

УДК 62-82

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИДРОПРИВОДА ВЗАИМНОГО ПОВОРОТА ЗВЕНЬЕВ ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО МЕХАНИЗМА

Багаутдинов И.Н., Журавлев Е.А., Богданов Е.Н.

ФГБОУ ВПО «Поволжский государственный технологический университет»,
Йошкар-Ола, e-mail: BagautdinovIN@volgatech.net

Описано взаимодействие звеньев механизма? связанных вращательной кинематической парой? и элементов гидравлического двигателя поступательного движения. Получены выражения для приводной обобщенной силы, отнесенной к углу взаимного поворота звеньев и для передаточных функций, связывающих перемещение и скорость штока гидроцилиндра с углом и угловой скоростью относительного поворота звеньев. Векторно-матричная форма этих выражений облегчает их использование в алгоритмах автоматического формирования уравнений динамики многозвенных механизмов. В математической модели гидравлической части привода использованы уравнения баланса расходов рабочей жидкости с учетом её объемного сжатия, которые дают по одному дифференциальному уравнению первого порядка для каждой полости двигателя. Представлены результаты численной реализации предлагаемого описания для плоского трехзвенного механизма, приводимого в движение тремя гидроцилиндрами с дроссельным программным управлением.

Ключевые слова: гидропривод, вращательная пара, обобщенная приводная сила, динамика многозвенного механизма, численное решение

MATHEMATICAL MODEL OF HYDRAULIC ACTUATOR USED FOR LINKS RALATIVE ROTATION

Bagautdinov I.N., Zhuravlev E.A., Bogdanov E.N.

Volga State University of Technology, Yoshkar-Ola, e-mail: BagautdinovIN@volgatech.net

The interaction between the mechanism links related by rotational pair and elements of hydraulic actuator is considered. Expressions are obtained for the generalized driving force attributed to relative rotation angle and for the analogs of rod displacement and rod velocity related them with the angle and angular velocity of links relative rotation. The vector-matrix form of these expressions facilitates there using in algorithms of automatic formation multilink mechanism dynamics equations. In the mathematical model of hydraulic subsystem balance equations of working fluid flow in view of its volume compression are used. Each one of them gives one first order differential equation for each chamber of the actuator. The results of the numerical implementation of the proposed description are presented for planar three-link mechanism driven by three valve-controlled hydraulic cylinders.

Keywords: hydraulic actuator, rotational pair, generalized driving force, dynamics of multilink mechanism, numerical solution

Гидравлические двигатели поступательного действия – гидроцилиндры – находят широкое применение в шарнирно – рычажных исполнительных механизмах для обеспечения взаимного поворота звеньев [1]. Если силовой электропривод имеет достаточно простую математическую модель, которая легко встраивается в известные способы описания динамики манипуляционных механизмов [3], то для гидравлического привода многозвенных шарнирных механизмов унифицированное описание кинематики и динамики в современной технической литературе отсутствует. Создание такого описания является целью настоящей работы.

При построении гидравлической части математической модели привода используются обычные допущения технической гидравлики и известные уравнения [2], описывающие динамику элементов привода – распределителей, трубопроводов, гидроцилиндров.

Математическая модель

Рассматривается механизм, состоящий из n жестких звеньев, последовательно

связанных вращательными парами; первое звено связано вращательной парой с неподвижным основанием. Механизм приводится в движение гидравлическими двигателями G_1, G_2, \dots, G_n . Каждый двигатель – одноштоковый гидроцилиндр, управляющий взаимным поворотом двух смежных звеньев. В соответствии с конструкторской практикой полагаем шток k -го двигателя шарнирно связанным с k -м звеном, а его цилиндр – с $(k - 1)$ -м звеном (рис. 1).

