УДК 531.01

К ВОПРОСУ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКОЙ

Кончина Л.В.

ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский университет “Московский энергетический институт”», Смоленск, e-mail: la_kon@mail.ru

Рассматривается движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки под действием силы переменного направления. Направление дополнительной силы параллельно линии, лежащей в неподвижной горизонтальной плоскости перпендикулярно к линии узлов. Точка приложения силы перемещается во все время движения относительно твердого тела. Центр масс твердого тела находится в экваториальной плоскости эллипсоида инерции тела во все время его движения. В работе приведены дифференциальные уравнения рассматриваемого движения (динамические и кинематические уравнения Эйлера), полученные автором ранее. Для исследования устойчивости движения твердого тела получены три первых интеграла движения, записано одно из частных решений системы дифференциальных уравнений движения тела. С помощью метода интегральных связок Четаева записаны условия устойчивости по переменным для случая равенства нулю момента реактивных сил.

Ключевые слова: твердое тело с закрепленной точкой, устойчивость движения, первый интеграл, углы Эйлера

TO THE QUESTON ON THE MOTION OF A RIGID BODY OF VARIABLE MASS WITH A FIXED POINT

Konchina L.V.

The Smolensk branch of National Research University «MEI», Smolensk, e-mail: la_kon@mail.ru

It is considered the motion of a heavy rigid body about a fixed point under the action of alternating directions in this article. The direction of the additional forces is parallel to the line, lying in a motionless horizontal plane perpendicular to the line of nodes. The point of force application moves during the relative motion of a rigid body. The center of mass of a rigid body is in the Equatorial plane of the ellipsoid inertia of the body during its motion. In the article are shown the differential equations of the considered motion (dynamic and kinematic equation of Euler), obtained by the author previously. To study the stability of the motion of a rigid body three first integrals of motion are received, one of the particular recorded solutions of the system of differential equations of motion of a body. With using Chetaeva’s method of integral ligaments are given stability conditions on the variable for the case of equality to zero at the moment of reactive forces.

Keywords: rigid body with the fixed point, the resistance movement, the first integral, the Euler angles

Решение задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки представляет собой одну из интереснейших задач динамики твёрдого тела. На сегодняшний день имеются значительные результаты, полученные при ее решении в течение более двух столетий. Связывая между собой определенным образом осевые моменты инерции, Л. Эйлер, Ж. Лагранж, С.В. Ковалевская нашли четвертый интеграл системы дифференциальных уравнений движения тела. В дальнейшем работы велись в направлении определения решений для случаев, когда накладывались некоторые ограничения на начальные условия задачи (случаи В. Гесса – Г.Г. Аппельрота, Д.Н. Горячева – С.А. Чаплыгина, Д.К. Бобылева – В.А. Стеклова и другие).

В данной работе приведено частное решение уравнений движения симметричного твердого тела переменной массы с закрепленной точкой, на которое действует дополнительная сила переменного направления, параллельного линии, лежащей в неподвижной горизонтальной плоскости перпендикулярно линии узлов. Предполагается:

1) относительные скорости отбрасываемых частиц равны нулю;

2) главные оси инерции тела для неподвижной точки относительно твёрдого тела не перемещаются;

3) в рассматриваемом промежутке времени между главными моментами инерции тела выполняется соотношение 2A = B (случай аналогичен случаю Д.К. Бобылева – В.А. Стеклова). Кроме того, во всё время движения центр масс твёрдого тела находится на оси «*y*» в экваториальной плоскости эллипсоида инерции, так что координаты центра масс тела $x_C = z_C = 0$, а точка приложения дополнительной силы $\vec{F} = \vec{F}(t)$ – в экваториальной плоскости эллипсоида инерции перпендикулярно линии узлов (точка приложения силы перемещается во всё время движения относительно твёрдого тела).

