д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры вычислительной математики и математики, Кубанский государственный университет, г. Краснодар;

Криштоп В.В., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой «Физика», Дальневосточный государственный университет путей сообщения г. Хабаровск, профессор Университета Kwangwoon University, Korea.

Работа поступила в редакцию 28.05.2014.