С каждым k -м звеном жестко свяжем правую ортогональную систему координат $O_k X_k Y_k Z_k$, ось $O_k Z_k$ которой совпадает с осью шарнира, соединяющего k -е и $(k - 1)$ -е звенья (рис. 1). С неподвижным основанием механизма связана базовая система координат $O_0 X_0 Y_0 Z_0$. Положение каждого k -го звена относительно $(k - 1)$ -го определяется величиной q_k угла его поворота (по ходу часовой стрелки) вокруг оси $O_k Z_k$, до положения в котором ось $O_k X_k$ становится параллельной плоскости $O_{k-1} X_{k-1} Z_{k-1}$. В том случае, когда оси $O_{k-1} Z_{k-1}$ и $O_k Z_k$ параллельны, за q_k принимается величина угла поворота

k -го звена до совпадения направлений осей $O_k X_k$ и $O_{k-1} X_{k-1}$. В результате конфигурация механизма полностью определяется набором обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_n .

Матрицу линейного преобразования координат трехмерного вектора из системы координат $O_{k-1} X_{k-1} Y_{k-1} Z_{k-1}$ в систему координат $O_k X_k Y_k Z_k$ обозначим $\mathbf{T}_k(q_k)$.

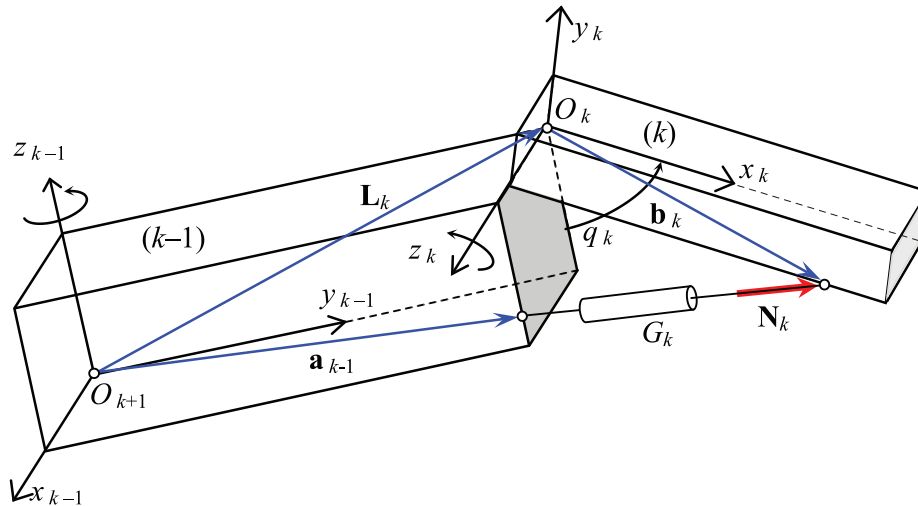


Рис. 1. Схема шарнирного сочленения смежных звеньев механизма

Введем следующие обозначения:

\mathbf{L}_{k-1} – радиус-вектор точки O_k относительно центра O_{k-1} ;

\mathbf{a}_{k-1} – радиус-вектор центра шарнирного соединения цилиндра двигателя G_k со звеном $k-1$ относительно центра O_{k-1} ;

\mathbf{b}_k – радиус-вектор центра шарнирного соединения штока двигателя G_k со звеном k относительно центра O_k .

Вектор \mathbf{N}_k силы, действующей на k -е звено со стороны штока гидроцилиндра G_k , представим в виде

$$\mathbf{N}_k = N_k \frac{\mathbf{b}_k - \mathbf{T}_k(\mathbf{a}_{k-1} - \mathbf{L}_{k-1})}{|\mathbf{b}_k - \mathbf{T}_k(\mathbf{a}_{k-1} - \mathbf{L}_{k-1})|}. \quad (1)$$

Здесь N_k – алгебраическая величина силы, которая имеет положительный знак, если вектор \mathbf{N}_k направлен от $(k-1)$ -го к k -му звену. Естественно задавать векторы \mathbf{b}_k и \mathbf{a}_{k-1} , \mathbf{L}_{k-1} в (1) их постоянными координатами в соответствующих локальных системах координат.

Очевидно, что обобщенная приводная сила Q_k , соответствующая координате q_k равна моменту силы \mathbf{N}_k относительно оси $O_k Z_k$ и может быть представлена в виде

$$Q_k = (\mathbf{b}_k \times \mathbf{N}_k) \mathbf{k}$$

где \mathbf{k} – орт оси $O_k Z_k$.