Дифференциальные уравнения движения тяжелого твердого тела переменной массы (динамические уравнения Эйлера) с закрепленной точкой в общем случае, если момент реактивных сил равен нулю, согласно [1, 2, 3], имеют вид

$$A\frac{dp}{dt}+(C-B)rq+A(\tilde{q}r-\tilde{r}q)=M_x(t);$$
$$B\frac{dq}{dt}+(A-C)pr+B(\tilde{r}p-\tilde{p}r)=M_y(t); \quad (1)$$
$$C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq+C(\tilde{p}q-\tilde{q}p)=M_z(t),$$

где *x, y, z* – подвижные оси, неизменно связанные с телом; *p*, *q*, *r* – проекции вектора угловой скорости вращения тела на оси подвижной системы координат, совпадающие в каждый момент времени с главными осями эллипсоида инерции, построенного для неподвижной точки O; $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}$ – проекции вектора угловой скорости вращения на оси, совпадающие с главными осями эллипсоида инерции для неподвижной точки.

Динамические уравнения Эйлера для рассматриваемого твёрдого тела примут вид [4]

$$A\frac{dp}{dt}+(C-2A)rq=Mgy_C\gamma_3+Fy'\gamma_3' \cos\phi;$$
$$2A\frac{dq}{dt}+(A-C)pr=Fy'\gamma_3' \sin\phi; \quad (2)$$
$$C\frac{dr}{dt}+Apq=-Mgy_C\gamma_1-Fy'(\gamma_2' \sin\phi-\gamma_1' \cos\phi),$$

где

$\gamma_1' = \cos\theta\sin\phi;$

$\gamma_2' = \cos\theta\cos\phi;$ – направляющие косину-

$\gamma_3' = -\sin\theta;$

сы силы $\vec{F}$ переменного направления; γ_1, γ_2, γ_3 – направляющие косинусы силы тяжести; y' – алгебраическое значение радиус-вектора точки приложения силы.

Таким образом, динамические уравнения Эйлера можно представить следующим образом [3, 5]:

$$A\frac{dp}{dt}+(C-2A)rq=Mgy_C\gamma_3+Fy'\gamma_2;$$
$$2A\frac{dq}{dt}+(A-C)pr=Fy'\gamma_1; \quad (3)$$
$$C\frac{dr}{dt}+Apq=-Mgy_C\gamma_1.$$

Для решения задачи к динамическим уравнениям Эйлера присоединяем кинематические уравнения

$$p=\dot{\psi}\sin\theta\sin\phi+\dot{\theta}\cos\phi;$$
$$q=\dot{\psi}\sin\theta\cos\phi-\dot{\theta}\sin\phi; \quad (4)$$
$$r=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\phi},$$

или уравнения Пуассона

$$\frac{d\gamma_1}{dt}=r\gamma_2-q\gamma_3;$$
$$\frac{d\gamma_2}{dt}=p\gamma_3-r\gamma_1; \quad (5)$$
$$\frac{d\gamma_3}{dt}=q\gamma_1-p\gamma_2;$$

$$\frac{d\gamma_1'}{dt}=r\gamma_2'-q\gamma_3'-\dot{\psi}k_X^0;$$
$$\frac{d\gamma_2'}{dt}=p\gamma_3'-r\gamma_1'-\dot{\psi}k_Y^0; \quad (6)$$
$$\frac{d\gamma_3'}{dt}=q\gamma_1'-p\gamma_2'-\dot{\psi}k_Z^0,$$

где $\dot{\Psi}$ – алгебраическое значение угловой скорости прецессии; k_X^0, k_Y^0, k_Z^0 – проекции единичного вектора линии узлов на оси подвижной системы координат.

В случае движения тяжёлого твёрдого тела переменной массы под действием силы переменного направления для получения интеграла энергии введем следующие ограничения:

$$2Mgy_C=\text{const}; \quad (7)$$
$$2Fy'=\text{const}. \quad (8)$$

Интеграл энергии при условиях (7), (8) примет вид

$$A(p^2+2q^2)+Cr^2=2Mgy_C\gamma_2+2Fy'\gamma_3+\text{const}. \quad (9)$$

Тривиальный интеграл запишем в виде:

$$\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1$$

или

$$(\gamma_1^{э})^2+(\gamma_2^{э})^2+(\gamma_3^{э})^2=1. \quad (10)$$

Из теоремы об изменении кинетического момента получаем ещё один первый интеграл

$$Ap\gamma_1+2Aq\gamma_2+Cr\gamma_3=\text{const}. \quad (11)$$

Последний первый интеграл в общем случае получить не удаётся.