С учетом (1) это выражение принимает следующий вид:

$$Q_k = N_k \frac{[\mathbf{T}_k(\mathbf{a}_{k-1} - \mathbf{L}_{k-1})] \times \mathbf{b}_k}{|\mathbf{b}_k - \mathbf{T}_k(\mathbf{a}_{k-1} - \mathbf{L}_{k-1})|} \mathbf{k}. \quad (2)$$

Величина силы \mathbf{N}_k определяется разностью давлений в полостях двигателя G_k :

$$N_k = p_1^{(k)} F_1^{(k)} - p_2^{(k)} F_2^{(k)}. \quad (3)$$

где $p_1^{(k)}$, $p_2^{(k)}$ – давления рабочей жидкости в полостях гидроцилиндра G_k ; $F_1^{(k)}$, $F_2^{(k)}$ – соответствующие рабочие площади поршня. Повсюду в дальнейшем нижний индекс 1 указывает на принадлежность величины к поршневой полости двигателя, а нижний индекс 2 – к штоковой полости.

Управление работой гидравлического двигателя осуществляется при помощи гидравлического распределителя (дресселя), который обеспечивает подключение рабочей полости двигателя к напорной магистрали, а сливной полости – к сливной магистрали.

При описании работы гидравлического двигателя использовались следующие предположения:

1) давления в напорной и сливной магистралях каждого двигателя постоянны и равны p_n и p_c соответственно;

2) гидравлическими потерями, связанными с утечками рабочей жидкости, можно пренебречь;

3) деформация трубопроводов, вызванная изменением давления рабочей жидкости, пренебрежимо мала;

4) падение давления рабочей жидкости вдоль участков трубопроводов, соединяющих распределитель и полости двигателя, не учитывается;

5) силы сухого и вязкого трения поршней о стенки цилиндров пренебрежимо малы по сравнению с приводными силами N_k .

Для установления зависимостей давлений $p_1^{(k)}, p_2^{(k)}$ в полостях двигателя G_k от перемещения s_k его штока были использованы дифференциальные уравнения рабо-

ты [2], которые выражают условия баланса расходов рабочей жидкости, поступающей от распределителя в полости гидроцилиндра с учетом её объемного сжатия. В том случае, когда рабочей является поршневая полость двигателя, эти уравнения, с учетом принятых выше допущений, приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_1^{(k)} &= \frac{E}{V_1^{(k)} + F_1^{(k)} s_k(q_k)} \left[\mu_k u_k(t) \sqrt{2|p_n - p_1^{(k)}|/\rho} \operatorname{sign}(p_n - p_1^{(k)}) - F_1^{(k)} s'_k(q_k) \dot{q}_k \right]; \\ \frac{d}{dt} p_2^{(k)} &= \frac{E}{V_2^{(k)} - F_2^{(k)} s_k(q_k)} \left[\mu_k u_k(t) \sqrt{2|p_2^{(k)} - p_c|/\rho} \operatorname{sign}(p_2^{(k)} - p_c) + F_2^{(k)} s'_k(q_k) \dot{q}_k \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь E и ρ – модуль объемного сжатия и плотность рабочей жидкости; $V_1^{(k)}, V_2^{(k)}$ – объемы полостей двигателя вместе с участками трубопровода, соединяющих полость с распределителем при среднем положении поршня; μ_k – безразмерный коэффициент окна распределителя ($0 < \mu_k \leq 1$); $u_k(t)$ – регулируемая площадь проходного сечения окна распределителя; $s_k(q_k)$ – перемещение

штока двигателя, выраженное через обобщенную координату q_k ; $s'_k(q_k) \dot{q}_k = \dot{s}_k$ – скорость штока, выраженная через обобщенную скорость \dot{q}_k . Для перемещения s_k за положительное принимается направление к звену с номером k .

В том случае, когда рабочей является штоковая полость, уравнения (4) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_1^{(k)} &= \frac{E}{V_1^{(k)} + F_1^{(k)} s_k(q_k)} \left[\mu_k u_k(t) \sqrt{2|p_1^{(k)} - p_c|/\rho} \operatorname{sign}(p_1^{(k)} - p_c) - F_1^{(k)} s'_k(q_k) \dot{q}_k \right]; \\ \frac{d}{dt} p_2^{(k)} &= \frac{E}{V_2^{(k)} - F_2^{(k)} s_k(q_k)} \left[\mu_k u_k(t) \sqrt{2|p_n - p_2^{(k)}|/\rho} \operatorname{sign}(p_n - p_2^{(k)}) + F_2^{(k)} s'_k(q_k) \dot{q}_k \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Используя введенные ранее векторы $\mathbf{b}_k, \mathbf{L}_{k-1}, \mathbf{a}_{k-1}$ и матрицы $\mathbf{T}_k(q_k)$, получим матричные выражения для кинематических пере-

даточных функций $s_k(q_k), s'_k(q_k)$, входящих в (4) и (5):

$$s_k(q_k) = |\mathbf{b}_k - \mathbf{T}_k(q_k) \cdot (\mathbf{a}_{k-1} - \mathbf{L}_{k-1})| - d_k;$$

$$s'_k(q_k) = [\mathbf{b}_k - \mathbf{T}_k(q_k) \cdot (\mathbf{a}_{k-1} - \mathbf{L}_{k-1})] \left[\frac{d}{dq_k} \mathbf{T}_k(q_k) \cdot (\mathbf{a}_{k-1} - \mathbf{L}_{k-1}) \right] / [s_k(q_k) + d_k], \quad (6)$$

где d_k – расстояние между центрами опорных шарниров двигателя G_k при среднем положении штока.

Добавляя к соотношениям (2), (3), (4), (5) дифференциальные уравнения динамики [4] рассматриваемого n -звенного механизма

$$\sum_{i=1}^n A_{ki}(q) \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{kij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j = Q_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (7)$$

а также начальные условия $q_k(0) = q_{k0}; \dot{q}_k(0) = \dot{q}_{k0}; p_1^{(k)}(0) = p_{10}^{(k)}; p_2^{(k)}(0) = p_{20}^{(k)}$ и программу изменения управляющих переменных – площадей проходных сечений окон распределителей $u_k = u_k(t), t \geq 0$, получаем замкнутую систему уравнений описывающих движение механизма с гидравлическим приводом, имеющим программное дроссельное управление.

Численная реализация математической модели

В качестве примера использования предлагаемой модели выполнен расчет движения плоского трехзвенного механизма с тремя гидравлическими двигателями. Схема механизма, расположение локальных систем координат и двигателей показано на рис. 2.

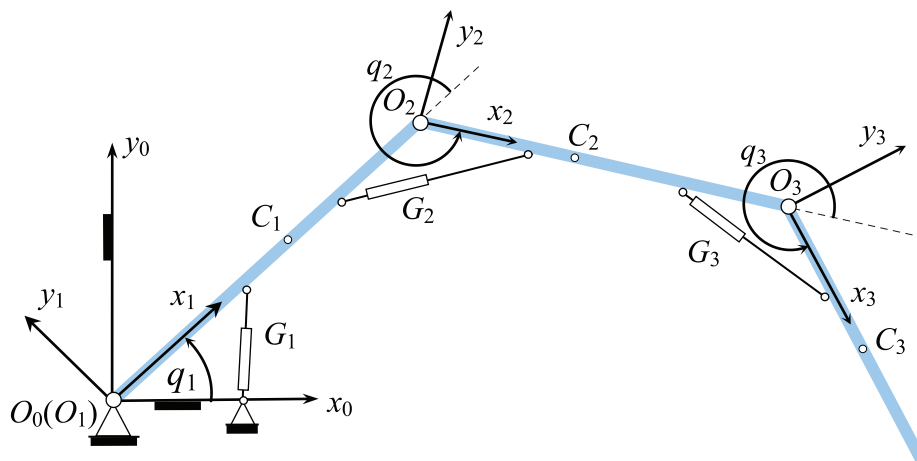


Рис. 2. Схема плоского трехзвенного исполнительного механизма

Геометрические параметры механизма: $L_k = 0,8$ м, $\mathbf{a}_0 = (0,25; 0; 0)^T$ м; $\mathbf{b}_1 = (0,25; 0; 0)^T$ м; $\mathbf{a}_1 = (0,55; 0; 0)^T$ м; $\mathbf{b}_2 = (0,25; 0; 0)^T$ м; $\mathbf{a}_2 = (0,55; 0; 0)^T$ м; $\mathbf{b}_3 = (0,25; 0; 0)^T$ м.