Для исследования устойчивости движения твёрдого тела запишем частное решение системы (3), (5) в виде [2]:

$$\begin{aligned} p&=\text{const}=p_0; & \gamma_1&=1;\\ q&=0; & \gamma_2&=0;\\ r&=0; & \gamma_3&=0, \end{aligned} \quad (12)$$

положив

$$p=\tilde p+\xi_1;\quad q=\tilde q+\xi_2;\quad r=\tilde r+\xi_3;$$

$$\tilde p=p_0;\quad \tilde q=0;\quad \tilde r=0; \quad (13)$$

$$\gamma_S=\tilde\gamma_S+\alpha_S;\quad (s=1,2,3)$$

$$\tilde\gamma_1=1;\quad \tilde\gamma_2=0;\quad \tilde\gamma_3=0.$$

Используя метод интегральных связок Четаева, интегралы (9), (10), (11) запишем в виде:

$$\begin{gathered} 2Ap_0\xi_1+A\xi_1^2+2A\xi_2^2+C\xi_3^2-2Mgy_C\alpha_2-2Fy_1\alpha_3=\text{const};\\ Ap_0\alpha_1+A\xi_1+A\xi_1\alpha_1+2A\xi_2\alpha_2+C\xi_3\alpha_3=\text{const};\\ \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+2\alpha_1=\text{const}. \end{gathered} \quad (14)$$

Следовательно, связку интегралов в общем виде можно представить:

$$\begin{gathered} V=2Ap_0\xi_1+A\xi_1^2+2A\xi_2^2+C\xi_3^2-2Mgy_C\alpha_2-Fy_1\alpha_3+\\ +\lambda_1\left(Ap_0\alpha_1+A\xi_1+A\xi_1\alpha_1+2A\xi_2\alpha_2+C\xi_3\alpha_3\right)+\\ +\lambda_2\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+2\alpha_1\right), \end{gathered} \quad (15)$$

где λ_1, λ_2 – произвольные постоянные, которые следует соответствующим образом выбрать.

Для исключения линейных членов необходимо выполнение равенств

$$2Ap_0+\lambda_1 A=0; \quad (16)$$

$$\lambda_1 Ap_0+2\lambda_2=0. \quad (17)$$

Таким образом,

$$\lambda_1=-\frac{1}{2p_0};\quad \lambda_2=\frac{A}{4}. \quad (18)$$

После преобразований связка интегралов примет вид

$$\begin{gathered} V=A\xi_1^2+2A\xi_2^2+C\xi_3^2-2Mgy_C\alpha_2-Fy_1\alpha_3-\\ -\frac{1}{2p_0}\left(A\xi_1\alpha_1+2A\xi_2\alpha_2+C\xi_3\alpha_3\right)+\frac{A}{4}\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2\right). \end{gathered} \quad (19)$$

Разобьём функцию V на три функции

$$V_1=A\xi_1^2-\frac{1}{2p_0}A\xi_1\alpha_1+\frac{A}{4}\alpha_1^2; \quad (20)$$

$$V_2=2A\xi_2^2-2Mgy_C\alpha_2-\frac{1}{2p_0}A\xi_2\alpha_2+\frac{A}{4}\alpha_2^2; \quad (21)$$

$$V_3=C\xi_3^2-Fy_1\alpha_3-\frac{1}{2p_0}C\xi_3\alpha_3+\frac{A}{4}\alpha_3^2. \quad (22)$$

Далее необходимо добиться определённо-положительности этих трёх форм. Запишем условие Сильвестра для функции V_1

$$\Delta_1 = A > 0;\ \Delta_2 = \frac{3A^2}{16p_0} > 0. \qquad (23)$$

Таким образом, функция $V_1 > 0$, следовательно, устойчивость параметров p и γ_1 доказана.

Условие положительности форм V_2 и V_3 заключается в выполнении неравенств

$$2A\xi_2^2 - 2Mgy_C\alpha_2 - \frac{1}{2p_0}A\xi_2\alpha_2 + \frac{A}{4}\alpha_2^2 > 0; \qquad (24)$$

$$C\xi_3^2 - Fy_1\alpha_3 - \frac{1}{2p_0}C\xi_3\alpha_3 + \frac{A}{4}\alpha_3^2 > 0. \qquad (25)$$

Неравенства (24) и (25) выполняются при условиях:

$$2A\xi_2^2 - \frac{1}{2p_0}A\xi_2\alpha_2 + \frac{A}{4}\alpha_2^2 > 0;$$

$$2Mgy_C\alpha_2 < 0; \qquad (26)$$

$$C\xi_3^2 - \frac{1}{2p_0}C\xi_3\alpha_3 + \frac{A}{4}\alpha_3^2 > 0;$$

$$Fy_1\alpha_3 < 0. \qquad (27)$$

Вторые равенства в (26) и (27) могут быть обеспечены выбором y_C и y_1.

Условия положительности первых форм этих же равенств обеспечивают условия Сильвестра, которые для (26) имеют вид:

$$\Delta_1 = 4A;\quad \Delta_2 = \frac{A^2}{4p_0}(4p_0 - 1) > 0, \qquad (28)$$

для (27):

$$\Delta_1 = 2C;\quad \Delta_2 = \frac{CA}{4p_0^2}(4p_0^2 - C) > 0. \qquad (29)$$

Итак, выполнение условий (26), (27) и (28), (29) является достаточным для устойчивости по переменным q, r, γ_2, γ_3.

Список литературы

1. Белецкий В.В., Хентов А.А. Вращательное движение намагниченного спутника. – М.: Наука, 1985.

2. Кончина Л.В. Движение тяжелого твердого тела переменной массы под действием силы переменного направления // Международный журнал экспериментального образования. – 2011. – № 7. – С. 25–25.

3. Бочковая Л.Ф. Об одном интегрируемом случае уравнений движения тела переменной массы с одной закреплённой точкой // Динамика твёрдого тела. – Алма-Ата, 1988.

4. Кончина Л.В. Один случай движения тяжелого твердого тела переменной массы под действием силы переменного направления // Научные труды международной научно-практической конференции ученых РГАУ-МСХА, ЛНАУ. – Москва-Луганск, 2012. – Т. 6. – С. 45–50.

5. Konchina L.V., Tulegenova K.B. Mathematical modeling of the motion of solids with fastened point under the force of variable direction // Mathematical Modeling of Ecological Systems. – Almaty, 2003. – P. 142.

References

1. Beletsky V.V., Khentov A.A. Rotational motion of t magnetized satellite. M.: Nauka, 1985.

2. Konchina L.V. Motion of a solid body with variable mass under the action of force with variable direction // Mezhdunarodnyj zhurnal eksperimental'nogo obrazovanija. 2011, no. 7, pp. 25–25.

3. Bochkovaya L.F. An integrable case of the equations of motion of a body with variable mass with one fixed point // Dinamika tvjordogo tela. Alma-Ata, 1988.

4. Konchina L.V. One case of motion of a solid body with variable mass under the action of variable direction // Proceedings of international scientific-practical conference of scientists RGAU – MSHA, LNAU. Moskow-Lugansk, Vol. 6, 2012. pp. 45–50.

5. Konchina L.V., Tulegenova K.B. Mathematical modeling of the motion of solids with fastened point under the force of variable direction // Mathematical Modeling of Ecological Systems. Almaty, 2003, pp. 142.

Рецензенты:

Денисов В.Н., д.т.н., доцент, кафедра «Высшая математика», Смоленский филиал национального исследовательского университета «МЭИ», г. Смоленск;

Омаров Т.И., д.т.н., доцент, кафедра «Прикладная механика и основы конструирования машин» Казахский национальный технический университет, г. Алматы.

Работа поступила в редакцию 15.05.2014.