Массы звеньев $m_k = 6$ кг; локальные координаты их центров масс $\mathbf{C}_k = (0,4; 0; 0)^T$ м; главные центральные моменты инерции звеньев $I_k = 0,32$ кг·м². Массы гидравлических двигателей считались пренебрежимо малыми.

Система дифференциальных уравнений динамики (7) для плоского шарнирного трехзвенного механизма была получена средствами компьютерной алгебры пакета Maple 4 на основе модифицированного рекурсивного алгоритма Ньютона – Эйлера, описанного в работе [5].

Параметры гидропривода: $p_{\text{н}} = 1,5$ МПа, $p_c = 100$ кПа, $F_1^{(k)} = 3,14 \cdot 10^{-4}$ м², $F_2^{(k)} = 2,34 \cdot 10^{-4}$ м², $V_1^{(k)} = 8,06 \cdot 10^{-5}$ м³, $V_2^{(k)} = 7,28 \cdot 10^{-5}$ м³, $\mu_k = 0,7$, $d_k = 0,395$ м.

Характеристики рабочей жидкости: $\rho = 800$ кг/м³, $E = 1300$ МПа.

Рассматривается движение механизма в горизонтальной плоскости при начальных условиях: $q_1(0) = 1,396$ рад; $q_2(0) = -0,524$ рад; $q_3(0) = -1,222$ рад; $\dot{q}_k(0) = 0$; $p_1^{(k)}(0) = p_{2c}^{(k)}(0) = p$, ($k = 1, 2, 3$).

Рабочая жидкость подается в поршневую полость двигателя G_1 и в штоковые полости двигателей G_2, G_3 . Программы управления для всех распределителей одинаковы:

$$u_k(t) = \begin{cases} 2Ut/\tau, & \text{при } 0 \leq t \leq 0,5\tau, \\ 2U(1-t/\tau), & \text{при } 0,5\tau < t \leq \tau, \\ 0, & \text{при } t > \tau. \end{cases}$$

Здесь $U = 10^{-6}$ м³, $\tau = 2$ с.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (7), (4) 12-го порядка решалась численно методом Рунге – Кутты с постоянным временным шагом $\Delta t = 0,05$ с. Размер шага интегрирования выбирался в ходе численных экспериментов.

Результаты численного решения представлены на рис. 3–4. На рис. 3 показаны изменения обобщенных координат $\Delta q_k(t) = q_k(t) - q_k(0)$.

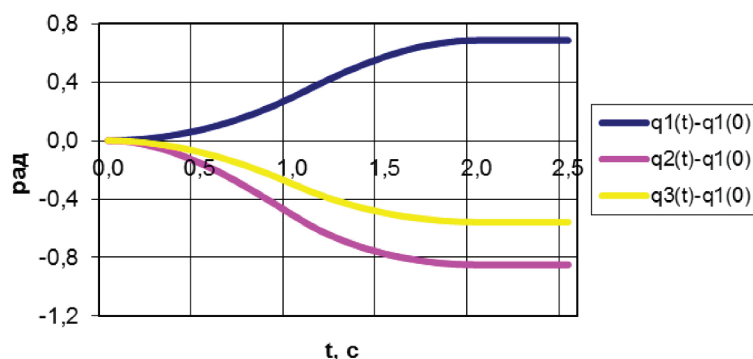


Рис. 3. Графики изменения обобщенных координат механизма

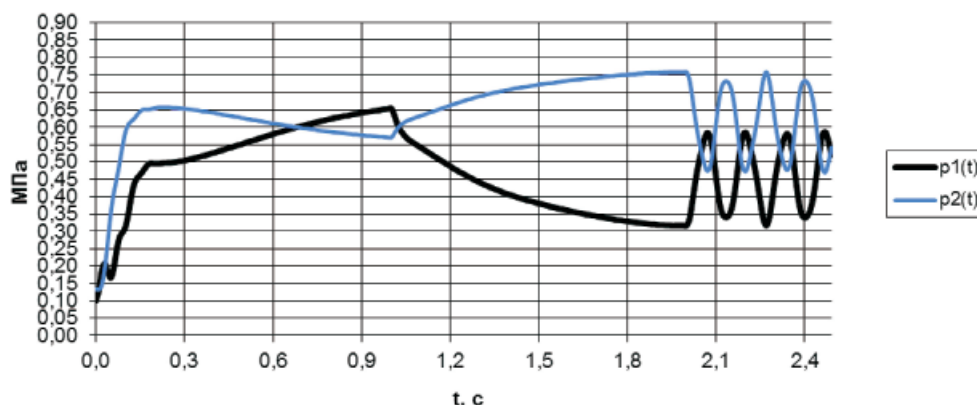


Рис. 4. Изменение давлений в полостях двигателя G_1

На рис. 4 показаны изменения давлений рабочей жидкости в полостях двигателя G_1 ; черной цвета кривые соответствуют рабочей, а синяя – сливной полости. Наблюдаемые колебания объясняются сжимаемостью рабочей жидкости.

Заклучение

Представленная математическая модель дает единообразное описание кинематики и динамики гидропривода вращательного звена механизма при произвольном расположении гидродвигателя поступательного действия. Векторные формы представления обобщенных сил (2) и передаточных функций (6) удобны для использования в алгоритмах автоматического формирования уравнений динамики механизма.

Работа выполнена в рамках ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы» Минобрнауки России.

Список литературы

1. Багаутдинов И.Н., Шестаков Я.И. Оценка влияния неплоскостности опорного кольца опорно-поворотного круга платформы машины ЛП-19В на напряженное состояние механизма поворота // Известия вузов. Лесной журнал. – 2002. – № 7. – С. 38–44.
2. Попов Д.Н. Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем. – М.: Машиностроение, 1976. – 424 с.
3. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. – М.: Наука, 1989. – 368 с.

4. Luh J. Y.S., Walker M.W., Paul R.P.C. On-line computational scheme for mechanical manipulators // Trans. ASME, J. of Dynamic Systems, Measurement & Control. – Vol. 102. – 1980. – P. 69–76.

5. Walker M.W., Orin D.E., Efficient dynamic computer simulation of robotic mechanisms, Trans. ASME // J. of Dynamic Systems, Measurement & Control. – Vol. 104. – 1982. – P. 205–211.

References

1. Bagautdinov I.N., Shestakov Ja.I. Ocenka vlijaniya neploskostnosti opornogo kol'ca oporno-povorotnogo kruga platformy mashiny LP-19V na naprjazhennoe sostojanie mehanizma povorota. *Izvestia vuzov. Lesnoj zhurnal*, 2002, no. 7, 38–44.

2. Popov D. N. Dinamika i regulirovanie gidro- i pnevmosistem. – M.: Mashinostroenie, 1976. – 424 p.

3. Chernous'ko F. L., Bolotnik N.N., Gradeckij V.G. Manipuljacionnye roboty: dinamika, upravlenie, optimizacija. M.: Nauka, 1989. 368 p.

4. Luh J.Y.S., Walker M.W., Paul R.P.C. On-line computational scheme for mechanical manipulators. Trans. ASME, J. of Dynamic Systems, Measurement & Control, vol. 102, 1980, pp. 69–76.

5. Walker M.W., Orin D.E., Efficient Dynamic Computer Simulation of Robotic Mechanisms, Trans. ASME, J. Dynamic Systems, Measurement & Control, vol. 104, 1982, pp. 205–211.

Рецензенты:

Полянин И.А., д.т.н., профессор кафедры транспортных и технологических машин, ФГБОУ ВПО «Поволжский государственный технологический университет», г. Йошкар-Ола;

Сидыганов Ю.Н., д.т.н., профессор кафедры эксплуатации машин и оборудования, ФГБОУ ВПО «Поволжский государственный технологический университет», г. Йошкар-Ола.

Работа поступила в редакцию 15.05.2014.